8. CONVECÇÃO E ESCOAMENTO 2Dp

8.1 Modelo matemático

A partir da equação de conservação da energia térmica, considerando-se
- problema bidimensional (2D);
- regime permanente (p);
- coordenadas cartesianas;
- escoamento laminar;
- propriedades constantes: ρ, c_p, k;
- sem $\dot{q}$;
- sem dissipação viscosa;

obtém-se a equação de advecção-difusão de calor 2Dp:

$$\underbrace{\underbrace{\frac{\partial}{\partial x}(uT)+\frac{\partial}{\partial y}(vT)}_{\text{advecção}}=\underbrace{\alpha\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}+\alpha\frac{\partial^2 T}{\partial y^2}}_{\text{condução}}}_{\text{convecção}} \tag{8.1}$$

onde

$$\alpha=\frac{k}{\rho c_p}\ (m^2/s) \qquad \text{(difusividade térmica)} \tag{8.2}$$

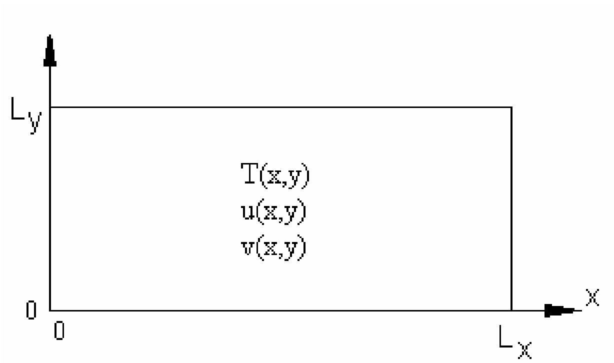

Figura 8.1: Convecção de calor 2Dp

Condições de contorno (por ex.):

$$T(0,y) = T(1, y) = T(x,0) = 0 \tag{8.3}$$

$$T(x,1) = 100.\text{sen}(\pi x) \tag{8.4}$$

Neste tipo de problema, o campo de velocidades é considerado conhecido (é um dado do problema); um exemplo é:

$$u = 8\left(x^4 - 2x^3 + x^2\right)\left(4y^3 - 2y\right) \tag{8.5}$$

$$v = -8\left(4x^3 - 6x^2 + 2x\right)\left(y^4 - y^2\right) \tag{8.6}$$

8.2 Discretização do Modelo Matemático

Integrando-se a eq.(8.1) sobre o volume de controle (VC) P da fig.8.2, obtém-se:

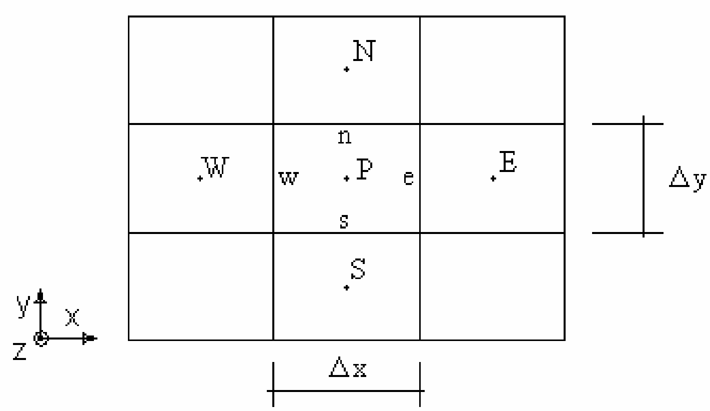

Figura 8.2: Malha 2D uniforme por direção

$$\int_{y_s}^{y_n}\int_{x_w}^{x_e}\left[\frac{\partial}{\partial x}(uT)+\frac{\partial}{\partial y}(vT)\right]dx\,dy = \int_{y_s}^{y_n}\int_{x_w}^{x_e}\left[\alpha\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}+\alpha\frac{\partial^2 T}{\partial y^2}\right]dx\,dy \tag{8.7}$$

ou

$$\int_{y_s}^{y_n}\left[\int_{x_w}^{x_e}\frac{\partial}{\partial x}(uT)dx\right]dy + \int_{x_w}^{x_e}\left[\int_{y_s}^{y_n}\frac{\partial}{\partial y}(vT)dy\right]dx = \alpha\int_{y_s}^{y_n}\left[\int_{x_w}^{x_e}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial T}{\partial x}\right)dx\right]dy + \alpha\int_{x_w}^{x_e}\left[\int_{y_s}^{y_n}\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial T}{\partial y}\right)dy\right]dx$$

que resulta em

$$\int_{y_s}^{y_n}\left[(uT)_e-(uT)_w\right]dy + \int_{x_w}^{x_e}\left[(vT)_n-(vT)_s\right]dx = \alpha\int_{y_s}^{y_n}\left[\left(\frac{\partial T}{\partial x}\right)_e-\left(\frac{\partial T}{\partial x}\right)_w\right]dy + \alpha\int_{x_w}^{x_e}\left[\left(\frac{\partial T}{\partial y}\right)_n-\left(\frac{\partial T}{\partial y}\right)_s\right]dx \tag{8.8}$$

As integrais da eq.(8.8) são resolvidas considerando-se que (uT), (vT), $\left(\frac{\partial T}{\partial x}\right)$ e $\left(\frac{\partial T}{\partial y}\right)$ são constantes em cada face do VC P. Isso resulta em

$$\left[(uT)_e-(uT)_w\right]\Delta y + \left[(vT)_n-(vT)_s\right]\Delta x = \alpha\left[\left(\frac{\partial T}{\partial x}\right)_e-\left(\frac{\partial T}{\partial x}\right)_w\right]\Delta y + \alpha\left[\left(\frac{\partial T}{\partial y}\right)_n-\left(\frac{\partial T}{\partial y}\right)_s\right]\Delta x \tag{8.9}$$

Aproximações para a eq.(8.9):
- CDS para as derivadas nas faces;
- CDS para as temperaturas T nas faces;
- velocidades u e v constantes em cada face e calculadas com x e y do ponto médio de cada face. Assim:

$$\left[u_e\frac{(T_P+T_E)}{2}-u_w\frac{(T_P+T_W)}{2}\right]\Delta y+\left[v_n\frac{(T_P+T_N)}{2}-v_s\frac{(T_P+T_S)}{2}\right]\Delta x=$$
$$=\alpha\left[\frac{(T_E-T_P)}{\Delta x}-\frac{(T_P-T_W)}{\Delta x}\right]\Delta y+\alpha\left[\frac{(T_N-T_P)}{\Delta y}-\frac{(T_P-T_S)}{\Delta y}\right]\Delta x$$

que na forma de

$$a_P T_P = a_w T_W + a_e T_E + a_s T_S + a_n T_N + b_P \tag{8.10}$$

resulta em

$$\left.\begin{array}{ll}
\text{coeficientes (VC reais, P=1 a N)} & \left\{\begin{array}{l}
a_w = \alpha\dfrac{\Delta y}{\Delta x}+u_w\dfrac{\Delta y}{2}\\[2ex]
a_e = \alpha\dfrac{\Delta y}{\Delta x}-u_e\dfrac{\Delta y}{2}\\[2ex]
a_s = \alpha\dfrac{\Delta x}{\Delta y}+v_s\dfrac{\Delta x}{2}\\[2ex]
a_n = \alpha\dfrac{\Delta x}{\Delta y}-v_n\dfrac{\Delta x}{2}\\[2ex]
a_P = a_w + a_e + a_s + a_n
\end{array}\right.\\[2ex]
\text{termofonte} & \left\{ b_P = 0 \right.
\end{array}\right\} \tag{8.11}$$

As CC podem ser aplicadas com volumes fictícios conforme visto na secção 5.3 do cap.5 (condução de calor 2Dp).
O sistema de equações pentadiagonal, representado pela eq.(8.10), pode ser resolvido com o método de Gauss-Seidel, conforme a eq.(5.19).

8.3 Algoritmo

1- Ler os dados: L_x, L_y, α, funções T_{CC}, funções u(x,y), v(x,y) e N_x e N_y (com fictícios) e I (número de iterações)

2- Discretizar o domínio de cálculo com

$$\Delta x = \frac{L_x}{N_x - 2}; \Delta y = \frac{L_y}{N_y - 2} \tag{8.12}$$

e calcular x_p e y_p

3- Calcular u_w, u_e, v_s e v_n nas faces de cada VC P real

4- Calcular os coeficientes e termos fontes da eq.(8.11) e dos fictícios para as CC

5- Estimar a solução de T_P^0, por exemplo, $T_P = 0$

6- Resolver o sistema de equações (8.10) através do método de Gauss-Seidel (eq. 5.19)

7- Voltar ao item 6 até ser atingido I

8- Pós-processamento

8.4 Modelo matemático do escoamento 2Dp

Considerações:
- escoamento laminar 2Dp;
- fluido incompressível; e
- campo de pressões (p) conhecido.

Eq. de conservação da Quantidade de Movimento Linear na direção x (QML_x)

$$\frac{\partial}{\partial x}(\rho uu) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho vu) = -\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x}\left(\mu \frac{\partial u}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\mu \frac{\partial u}{\partial y}\right) \tag{8.13}$$

Eq. de conservação da Quantidade de Movimento Linear na direção y (QML_y)

$$\frac{\partial}{\partial x}(\rho uv) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho vv) = -\frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial x}\left(\mu \frac{\partial v}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\mu \frac{\partial v}{\partial y}\right) \tag{8.14}$$

onde
ρ = massa específica do fluido;
u,v = componentes do vetor velocidade nas direções x e y;
μ = viscosidade absoluta do fluido.

Condições de contorno (por exemplo):

$$\left.\begin{array}{l} u(0,y) = u(1,y) = u(x,0) = 0 \\ u(x,1) = 16(x^4 - 2x^3 + x^2) \end{array}\right\} \tag{8.15}$$

$$v(0,y) = v(1, y) = v(x,0) = v(x,1)=0 \tag{8.16}$$

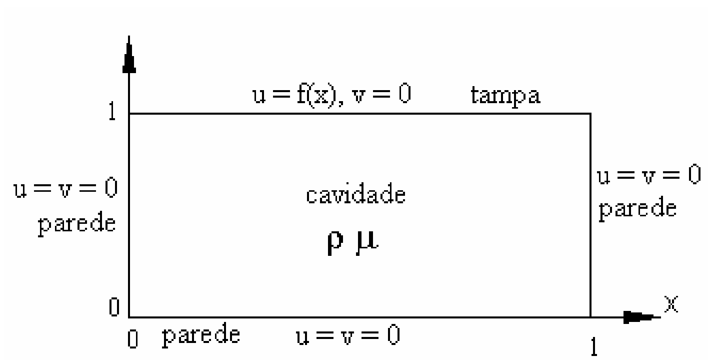

Figura 8.3: Domínio de cálculo e CC do escoamento 2Dp

As eqs.(8.13) e (8.14) podem ser representadas por

$$\frac{\partial}{\partial x}(\rho u \varphi) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho v \varphi) = S^{\varphi} + \frac{\partial}{\partial x}\left(\mu \frac{\partial \varphi}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\mu \frac{\partial \varphi}{\partial y}\right) \tag{8.17}$$

onde

equação	φ	S^{φ}
QMLx	u	$-\partial p/\partial x$
QMLy	v	$-\partial p/\partial y$

Para ρ e μ constantes, a discretização da eq.(8.17) é semelhante às eqs.(8.1) e (7.14).

8.5 Discretização da Quantidade de Movimento Linear 2Dp

A integração da eq. (8.17) sobre o volume de controle (VC) P da fig. 8.2 é dada por:

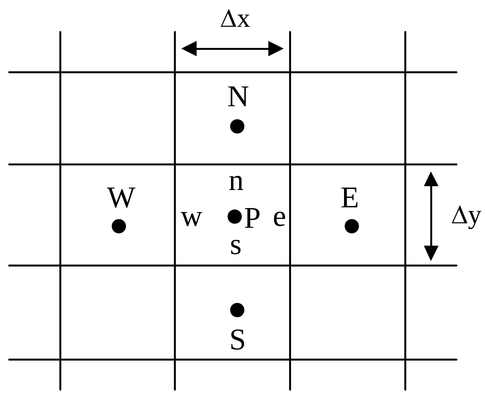

Figura: 8.4: Malha 2D uniforme em cada direção

$$\int_{y_s}^{y_n}\int_{x_w}^{x_e}\left[\frac{\partial}{\partial x}(\rho u\phi)+\frac{\partial}{\partial y}(\rho v\phi)\right]dx\,dydz=\int_{y_s}^{y_n}\int_{x_w}^{x_e}\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\mu\frac{\partial\phi}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\mu\frac{\partial\phi}{\partial y}\right)+S^{\phi}\right]dx\,dydz$$

que resulta em

$$\left[(\rho u\phi)_e-(\rho u\phi)_w\right]\Delta y+\left[(\rho v\phi)_n-(\rho v\phi)_s\right]\Delta x=\left[\left(\mu\frac{\partial\phi}{\partial x}\right)_e-\left(\mu\frac{\partial\phi}{\partial x}\right)_w\right]\Delta y+\left[\left(\mu\frac{\partial\phi}{\partial y}\right)_n-\left(\mu\frac{\partial\phi}{\partial y}\right)_s\right]\Delta x+L\left[S^{\phi}\right]_P\Delta x\Delta y \quad (8.18)$$

onde $L\left[S^{\phi}\right]_P$ representa a aproximação numérica de S^{ϕ} sobre o VC P.

8.6 Algoritmo para Quantidade de Movimento Linear 2Dp

1- Ler os dados: nº de VC em x e y, ρ, μ, CC, I_V (nº de iterações) e I_t (nº de iterações), p(x,y)

2- Inicializar u = v = 0

3- Calcular os coeficientes e termos fontes de u

4- Resolver o sistema de equações de u com Gauss-Seidel por I_V vezes

5- Calcular os coeficientes e termos fontes de v

6- Resolver o sistema de equações de v com Gauss-Seidel por I_V vezes

7- Voltar ao item 3 por I_t vezes

8- Pós-processamento