4.7 DIFUSÃO DE QML 2Dp

PARA UM ESCOAMENTO LAMINAR TRIDIMENSIONAL, PLENAMENTE DESENVOLVIDO, EM REGIME PERMANENTE, FLUIDO INCOMPRESSÍVEL, PROPRIEDADES CONSTANTES, NUM DUTO DE SEÇÃO TRANSVERSAL DO TIPO RETANGULAR, FIG. 4.5, TEM-SE [(WHITE, 1991)]

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{1}{\mu}\frac{dp}{dz} = \text{CONSTANTE} = C \qquad (4.18)$$

ONDE
z = DIREÇÃO LONGITUDINAL DO DUTO
μ = VISCOSIDADE ABSOLUTA DO FLUIDO (CONSTANTE)
p = PRESSÃO ESTÁTICA DO FLUIDO
u = VELOCIDADE DO FLUIDO NA DIREÇÃO z (nas direções x e y, as componentes v e w da velocidade são nulas)

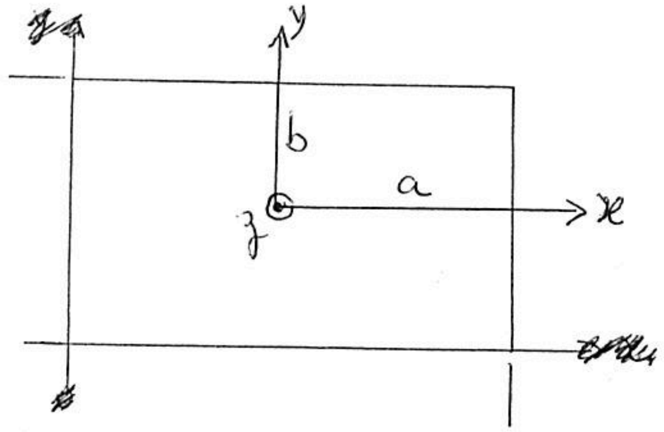

FIGURA 4.5 ESCOAMENTO 2D NUM DUTO RETANGULAR

O DOMÍNIO DE CÁLCULO É $-a \le x \le a$ E $-b \le y \le b$.

AS CONDIÇÕES DE CONTORNO SÃO DO TIPO DIRICHLET EM TODOS OS 4 CONTORNOS:

$$u(-a, y) = u(a, y) = u(x, -b) = u(x, b) = 0 \qquad (4.19)$$

AS VARIÁVEIS DE INTERESSE SÃO:

- u, DA EQ. (4.18), VARIÁVEL DEPENDENTE, PRIMÁRIA
- $\bar{u}$, VELOCIDADE MÉDIA (VARIÁVEL SECUNDÁRIA, GLOBAL), DEFINIDA POR

$$\bar{u} = \frac{1}{4ab}\int_{-b}^{b}\int_{-a}^{a} u\,dx\,dy \qquad (4.20)$$

CFD-I / GP.4 (9)

13 Out

~~4.7.1~~ 4.7.1 SOLUÇÃO ANALÍTICA

A SOLUÇÃO ANALÍTICA DAS EQS. (4.18) A (4.20) É

$$u = -\frac{16a^2}{\mu \pi^3}\left(\frac{dp}{dz}\right)\sum_{i=1,3,5,\dots}^{\infty}(-1)^{(i-1)/2}\left[1-\frac{\cosh(i\pi y/2a)}{\cosh(i\pi b/2a)}\right]\left[\frac{\cos(i\pi x/2a)}{i^3}\right] \quad (4.21)$$

$$\bar{u} = \frac{-a^2}{3\mu}\left(\frac{dp}{dz}\right)\left[1-\frac{192a}{\pi^5 b}\sum_{i=1,3,5,\dots}^{\infty}\frac{\tanh(i\pi b/2a)}{i^5}\right] \quad (4.22)$$

4.7.2 SOLUÇÃO NUMÉRICA

$$\int_{y_s}^{y_n}\int_{x_w}^{x_e}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)dx\,dy = \int_{y_s}^{y_n}\int_{x_w}^{x_e}\overbrace{\frac{1}{\mu}\frac{dp}{dz}}^{C}dx\,dy \quad (4.23)$$

Para malha uniforme em cada direção, tem-se

$$\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_e-\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_w\right]\Delta y+\left[\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_n-\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_s\right]\Delta x = \overbrace{\frac{1}{\mu}\frac{dp}{dz}}^{C}\Delta x\Delta y$$

com CDS

$$\left[\frac{(u_E-u_P)}{\Delta x}-\frac{(u_P-u_W)}{\Delta x}\right]\Delta y+\left[\frac{(u_N-u_P)}{\Delta y}-\frac{(u_P-u_S)}{\Delta y}\right]\Delta x = \overbrace{\frac{1}{\mu}\frac{dp}{dz}}^{C}\Delta x\Delta y \quad \div \Delta x\Delta y$$

$$\frac{(u_E+u_W-2u_P)}{\Delta x^2}+\frac{(u_N+u_S-2u_P)}{\Delta y^2} = \overbrace{\frac{1}{\mu}\frac{dp}{dz}}^{C} \quad \text{ou}$$

$$\boxed{a_P u_P = a_w u_W + a_e u_E + a_s u_S + a_n u_N + b_P} \quad (4.24)$$

onde

$$a_w = a_e = \frac{1}{\Delta x^2} \qquad a_s = a_n = \frac{1}{\Delta y^2}$$

$$a_P = \frac{2}{\Delta x^2}+\frac{2}{\Delta y^2} \qquad b_P = -\frac{1}{\mu}\frac{dp}{dz} = -C$$

(4.25) volumes ~~internos~~ reais