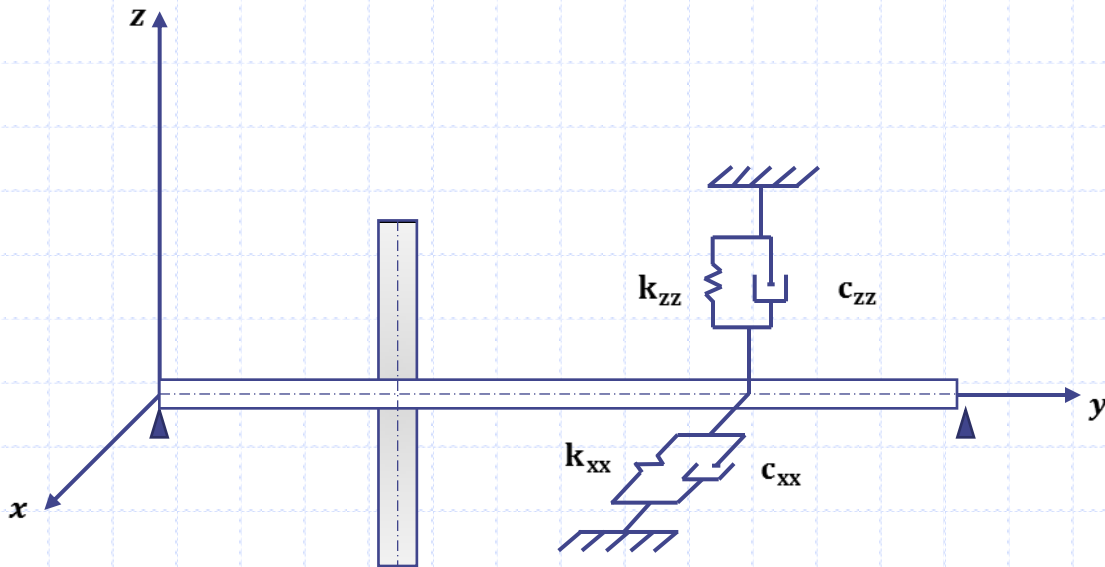




2. SISTEMAS GIRANTES

◆ Introdução – Sistemas girantes

Elementos que compõem um sistema girante.



Os elementos básicos de um rotor são o disco, o eixo, o mancal e o acoplamento.

◆ Introdução - Elementos de um rotor

- A massa desbalanceada não pode ser na prática completamente eliminada e deve ser sempre considerada.
- As expressões da energia cinética serão introduzidas para caracterizar o disco, o eixo e a massa desbalanceada.
- A energia potencial é necessária para caracterizar, principalmente, o eixo.
- As forças aplicadas sobre os mancais e acoplamentos são usadas para calcular os trabalhos virtuais. Desta forma é possível obter os coeficientes de rigidez e amortecimento destes elementos.

◆ Equações de Lagrange - Elementos de um rotor

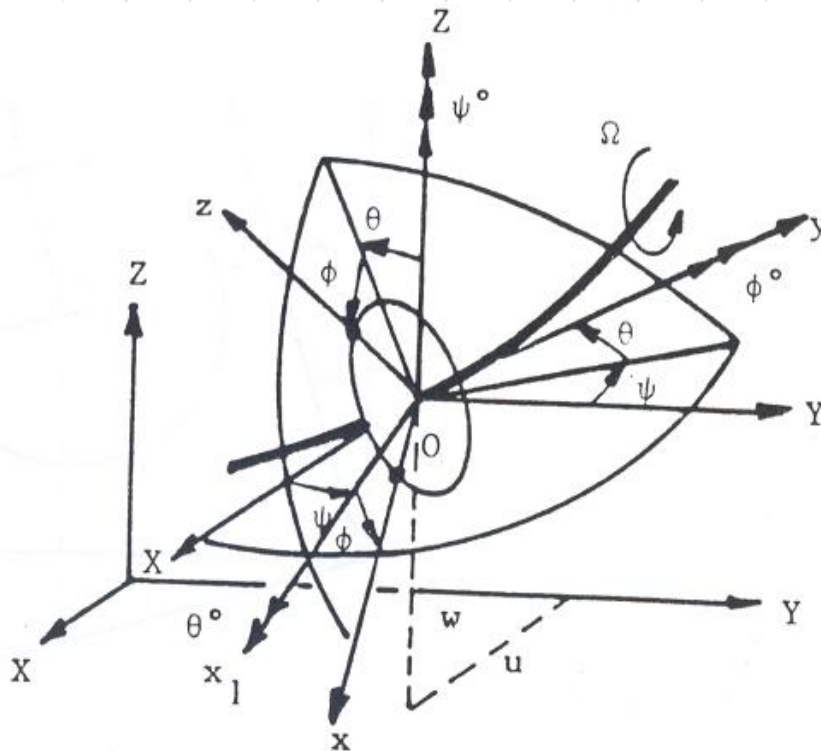
A equação geral de movimento de um rotor é obtida através da:

- Definição da energia cinética T , da energia potencial U e do trabalho virtual de forças externas de cada elemento que o compõe;
- Escolha de um método numérico: método dos modos assumidos, matriz de transferência ou o método de elementos finitos para aplicações em geral em engenharia;
- Após isto se aplicam as equações de Lagrange para achar a equação de movimento;

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} + \frac{\partial U}{\partial q_i} = F_{q_i}$$

◆ Equações de Lagrange - Disco

O disco é assumido totalmente rígido e portanto caracterizado somente pela energia cinética. $R_o(XYZ)$ é uma referencia inercial e $R(xyz)$ é um sistema móvel fixo no disco. As coordenadas do sistema xyz se relacionam com as coordenadas do sistema XYZ através dos ângulos de Euler ψ , θ e ϕ .



Sistema de referência para um disco sobre um eixo flexível em rotação

◆ Equações de Lagrange - Disco

O vetor de velocidade angular instantâneo a partir da referência xyz é;

$$\omega_{R/R_0} = \dot{\psi} z + \dot{\theta} x_1 + \dot{\phi} y$$

Onde, z , x_1 e y são os vetores unitários ao longo do eixo Z , x_1 e y .

A energia cinética do disco sobre o centro de massa O é calculada usando a referência R . Neste sistema, o vetor velocidade angular torna-se;

$$\omega_{R/R_0}^R = \begin{bmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\dot{\psi} \cos \theta \sin \phi + \dot{\theta} \cos \phi \\ \dot{\phi} + \dot{\psi} \sin \theta \\ \dot{\psi} \cos \theta \cos \phi + \dot{\theta} \sin \phi \end{bmatrix}$$

◆ Equações de Lagrange - Disco

Definindo u e w as coordenadas de deslocamento de O em R_o sobre x e z , respectivamente, e considere-se a coordenada ao longo de y constante. Ainda, se a massa do disco é M_D , o tensor da inércia em O com xyz como direções principais da inércia é dado por;

$$I_{/O} = \begin{bmatrix} I_{Dx} & 0 & 0 \\ 0 & I_{Dy} & 0 \\ 0 & 0 & I_{Dz} \end{bmatrix}$$

A expressão da energia cinética do disco é:

$$T_D = \frac{1}{2} M_D (\dot{u}^2 + \dot{w}^2) + \frac{1}{2} (I_{Dx} \omega_x^2 + I_{Dy} \omega_y^2 + I_{Dz} \omega_z^2)$$

◆ Equações de Lagrange - Disco

A expressão anterior pode ser simplificada considerando que o disco é simétrico ($I_{Dx} = I_{Dz}$), os ângulos θ e ψ são pequenos, e a velocidade angular é constante; isto é, $\dot{\phi} = \Omega$

$$T_D = \frac{1}{2} M_D (\dot{u}^2 + \dot{w}^2) + \frac{1}{2} I_{Dx} (\dot{\theta}^2 + \dot{\psi}^2) + \frac{1}{2} I_{Dy} (\Omega^2 + 2\Omega\dot{\psi}\theta)$$

Nota-se que o termo $\frac{1}{2} I_{Dy} \Omega^2$ não tem nenhuma influencia nas equações de Lagrange e representa a energia cinética do disco girando a Ω , todos os outros deslocamentos são zero. O último termo, $I_{Dy} \Omega \dot{\psi} \theta$, representa T1, o efeito giroscópio (associado com a aceleração de Coriolis).

◆ Equações de Lagrange - Eixo

O eixo é representado como uma viga com uma seção transversal circular, e caracterizado pelas energias de deformação elástica e cinética.

Energia Cinética do eixo:

A formulação geral da energia cinética do eixo é uma extensão da equação do disco, equação. Para um elemento de comprimento L , a expressão para a energia cinética é:

$$T_s = \frac{\rho S}{2} \int_0^L (\dot{u}^2 + \dot{w}^2) dy + \frac{\rho I}{2} \int_0^L (\dot{\theta}^2 + \dot{\psi}^2) dy + \rho I L \Omega^2 + 2\rho I \Omega \int_0^L \psi \theta dy$$

onde ρ é a massa por unidade de volume, S é a área da seção transversal da viga, supondo esta constante, e I é a área do momento de inércia da seção transversal da viga ao redor do eixo neutro, também considerado constante.

◆ Equações de Lagrange - Eixo

- A primeira integral da equação para a energia cinética do disco é a expressão clássica para a energia cinética da viga em flexão;
- A segunda integral é o efeito secundário da rotação inercial (viga Timoshenko);
- O termo $\rho/L\Omega^2$ é uma constante e não tem influencia sobre a equação de Lagrange e
- A última integral representa o efeito giroscópio.

◆ Equações de Lagrange - Eixo

Energia Potencial Elástica:

Definindo:

C: centro geométrico da viga.

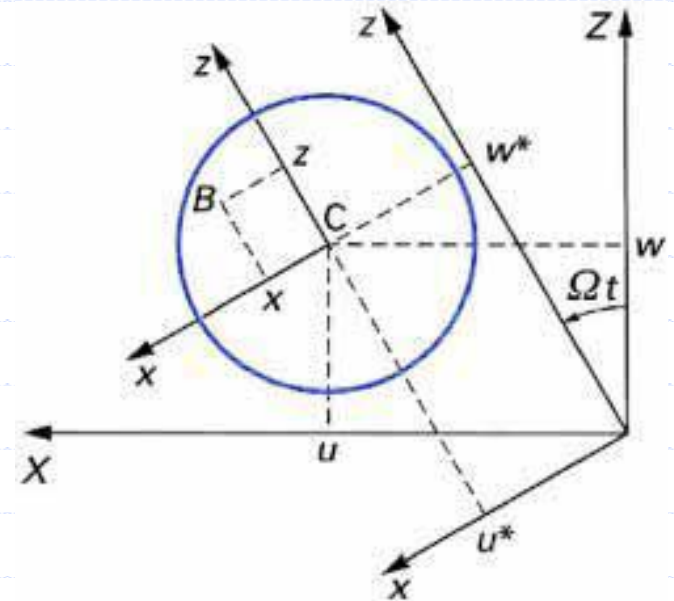
B(x,y): um ponto arbitrário sobre a seção transversal.

E: módulo de Young de um material.

ε e σ : deformação e tensão.

u* e **w***: deslocamentos do centro geométrico com respeito aos eixos x e z , respectivamente.

Coordenadas do centro geométrico e um ponto arbitrário B sobre o eixo



◆ Equações de Lagrange - Eixo

Se os termos de segunda ordem são incluídos, a deformação longitudinal do ponto B pode ser representada por;

$$\varepsilon = -x \frac{\partial^2 u^*}{\partial y^2} - z \frac{\partial^2 w^*}{\partial y^2} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u^*}{\partial y} \right)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w^*}{\partial y} \right)^2$$

ou

$$\varepsilon = \varepsilon_1 + \varepsilon_{n1}$$

ε_1 contém o termo linear e ε_{n1} o termo não linear.

◆ Equações de Lagrange - Eixo

A energia de deformação elástica é dada por:

$$U_1 = \frac{1}{2} \int_{\tau} \varepsilon^T \sigma d\tau$$

T é o símbolo que representa a transposta de uma matriz

A relação entre tensão e deformação será $\sigma = E\varepsilon$

Assim,
$$U_1 = \frac{E}{2} \int_{\tau} \left(\varepsilon_1^2 + 2\varepsilon_1 \varepsilon_{n1} + \varepsilon_{n1}^2 \right) d\tau$$

◆ Equações de Lagrange - Eixo

A simetria da seção transversal da viga com respeito x e z leva a:

$$\int_{\tau} \varepsilon_{n1} \varepsilon_1 d\tau = 0$$

Além disso, o terceiro termo da integral na equação da energia potencial do eixo é de segunda ordem e será desprezado.

A energia de deformação elástica é:

$$U_1 = \frac{E}{2} \int_0^L \int_S \left(-x \frac{\partial^2 u^*}{\partial y^2} \frac{\partial^2 w^*}{\partial y^2} \right)^2 dS dy$$

$$U_1 = \frac{E}{2} \int_0^L \int_S \left[x^2 \left(\frac{\partial^2 u^*}{\partial y^2} \right)^2 + z^2 \left(\frac{\partial^2 w^*}{\partial y^2} \right)^2 + 2xz \frac{\partial^2 u^*}{\partial y^2} \frac{\partial^2 w^*}{\partial y^2} \right] dS dy$$

Devido a simetria, a integral do terceiro termo na equação acima é nula.

◆ Equações de Lagrange - Eixo

Introduzindo o momento de segunda de área da seção transversal em relação a x e z tem-se:

$$I_x = \int_S z^2 dS$$

$$I_z = \int_S x^2 dS$$

A expressão da energia potencial elástica é então:

$$U_1 = \frac{E}{2} \int_0^L \left[I_z \left(\frac{\partial^2 u^*}{\partial y^2} \right)^2 + I_x \left(\frac{\partial^2 w^*}{\partial y^2} \right)^2 \right] dy$$

◆ Equações de Lagrange - Eixo

Se o eixo é submetido para uma força axial constante F_o , então uma segunda contribuição da energia elástica do eixo é dada por;

$$U_2 = \int_0^L \frac{F_o}{S} (\varepsilon_1 + \varepsilon_{n1}) d\tau$$

Devido à simetria, o primeiro termo da integral acima desaparecerá sobre toda a área da seção transversal, e assim, usando as equações de deformação no eixo:

$$U_2 = \frac{F_o}{2} \int_0^L \left[\left(\frac{\partial u^*}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial w^*}{\partial y} \right)^2 \right] dy$$

◆ Equações de Lagrange - Eixo

A energia de deformação combinada, $U_1 + U_2$, é então:

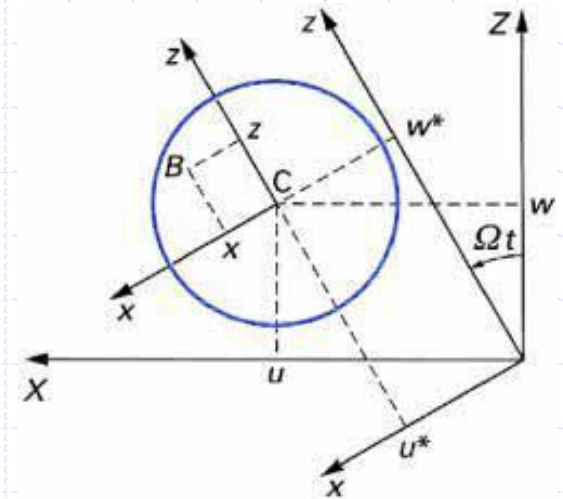
$$U_S = \frac{E}{2} \int_0^L \left[I_z \left(\frac{\partial^2 u^*}{\partial y^2} \right)^2 + I_x \left(\frac{\partial^2 w^*}{\partial y^2} \right)^2 \right] dy + \frac{F_0}{2} \int_0^L \left[\left(\frac{\partial u^*}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial w^*}{\partial y} \right)^2 \right] dy$$

Para evitar explicitamente os termos periódicos como uma função no tempo, é necessário expressar a energia de deformação como uma função de u e w , componentes de deslocamento em R_0 .

Assim, usando

$$u^* = u \cos \Omega t - w \sin \Omega t$$

$$w^* = u \sin \Omega t + w \cos \Omega t$$



o que pode ser deduzido da figura ao lado.

◆ Equações de Lagrange - Eixo

Assim, a equação da energia potencial toma a forma:

$$U_s = \frac{E}{2} \int_0^L \left[I_z \left(\cos \Omega t \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \sin \Omega t \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)^2 + I_x \left(\sin \Omega t \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \cos \Omega t \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)^2 \right] dy + \frac{F_o}{2} \int_0^L \left[\left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \right] dy$$

Finalmente, para a maioria dos casos onde o eixo simétrico (isto é, $I_x = I_z = I$), a energia de deformação torna-se;

$$U_s = \frac{EI}{2} \int_0^L \left[\left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right)^2 + \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)^2 \right] dy + \frac{F_o}{2} \int_0^L \left[\left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \right] dy$$

◆ Equações de Lagrange – Mancais e acoplamentos

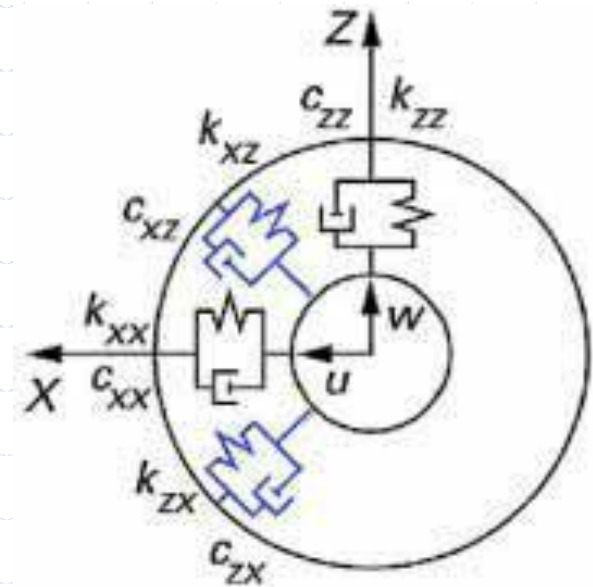
Os termos de rigidez e amortecimento viscoso são assumidos conhecidos, e a influencia de flexão pode ser em geral desconsiderada. O trabalho virtual δW da força agindo sobre o eixo pode ser escrito como

$$\delta W = -k_{xx}u\delta u - k_{xz}w\delta u - k_{zx}u\delta w - k_{zz}w\delta w - c_{xx}\dot{u}\delta u - c_{xz}\dot{w}\delta u - c_{zx}\dot{u}\delta w - c_{zz}\dot{w}\delta w$$

ou

$$\delta W = F_u \delta u + F_w \delta w$$

onde F_u e F_w são as componentes das forças generalizadas



◆ Equações de Lagrange – Mancais e acoplamentos

Em forma matricial:

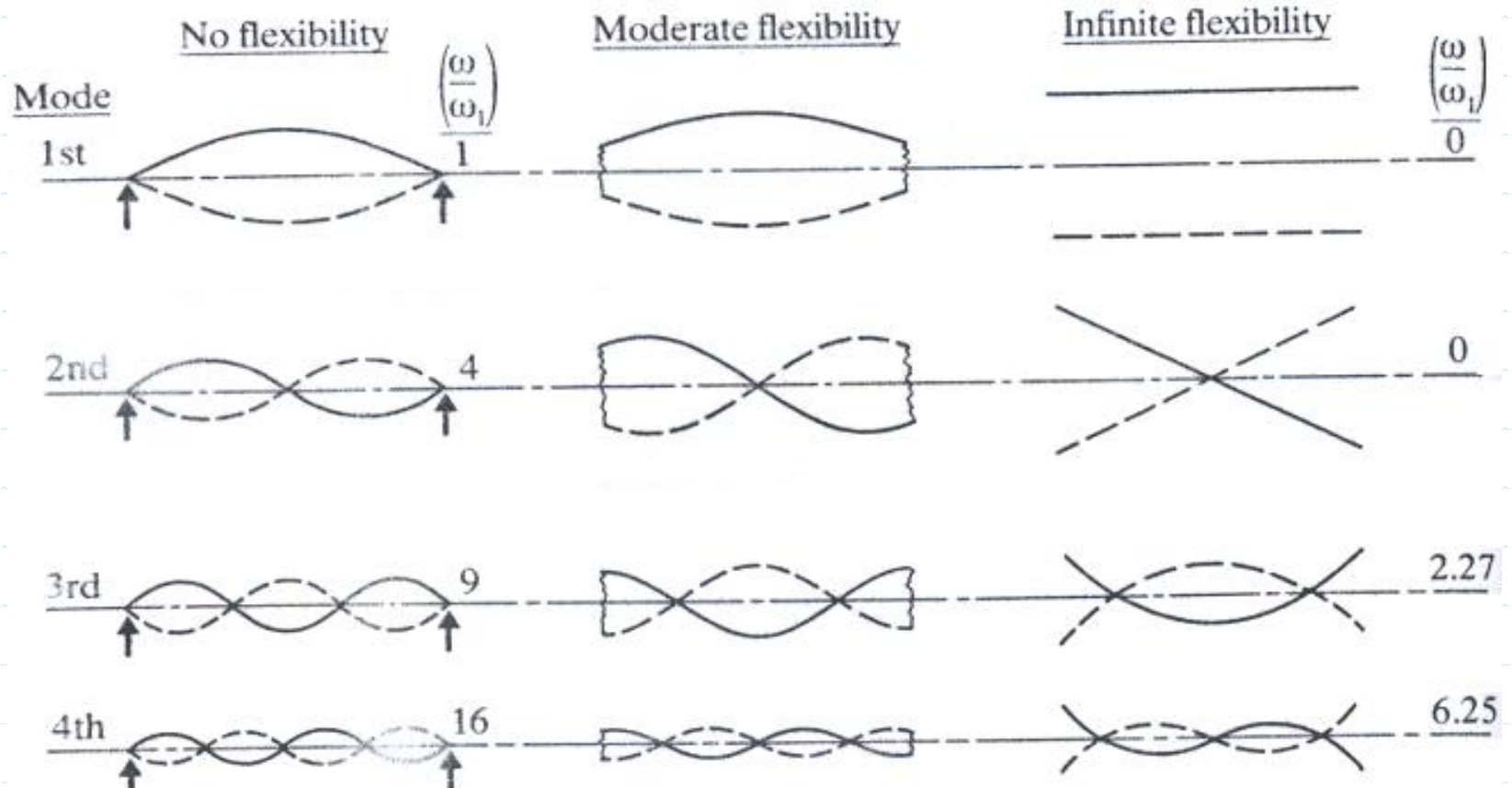
$$\begin{bmatrix} F_u \\ F_w \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} k_{xx} & k_{xz} \\ k_{zx} & k_{zz} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ w \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} c_{xx} & c_{xz} \\ c_{zx} & c_{zz} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{u} \\ \dot{w} \end{bmatrix}$$

Frequentemente $k_{xx} \neq k_{zz}$ e $c_{xx} \neq c_{zz}$ e também é muito comum que $k_{xz} \neq k_{zx}$ e $c_{xz} \neq c_{zx}$.

Nota: Poderíamos considerar as rigidezes dos mancais na energia potencial do sistema.

◆ Modelo do Mancal

Comparações de formas modais para um rotor simples



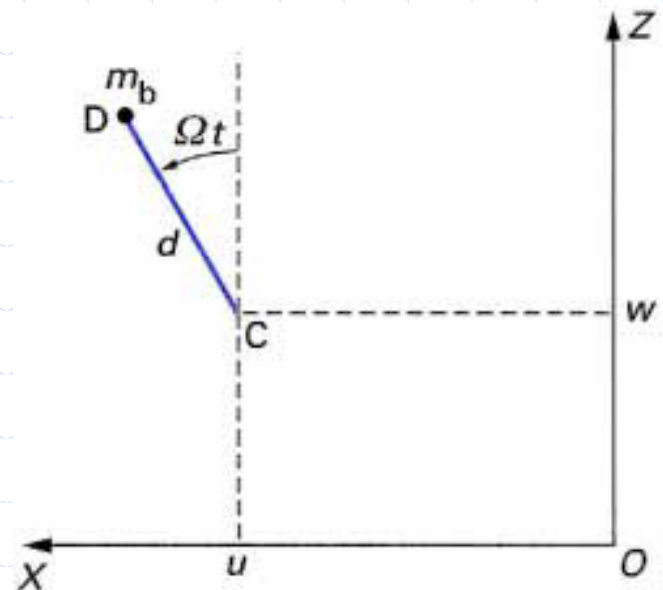
◆ Equações de Lagrange – Desbalanceamento

O desbalanceamento é definido por uma massa m_u situada a uma distancia d do centro geométrico do eixo e sua energia cinética será definida por T_u . A massa se encontra em um plano perpendicular ao eixo y e sua coordenada ao longo do eixo y é uma constante.

Em R_o as coordenadas da massa são:

$$OD = \begin{vmatrix} u + d \sin \Omega t \\ \text{constante} \\ w + d \cos \Omega t \end{vmatrix}$$

Massa desbalanceada



◆ Equações de Lagrange – Desbalanceamento

Então:

$$V = \frac{dOD}{dt} = \begin{vmatrix} \dot{u} + d \Omega \cos \Omega t \\ 0 \\ \dot{w} - d \Omega \sin \Omega t \end{vmatrix}$$

A energia cinética da massa é:

$$T_u = \frac{m_u}{2} \left(\dot{u}^2 + \dot{w}^2 + \Omega^2 d^2 + 2\Omega d \dot{u} \cos \Omega t - 2\Omega \dot{w} d \sin \Omega t \right)$$

O termo $m_u \Omega^2 d^2 / 2$ é uma constante e não tem nenhuma influencia sobre a equação de Lagrange.

◆ Equações de Lagrange – Desbalanceamento

A massa m_u é muito menor que a massa do rotor, assim a expressão para a energia cinética pode ser escrita como:

$$T_u \simeq m_u \Omega d (\dot{u} \cos \Omega t - \dot{w} \sin \Omega t)$$

Uma vez aplicada a equação de Lagrange, é possível achar o vetor força centrífuga.



2. SISTEMAS GIRANTES

DOIS GRAUS DE LIBERDADE

MODOS ASSUMIDOS

◆ Modelos Simples: Fenômenos Básicos

-O objetivo deste capítulo é mostrar os principais fenômenos básicos que ocorrem em rotores dinâmicos, através de um exemplo simples porém realístico.

-O método numérico utilizado neste capítulo é o método dos assumidos

-Serão estudados dois tipos de rotores:

- isotrópico;
- anisotrópico.

Após isto, o efeito de instabilidades será mostrado e, por último, a influência do amortecimento sobre o comportamento dos rotores é brevemente apresentado.

◆ Modelos Simples: Fenômenos Básicos

Os principais fenômenos básicos são:

- Frequências naturais como uma função da velocidade de rotação, diagrama de Campbell e estabilidade;
- Os efeitos das forças de excitação do tipo:
 - massa desbalanceada,
 - forças não sincrônicas e
 - forças harmônicas externas.

◆ Modelos Simples: Determinação do Modelo

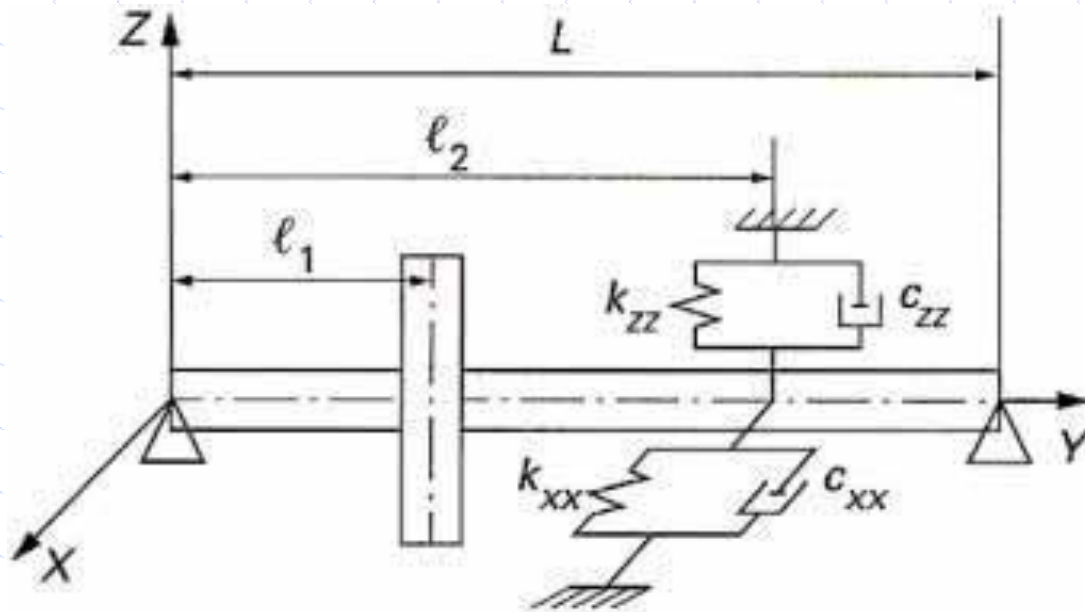
Para simplificar o cálculo somente um grau de liberdade é usado para o deslocamento em X e outro na direção Z . O rotor é então suspenso por suportes simples em ambos extremos.

O exemplo consiste em:

- Um eixo simétrico de comprimento L ;
- Um disco simétrico com uma massa desbalanceada, situado em $y=l_1$;
- Um mancal situado em $y=l_2$.

◆ Modelos Simples: Determinação do Modelo

Modelo de um rotor simples:



◆ Modelos Simples: Determinação do Modelo

- Dependendo das características usadas para o mancal, o rotor será denominado isotrópico e anisotrópico. As forças externas são aplicadas em $y=l_1$.
- As expressões para os deslocamentos nas direções x e y são, respectivamente:

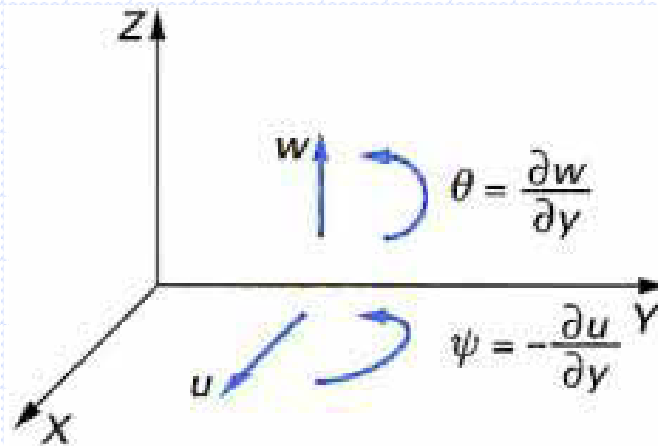
$$u(y,t) = f(y)q_1(t) = f(y)q_1$$

$$w(y,t) = f(y)q_2(t) = f(y)q_2$$

Onde $f(y)$ é o modo assumido, obtido da teoria de dinâmica do contínuo para uma viga simplesmente apoiada, e q_1 e q_2 são coordenadas generalizadas.

◆ Modelos Simples: Determinação do Modelo

Considerando uma viga fina os deslocamentos angulares ψ e θ podem ser obtidos a partir da variação dos deslocamentos em x e z , respectivamente:



◆ Modelos Simples: Determinação do Modelo

Assim, ψ e θ podem ser aproximados por:

$$\theta = \frac{\partial w}{\partial y} = \frac{d f(y)}{d y} q_2 = g(y) q_2$$

$$\psi = -\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{d f(y)}{d y} q_1 = -g(y) q_1$$

◆ Modelos Simples: Determinação do Modelo

As derivadas de segunda ordem de u e w são necessárias para expressar a energia de flexão. Suas expressões são

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{d^2 f(y)}{d y^2} q_1 = h(y) q_1$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = \frac{d^2 f(y)}{d y^2} q_2 = h(y) q_2$$

◆ Modelos Simples: O Disco

A energia cinética do disco, T_D , é obtida através das expressões para os deslocamentos nas direções x e y e da formulação de energia cinética:

$$T_D = \frac{1}{2} M_D \left(\left(\frac{\partial(u(y,t))}{\partial t} \right)^2 + \left(\frac{\partial(w(y,t))}{\partial t} \right)^2 \right) + \frac{1}{2} I_{Dx} \left(\left(\frac{\partial(\partial u(y,t)/\partial y)}{\partial t} \right)^2 + \left(\frac{\partial(\partial w(y,t)/\partial y)}{\partial t} \right)^2 \right) - I_{Dy} \Omega \left(\frac{\partial(\partial u(y,t)/\partial y)}{\partial t} \right) \partial w(y,t)/\partial y$$

Que resulta em:

$$T_D = \frac{1}{2} \left[M_D f^2(l_1) + I_{Dx} g^2(l_1) \right] (\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2) - I_{Dy} \Omega g^2(l_1) \dot{q}_1 q_2$$

◆ Modelos Simples: O Disco

A energia cinética do eixo, T_s , é obtida através das expressões para os deslocamentos nas direções x e y e da formulação de energia cinética:

$$T_s = \frac{\rho S}{2} \int_0^L (\dot{u}^2 + \dot{w}^2) dy + \frac{\rho I}{2} \int_0^L (\dot{\theta}^2 + \dot{\psi}^2) dy + \rho I L \Omega^2 + 2\rho I \Omega \int_0^L \psi \theta dy$$

Resultando em

$$T_s = \frac{\rho S}{2} \int_0^L f^2(y) dy (\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2) + \frac{\rho I}{2} \int_0^L g^2(y) dy (\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2) - 2\rho I \Omega \int_0^L g^2(y) dy \dot{q}_1 q_2$$

◆ Modelos Simples: O Disco

Assim, a energia cinética T do conjunto disco-eixo é

$$T = T_D + T_S$$

$$T = \frac{1}{2} \left[M_D f^2(l_1) + I_{Dx} g^2(l_1) + \rho S \int_0^L f^2(y) dy + \rho I \int_0^L g^2(y) dy \right] (\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2) - \Omega \left[I_{Dy} g^2(l_1) + 2\rho I \int_0^L g^2(y) dy \right] \dot{q}_1 q_2$$

$$T = \frac{1}{2} \dot{m} (\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2) - \Omega a \dot{q}_1 q_2$$

◆ Modelos Simples: O Eixo

A energia de deformação do eixo, U_s , pode ser determinada a partir da equação:

$$U_s = \frac{EI}{2} \int_0^L \left[\left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right)^2 + \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)^2 \right] dy + \frac{F_o}{2} \int_0^L \left[\left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \right] dy + \frac{1}{2} k_{xx} u(y_k, t)^2 + \frac{1}{2} k_{zz} w(y_k, t)^2$$

$$U_s = \frac{EI}{2} \int_L h^2(y) dy (q_1^2 + q_2^2) + \frac{1}{2} k_{xx} f(y_k)^2 q_1^2 + \frac{1}{2} k_{zz} f(y_k)^2 q_2^2$$

Influencia de rigidezes concentradas

$$U_s = \frac{1}{2} \bar{k} (q_1^2 + q_2^2) + \frac{1}{2} \bar{k}_{xx} q_1^2 + \frac{1}{2} \bar{k}_{zz} q_2^2$$

◆ Modelos Simples: O Mancal

O trabalho virtual feito pelas forças de reação devido ao mancal agindo sobre o eixo é dado por:

$$\begin{aligned}\delta W = & -k_{xx}u(l_2)\delta u(l_2) - k_{xz}w(l_2)\delta u(l_2) - k_{zz}w(l_2)\delta w(l_2) \\ & -k_{zx}u(l_2)\delta w(l_2) - c_{xx}\dot{u}(l_2)\delta u(l_2) - c_{xz}\dot{w}(l_2)\delta u(l_2) \\ & -c_{zz}\dot{w}(l_2)\delta w(l_2) - c_{zx}\dot{u}(l_2)\delta w(l_2)\end{aligned}$$

Resultando em:

$$\begin{aligned}\delta W = & -k_{xx}f^2(l_2)q_1\delta q_1 - k_{xz}f^2(l_2)q_2\delta q_1 - k_{zz}f^2(l_2)q_2\delta q_2 \\ & -k_{zx}f^2(l_2)q_1\delta q_2 - c_{xx}f^2(l_2)\dot{q}_1\delta q_1 - c_{xz}f^2(l_2)\dot{q}_2\delta q_1 \\ & -c_{zz}f^2(l_2)\dot{q}_2\delta q_2 - c_{zx}f^2(l_2)\dot{q}_1\delta q_2\end{aligned}$$

◆ Modelos Simples: O Mancal

Como

$$\delta W = Fq_1 \delta q_1 + Fq_2 \delta q_2$$

Através de uma simples identificação nas expressões acima é possível achar as componentes Fq_1 e Fq_2 das forças generalizadas agindo sobre o eixo.

◆ Modelos Simples: Massa Desbalanceada

Da equação da energia cinética para desbalanceamento dada por

$$T_u \simeq m_u \Omega d (\dot{u} \cos \Omega t - \dot{w} \sin \Omega t)$$

É possível achar a equação equivalente usando modos assumidos

$$T_u = m_u \Omega^2 d f(l_1) (\dot{q}_1 \cos \Omega t - \dot{q}_2 \sin \Omega t)$$

◆ Modelos Simples: Forças externas

As duas componentes das forças externas são definidas por

$$F_u = F_1(t) \qquad F_w = F_2(t)$$

e como esta atua em $y = l_3$

$$\delta W = F_1(t) \delta u(l_3) + F_2(t) \delta w(l_3)$$

que pode ser escrito como

$$\delta W = F_1(t) f(l_3) \delta q_1 + F_2(t) f(l_3) \delta q_2$$

◆ Modelos Simples: Dados Disco

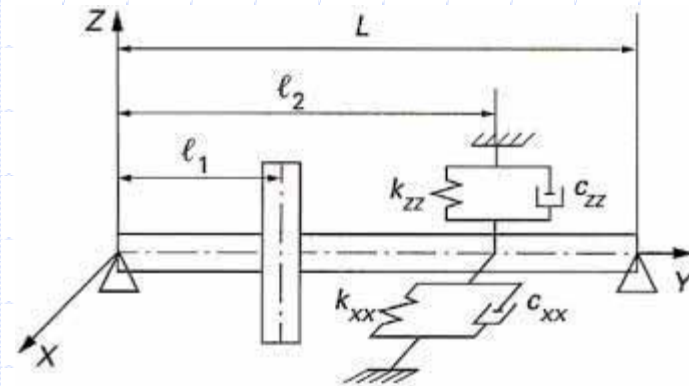
Raio interno $R_1 = 0,01$ m

Raio externo $R_2 = 0,15$ m

Espessura $h = 0,03$ m

$\rho = 7800$ kg/m³

$l_1 = L/3$



Com os quais podem ser obtidos os seguintes valores do disco M_D , $I_{Dx} = I_{Dz}$ e I_{Dy} . Estas quantidades são

$$M_D = \pi(R_2^2 - R_1^2)h\rho = 16,47 \text{ kg}$$

◆ Modelos Simples: Dados Disco

$$I_{Dx} = I_{Dz} = \frac{M_D}{12} (3R_1^2 + 3R_2^2 + h^2)$$
$$= 9,427 \times 10^{-2} \text{ kgm}^2$$

$$I_{Dy} = \frac{M_D}{2} (R_1^2 + R_2^2) = 0,1861 \text{ kg m}^2$$

◆ Modelos Simples: Dados Eixo

Comprimento $L = 0,4 \text{ m}$

Raio da seção transversal $R_1 = 0,01 \text{ m}$

$\rho = 7800 \text{ kg/m}^3$

$E = 2 \times 10^{11} \text{ N/m}^2$

A área, S , e o momento de segunda ordem de área, I , são

$$S = \pi R_1^2 = 3,142 \times 10^{-4} \text{ m}^2$$

$$I = \frac{\pi R_1^4}{4} = 7,854 \times 10^{-9} \text{ m}^4$$

◆ Modelos Simples: Dados de Desbalanceamento

Massa $m_u = 10^{-4}$ kg

Distância $d = R_2 = 0,15$ m

◆ Modelos Simples: Dados do Mancal Interno

- Os mancais podem ser modelados facilmente através de uma mola atuando sobre a parte externa do anel do rolamento e uma massa ligada ao eixo. Neste exemplo, os mancais são considerados infinitamente rígidos.
- O mancal interno será usado para criar ou não anisotropia no rotor. Assim, em um primeiro momento este não será considerado e em um segundo momento existirá uma rigidez k_{zz} agindo sobre o rotor. A mola está situada em $l_2 = 2L/3$ e a sua rigidez é $k_{zz} = 5 \times 10^5$ N/m. Em ambos casos o valor de $k_{xx} = 0$.

Usando o conceito de trabalho virtual para o mancal

$$\delta W = -5 \times 10^5 f^2 (2L/3) q_2 \delta q_2$$

$$\bar{k}_{zz} = 5 \times 10^5 f^2 (2L/3)$$

◆ Modelos Simples: Modo Assumido

O modo assumido é a primeira forma modal exata de uma viga com seção transversal constante sujeita a flexão, simplesmente apoiada nos dois extremos, isto é

$$f(y) = \sin \frac{\pi y}{L} = \sin \frac{\pi y}{0,4}$$

Então:

$$g(y) = \frac{\pi}{L} \cos \frac{\pi y}{L} = \frac{\pi}{0,4} \cos \frac{\pi y}{0,4}$$

$$h(y) = -\left(\frac{\pi}{L}\right)^2 \sin \frac{\pi y}{L} = -\left(\frac{\pi}{0,4}\right)^2 \sin \frac{\pi y}{0,4}$$

◆ Modelos Simples: Energia Cinética

A energia cinética do disco, T_D , é

$$T_D = 6,175(\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2) + 0,7269(\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2) - 2,871\Omega \dot{q}_1 q_2$$

Ou agrupando:

$$T_D = 6,902(\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2) - 2,870\Omega \dot{q}_1 q_2$$

◆ Modelos Simples: Energia Cinética

A energia cinética do eixo, T_s , é obtida através de :

$$\int_0^L f^2(y)dy = \int_0^{0,4} \sin^2 \frac{\pi y}{0,4} dy = 0,2m$$

$$\int_0^L g^2(y)dy = \left(\frac{\pi}{0,4}\right)^2 \int_0^{0,4} \cos^2 \frac{\pi y}{0,4} dy = 12,34m^{-1}$$

Portanto:

$$T_s = 0,2450(\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2) + 3,779 \times 10^{-4}(\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2) - 1,512 \times 10^{-3} \Omega \dot{q}_1 q_2$$

◆ Modelos Simples: Energia Cinética

O qual leva a:

$$T_s = 0,2455(\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2) - 1,512 \times 10^{-3} \Omega \dot{q}_1 q_2$$

A energia cinética da massa desbalanceada, T_u , é dada pela eq.19, e

$$T_u = 1,299 \times 10^{-5} \Omega (\cos \Omega t \dot{q}_1 - \sin \Omega t \dot{q}_2)$$

◆ Modelos Simples: Energia Cinética

A energia cinética do sistema é

$$T = T_D + T_s + T_u$$

ou

$$T = 7,147(\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2) - 2,871\Omega \dot{q}_1 q_2 + 1,299 \times 10^{-5} \Omega (\cos \Omega t \dot{q}_1 - \sin \Omega t \dot{q}_2)$$

$$m = 14,29$$

$$a = 2,871$$

◆ Modelos Simples: Energia de Deformação

A energia de deformação é obtida através de

$$\int_0^L h^2(y) dy = \int_0^{0,4} \left(\frac{\pi}{0,4} \right)^4 \sin^2 \frac{\pi y}{0,4} dy = 7,610 \times 10^2 m^{-3}$$

Então

$$U_s = 5,977 \times 10^5 (q_1^2 + q_2^2)$$

$$k = 1,195 \times 10^6$$

◆ Modelos Simples: Forças Devidas à Rigidez k_{xx} e k_{zz}

As rigidezes internas, no espaço modal, quando requeridas valem

$$\delta W = -3,75 \times 10^5 q_2 \delta q_2$$

ou

$$Fq_1 = 0$$

$$Fq_2 = -3,75 \times 10^5 q_2$$

◆ Modelos Simples: Equação do Rotor

Devido a que temos dois graus de liberdade (q_1 e q_2), as duas equações do rotor são obtidas através das Equações de Lagrange. Assim:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_1} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_1} + \frac{\partial U}{\partial q_1} = Fq_1$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_2} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_2} + \frac{\partial U}{\partial q_2} = Fq_2$$

◆ Rotor Isotrópico: Equação de Movimento

Resultando nas seguintes equações de movimento

$$m\ddot{q}_1 - a\Omega\dot{q}_2 + kq_1 = m_u d \Omega^2 f(l_1) \sin \Omega t$$

$$m\ddot{q}_2 + a\Omega\dot{q}_1 + kq_2 = m_u d \Omega^2 f(l_1) \cos \Omega t$$

ou

$$14,29\ddot{q}_1 - 2,871\Omega\dot{q}_2 + 1.195.10^6 q_1 = 1,299.10^{-5} \Omega^2 \sin(\Omega t)$$

$$14,29\ddot{q}_2 + 2,871\Omega\dot{q}_1 + 1.195.10^6 q_2 = 1,299.10^{-5} \Omega^2 \cos(\Omega t)$$

◆ Rotor Isotrópico: Diagrama de Campbell

Primeiramente, o rotor é estudado em vibração livre. Assim,

$$m\ddot{q}_1 - a\Omega\dot{q}_2 + kq_1 = 0$$

$$m\ddot{q}_2 + a\Omega\dot{q}_1 + kq_2 = 0$$

ou

$$\begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & m \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{q}_1 \\ \ddot{q}_2 \end{Bmatrix} + \Omega \begin{bmatrix} 0 & -a \\ a & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{Bmatrix} = 0$$

◆ Rotor Isotrópico: Diagrama de Campbell

A matriz 2x2 multiplicado por Ω é a matriz giroscópica. As outras matrizes 2x2 são, respectivamente, as matrizes de massa e de rigidez.

Supondo a solução

$$q_1 = Q_1 e^{rt}$$

$$q_2 = Q_2 e^{rt}$$

Substituindo na equação diferencial

$$\begin{bmatrix} k + mr^2 & -a\Omega r \\ a\Omega r & k + mr^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Q_1 \\ Q_2 \end{bmatrix} = 0$$

◆ Rotor Isotrópico: Diagrama de Campbell

Equação característica

$$(k + mr^2)^2 + a^2 \Omega^2 r^2 = 0$$

Que pode ser escrita como:

$$m^2 r^4 + (2km + a^2 \Omega^2) r^2 + k^2 = 0$$

Como rotor em repouso ($\Omega=0$) as raízes da equação característica são

$$r_{10}^2 = r_{20}^2 = j^2 \omega_{10}^2 = j^2 \omega_{20}^2 = -\frac{k}{m}$$

E as frequências naturais do rotor em repouso :

$$\omega_{10} = \omega_{20} = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

◆ Rotor Isotrópico: Diagrama de Campbell

Sob condições de rotação ($\Omega \neq 0$), as raízes r_1 e r_2 e as correspondentes frequências naturais são ω_1 e ω_2 são

$$r_1^2 = - \left[\omega_{10}^2 + \frac{a^2 \Omega^2}{2m^2} \left(1 - \sqrt{1 + \frac{4m^2 \omega_{10}^2}{a^2 \Omega^2}} \right) \right]$$

$$r_1^2 = j^2 \omega_1^2$$

$$\omega_1^2 = \left[\omega_{10}^2 + \frac{a^2 \Omega^2}{2m^2} \left(1 - \sqrt{1 + \frac{4m^2 \omega_{10}^2}{a^2 \Omega^2}} \right) \right]$$

◆ Rotor Isotrópico: Diagrama de Campbell

$$r_2^2 = - \left[\omega_{10}^2 + \frac{a^2 \Omega^2}{2m^2} \left(1 + \sqrt{1 + \frac{4m^2 \omega_{10}^2}{a^2 \Omega^2}} \right) \right]$$

$$r_2^2 = j^2 \omega_2^2$$

$$\omega_2^2 = \left[\omega_{10}^2 + \frac{a^2 \Omega^2}{2m^2} \left(1 + \sqrt{1 + \frac{4m^2 \omega_{10}^2}{a^2 \Omega^2}} \right) \right]$$

◆ Rotor Isotrópico: Diagrama de Campbell

É possível observar que

$$\omega_1 < \omega_{10} = \omega_{20} < \omega_2$$

A representação das frequências naturais como uma função da velocidade de rotação, $\omega_1 = \omega_1(\Omega)$ e $\omega_2 = \omega_2(\Omega)$, é conhecido como diagrama de Campbell. Em geral o diagrama mostra as frequências em Hz.

◆ Rotor Isotrópico: Diagrama de Campbell

Substituindo os valores numéricos do exemplo, a equação característica do movimento livre é

$$r^4 + (1,672 \times 10^5 + 4,034 \times 10^{-2} \Omega^2) r^2 + 6,993 \times 10^9 = 0$$

As frequências para rotação zero, em repouso, são:

$$F_{10} = \frac{\omega_{10}}{2\pi} = F_{20} = \frac{\omega_{20}}{2\pi} = 46,02 \text{ Hz}$$

◆ Rotor Isotrópico: Diagrama de Campbell

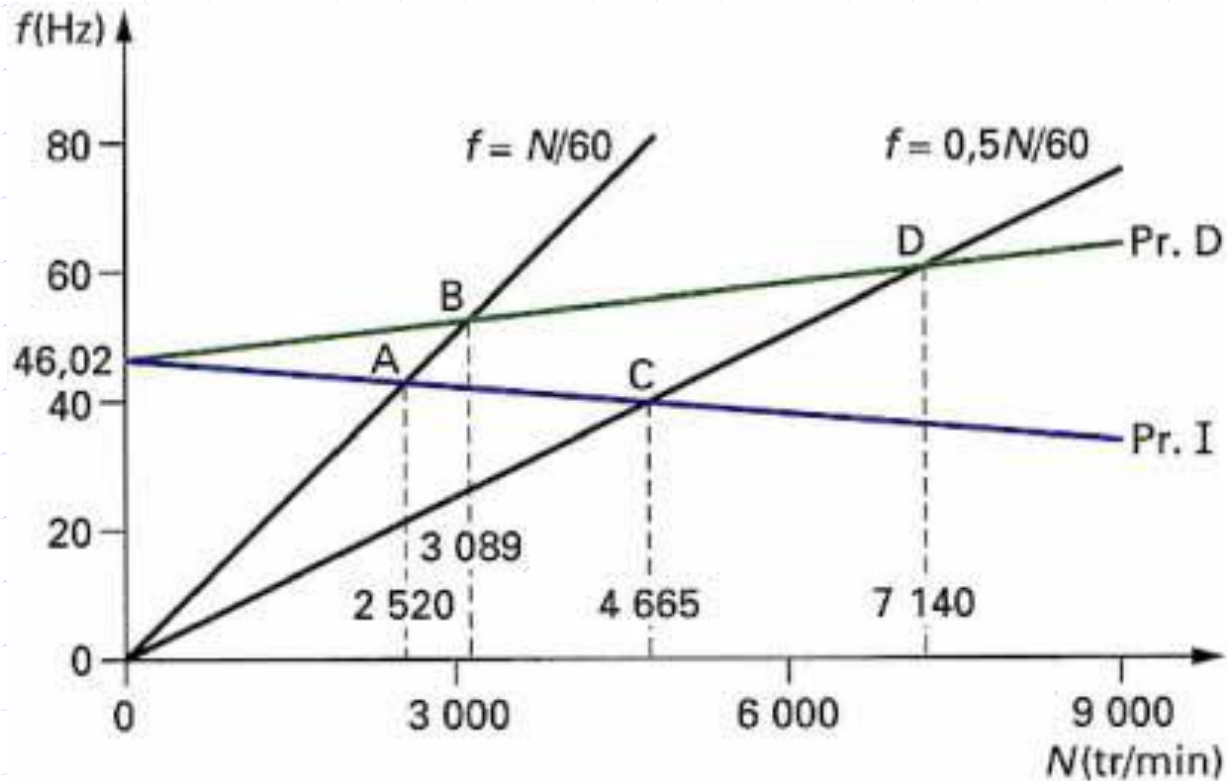
As frequências para rotação diferente de zero são:

$$F_1 = \frac{\omega_1}{2\pi} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{8,362 \times 10^4 + 2,017 \times 10^{-2} \Omega^2 \left(1 - \sqrt{1 + \frac{8,292 \times 10^6}{\Omega^2}} \right)}$$

$$F_2 = \frac{\omega_2}{2\pi} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{8,362 \times 10^4 + 2,017 \times 10^{-2} \Omega^2 \left(1 + \sqrt{1 + \frac{8,292 \times 10^6}{\Omega^2}} \right)}$$

◆ Rotor Isotrópico: Diagrama de Campbell

Diagrama de Campbell:



◆ Rotor Isotrópico: Modos de Vibrar

Consideremos agora as formas modais (em geral chamadas de modos).

Supondo $Q_2 = 1$

$$Q_1 = \frac{a\Omega r Q_2}{k + m r^2}$$

Os modos correspondentes a $\pm j\omega_1$ e $\pm j\omega_2$ são

$$Q_1(j\omega_1) = jQ_2(j\omega_1)$$

$$Q_1(j\omega_2) = -jQ_2(j\omega_2)$$

$$Q_1(-j\omega_1) = -jQ_2(-j\omega_1)$$

$$Q_1(-j\omega_2) = jQ_2(-j\omega_2)$$

◆ Rotor Isotrópico: Modos de Vibir

Segundo a solução proposta

$$q_1 = Q_1 e^{rt}$$

$$q_2 = Q_2 e^{rt}$$

A expressão geral do movimento livre do sistema pode ser escrita.

$$q_1 = jA_1 e^{j\omega_1 t} - jB_1 e^{-j\omega_1 t} - jA_2 e^{j\omega_2 t} + jB_2 e^{-j\omega_2 t}$$

$$q_2 = A_1 e^{j\omega_1 t} + B_1 e^{-j\omega_1 t} + A_2 e^{j\omega_2 t} + B_2 e^{-j\omega_2 t}$$

◆ Rotor Isotrópico: Modos de Vibrar

As quatro constantes A_1 , B_1 , A_2 e B_2 são determinadas pelas condições iniciais. Seja a primeira escolha um conjunto de condições iniciais que mostra somente a frequência ω_1 . Para $t_0=0$:

$$q_1 = 0$$

$$q_2 = q_{20}$$

$$\dot{q}_1 = -\omega_1 q_{20}$$

$$\dot{q}_2 = 0$$

◆ Rotor Isotrópico: Modos de Vibrar

Então

$$0 = A_1 - B_1 - A_2 + B_2$$

$$q_{20} = A_1 + B_1 + A_2 + B_2$$

$$-\omega_1 q_{20} = -A_1 \omega_1 + B_1 \omega_1 + A_2 \omega_2 + B_2 \omega_2$$

$$0 = A_1 \omega_1 - B_1 \omega_1 + A_2 \omega_2 + B_2 \omega_2$$

◆ Rotor Isotrópico: Modos de Vibrar

O que resulta em

$$A_2 = B_2 = 0 \qquad A_1 = \frac{q_{20}}{2} \qquad B_1 = \frac{q_{20}}{2}$$

Assim, a solução no espaço de modos assumidos será

$$q_2 = \frac{q_{20}}{2} \left(j e^{j\omega_1 t} + j e^{-j\omega_1 t} \right)$$

E sabendo que

$$q_1 = \frac{q_{20}}{2} \left(j e^{j\omega_1 t} - j e^{-j\omega_1 t} \right)$$

$$e^{\pm j\omega_1 t} = \cos \omega_1 t \pm j \sin \omega_1 t$$

◆ Rotor Isotrópico: Modos de Vibir

$$q_1 = -q_{20} \sin \omega_1 t$$

$$q_2 = q_{20} \cos \omega_1 t$$

Os deslocamentos u e w , de um ponto situado em $y = l$ do eixo do rotor, são encontrados usando o modo assumido

$$u(l, t) = -q_{20} \sin \omega_1 t \sin \frac{\pi l}{L} = -R \sin \omega_1 t$$

$$w(l, t) = q_{20} \cos \omega_1 t \sin \frac{\pi l}{L} = R \cos \omega_1 t$$

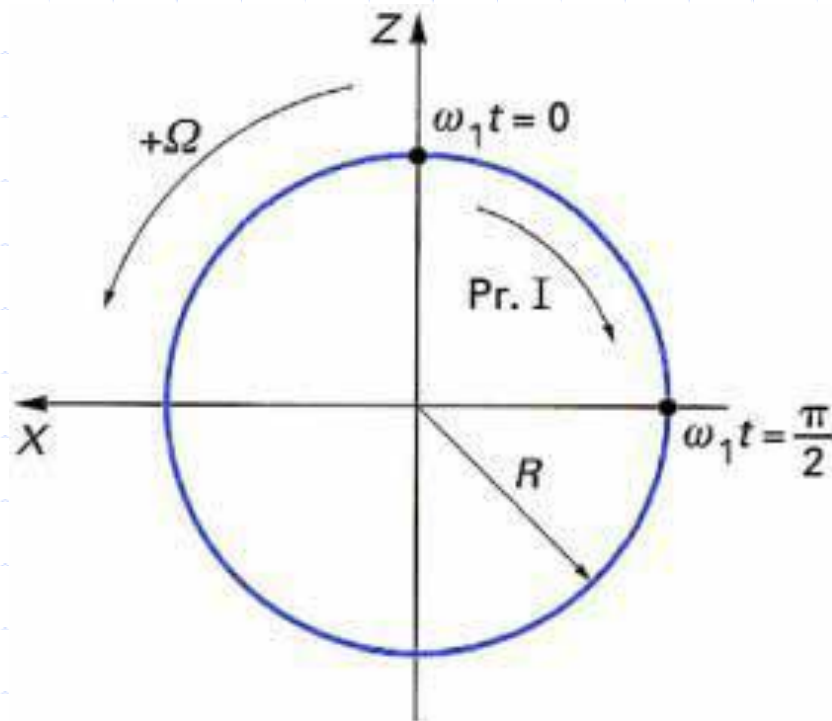
◆ Rotor Isotrópico: Modos de Vibir

Estas duas expressões resultam em

$$R = \sqrt{u^2(l,t) + w^2(l,t)} = q_{20} \sin \frac{\pi l}{L}$$

Desta forma, um ponto situado sobre o eixo do rotor descreve um círculo. Com o conjunto de condições iniciais escolhidos, a órbita é descrita (fig.3) em um sentido oposto ao sentido de rotação Ω , o rotor nesta situação descreve uma precessão inversa “backward whirl” (BW).

◆ Rotor Isotrópico: Precessão Inversa



◆ Rotor Isotrópico: Modos de Vibrar

Considerando agora um outro conjunto de condições iniciais que mostra somente a frequência ω_2 .

$$q_1 = q_{10}$$

$$q_2 = 0$$

$$\dot{q}_1 = 0$$

$$\dot{q}_2 = -\omega_2 q_{10}$$

◆ Rotor Isotrópico: Modos de Vibrar

Este conjunto de condições iniciais leva a:

$$q_1 = q_{10} \cos \omega_2 t$$

$$q_2 = -q_{10} \sin \omega_2 t$$

◆ Rotor Isotrópico: Modos de Vibir

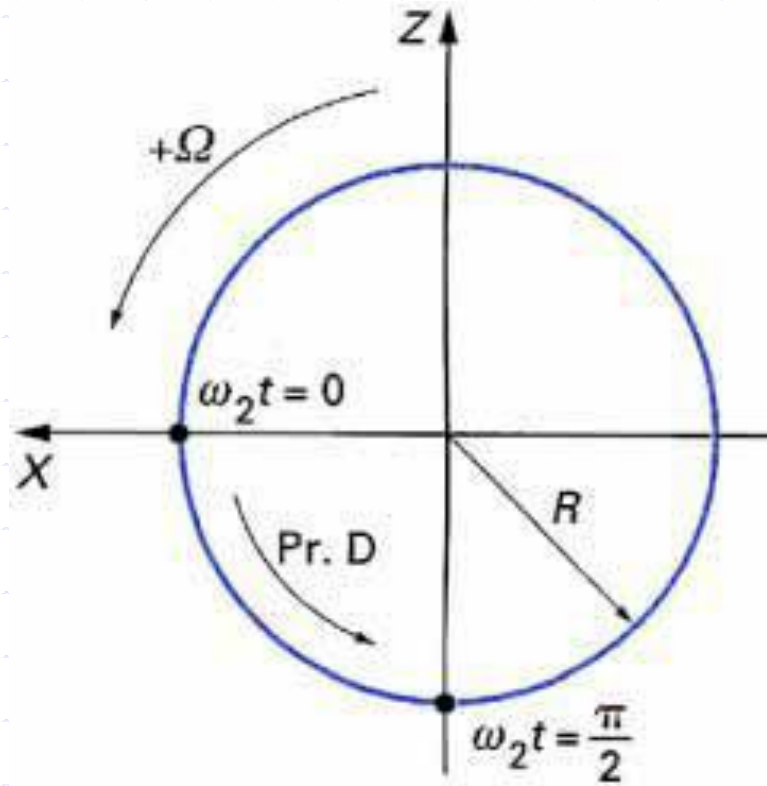
E a resposta no espaço de configurações

$$u(l,t) = q_{10} \sin \frac{\pi l}{L} \cos \omega_2 t = R \cos \omega_2 t$$

$$w(l,t) = -q_{10} \sin \frac{\pi l}{L} \sin \omega_2 t = -R \sin \omega_2 t$$

Um ponto situado sobre o eixo do rotor descreverá, neste caso, um círculo. Assim a órbita é descrita (fig.4) no mesmo sentido da rotação Ω ; o rotor se encontra assim em uma situação de precessão direta “forward whirl” (FW).

◆ Rotor Isotrópico: Precessão Direta



◆ Rotor Isotrópico: Resposta a Desbalanceamento

Aqui, somente a resposta em estado permanente a uma excitação do tipo desbalanceamento será calculada.

$$m\ddot{q}_1 - a\Omega\dot{q}_2 + kq_1 = m^*d\Omega^2 \sin \Omega t$$

$$m\ddot{q}_2 + a\Omega\dot{q}_1 + kq_2 = m^*d\Omega^2 \cos \Omega t$$

onde

$$m^* = m_u f(l_1)$$

◆ Rotor Isotrópico: Resposta a Desbalanceamento

Como não existe amortecimento, as soluções podem ser propostas da forma:

$$q_1 = Q_1 \sin \Omega t \qquad q_2 = Q_2 \cos \Omega t$$

Substituindo na equação diferencial acima:

$$-m\Omega^2 Q_1 + a\Omega^2 Q_2 + k Q_1 = m^* d \Omega^2$$

$$-m\Omega^2 Q_2 + a\Omega^2 Q_1 + k Q_2 = m^* d \Omega^2$$

◆ Rotor Isotrópico: Resposta a Desbalanceamento

Resultando em:

$$Q_1 = Q_2 = \frac{m^* d \Omega^2}{k + (a - m)\Omega^2}$$

A velocidade crítica Ω_c , devida a massa desbalanceada, corresponde aos valores para os quais o deslocamento se torna infinito.

$$\Omega_c = \sqrt{\frac{k}{m - a}}$$

- O resultado mostra somente uma velocidade crítica que corresponde ao valor de Ω_2 , correspondente ao ponto B do diagrama de Campbell.
- Como $Q_1 = Q_2$, as órbitas descritas pelo eixo do rotor são círculos e a precessão corresponde a uma precessão direta (FW).

◆ Rotor Isotrópico: Resposta a Desbalanceamento

No exemplo proposto por Lalanne, os valores de $Q_1 = Q_2$ devido ao desbalanceamento é

$$Q_1 = Q_2 = \frac{1,299 \times 10^{-5} \Omega^2}{1,195 \times 10^6 - 11,42 \Omega^2}$$

e a velocidade crítica corresponde $\Omega_c/2\pi = 51,48$ Hz, que é, $N = 3089$ rpm.

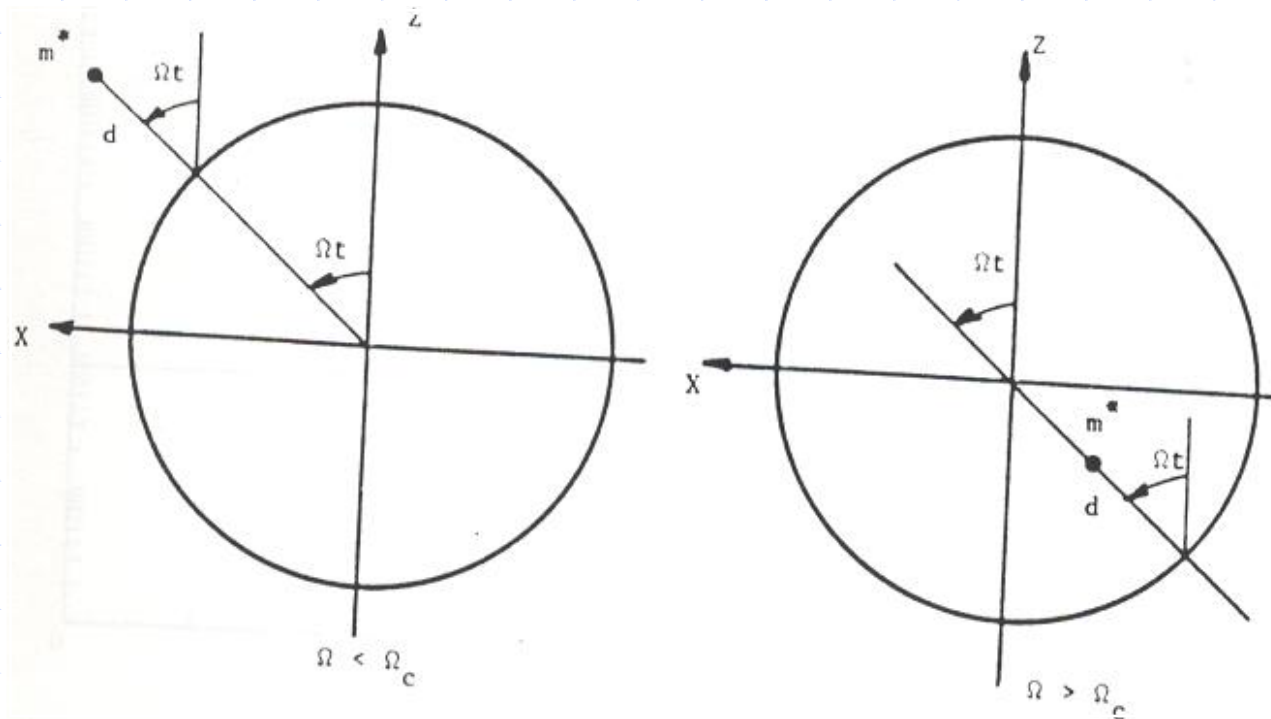
Quando $\Omega = 0$, Q_1 e Q_2 são positivos e quando cresce tendendo a infinito esses valores são negativos e tendem a

$$|Q_1| = |Q_2| = \left| \frac{m^* d}{a - m} \right|$$

◆ Rotor Isotrópico: Resposta a Desbalanceamento

Ou com os valores do exemplo a

$$|Q_1| = |Q_2| = 1,137 \times 10^{-6} \text{ m}$$

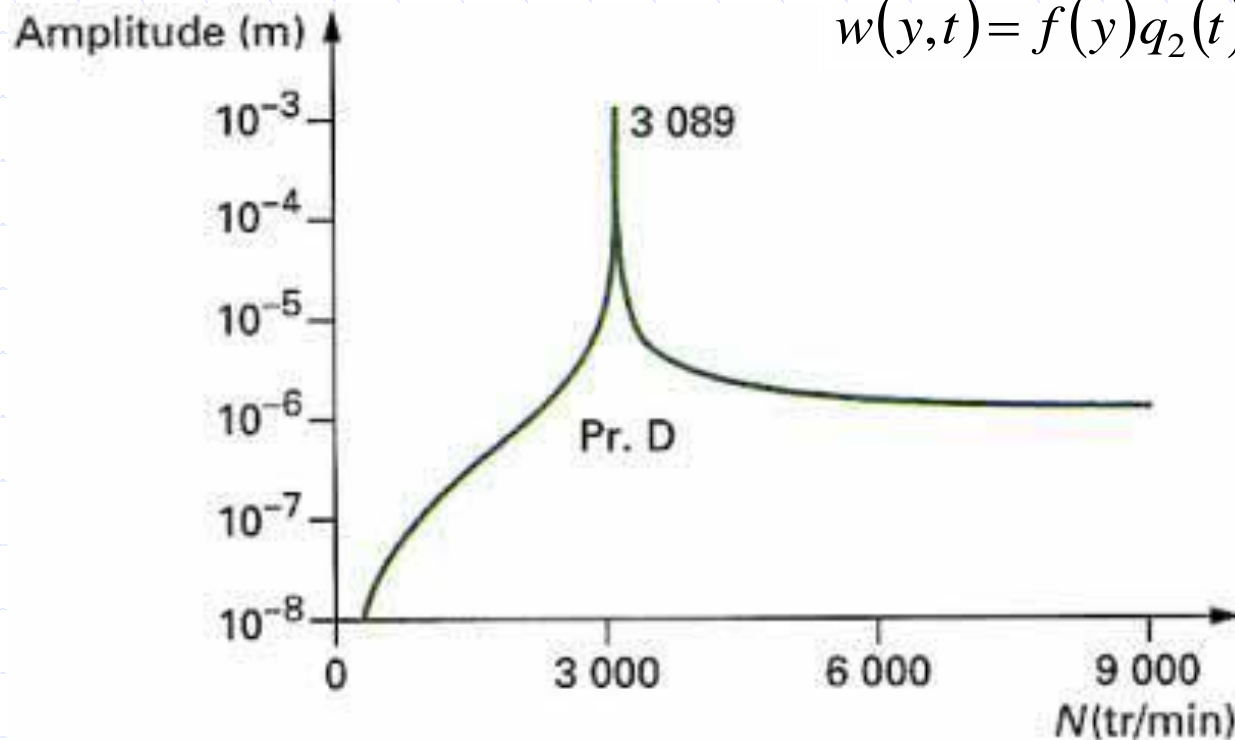


◆ Rotor Isotrópico: Resposta a Desbalanceamento

Assim, sabendo que a resposta pode ser achada através de Q e do modo assumido na posição que a mesma é desejada, para um sistema simétrico a resposta ao desbalanceamento toma a forma:

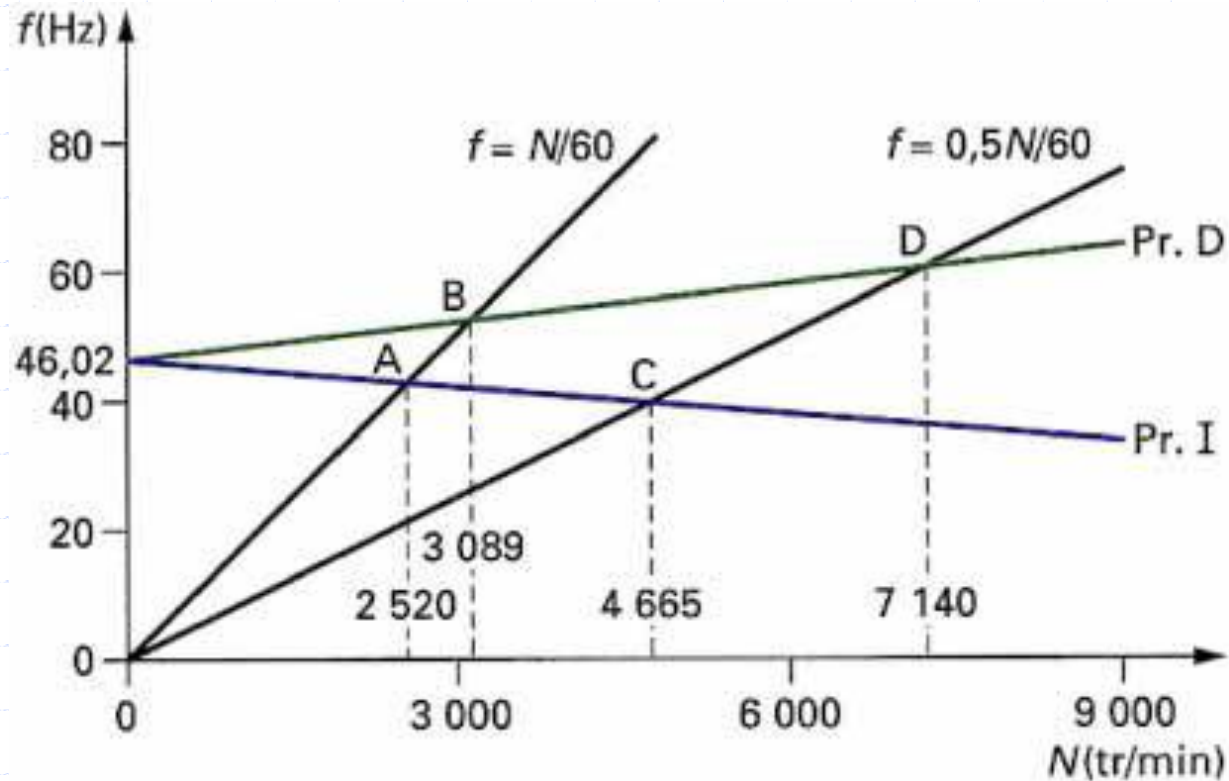
$$u(y,t) = f(y)q_1(t) = f(y)q_1$$

$$w(y,t) = f(y)q_2(t) = f(y)q_2$$



◆ Rotor Isotrópico: Diagrama de Campbell

Diagrama de Campbell:



◆ Rotor Isotrópico: Resposta a Forças Assíncronas

Sob condições de operação, um rotor pode ser excitado por forças de rotação assíncronas, uma relação s com a velocidade de rotação.

Supondo que as componentes das forças agindo sobre o rotor são

$$Fq_1 = F_0 \sin s\Omega t \quad f(l_2) = F \sin s\Omega t$$

$$Fq_2 = F_0 \cos s\Omega t \quad f(l_2) = F \cos s\Omega t$$

◆ Rotor Isotrópico: Resposta a Forças Assíncronas

Neste caso, as equações de movimento tomam a forma

$$m\ddot{q}_1 - a\Omega\dot{q}_2 + kq_1 = F \sin s\Omega t$$

$$m\ddot{q}_2 + a\Omega\dot{q}_1 + kq_2 = F \cos s\Omega t$$

Supondo as soluções abaixo

$$q_1 = Q_1 \sin s\Omega t$$

$$q_2 = Q_2 \cos s\Omega t$$

◆ Rotor Isotrópico: Resposta a Forças Assíncronas

e a amplitude da resposta no espaço criado pelos modos assumidos será

$$Q_1 = Q_2 = \frac{F}{k + (as - ms^2) \Omega^2}$$

A velocidade crítica Ω_c , devida as forças assíncronas, correspondentes aos valores para os quais o deslocamento tende para infinito.

$$\Omega_c = \sqrt{\frac{k}{s(ms - a)}}$$

◆ Rotor Isotrópico: Resposta a Forças Assíncronas

O resultado mostra somente velocidade crítica correspondente ao valor de Ω_2 , que corresponde a precessão direta (forward - FW).

Como $Q_1=Q_2$ as órbitas descritas são círculos.

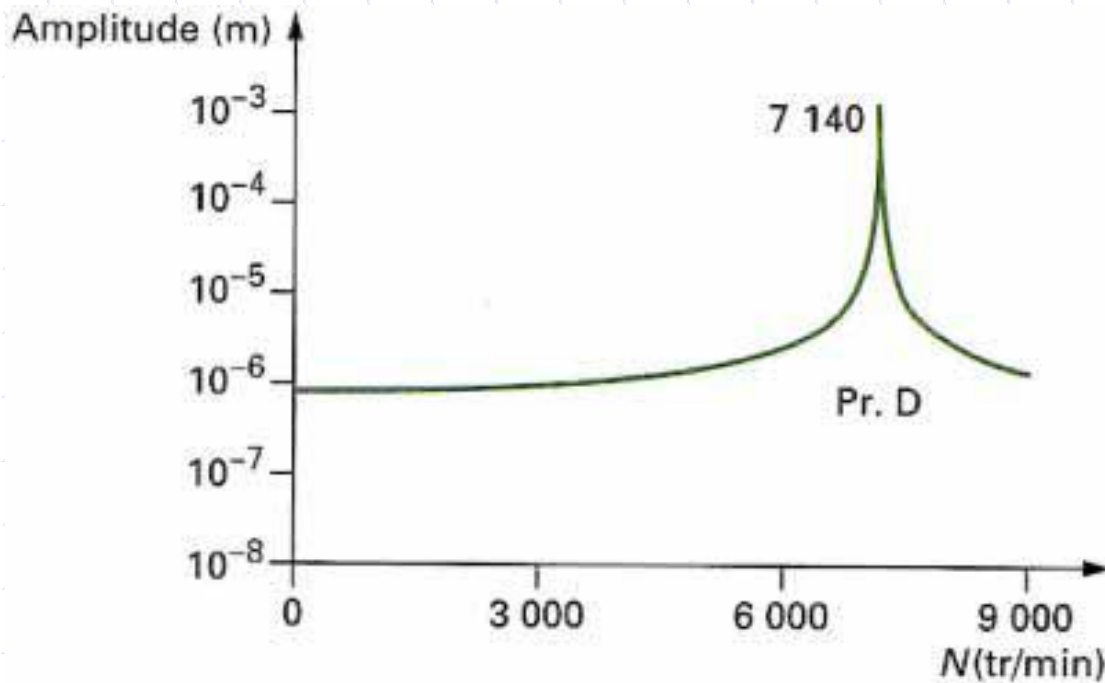
Para o rotor do exemplo do Lalanne, considerando $s = 0,5$ tem-se a seguinte relação

$$Q_1 = Q_2 = \frac{F}{1,195 \times 10^6 - 2,138 \Omega^2}$$

e a velocidade crítica correspondente para $\Omega_c/2\pi = 59,50$ Hz; que esta $N = 7140$ rpm.

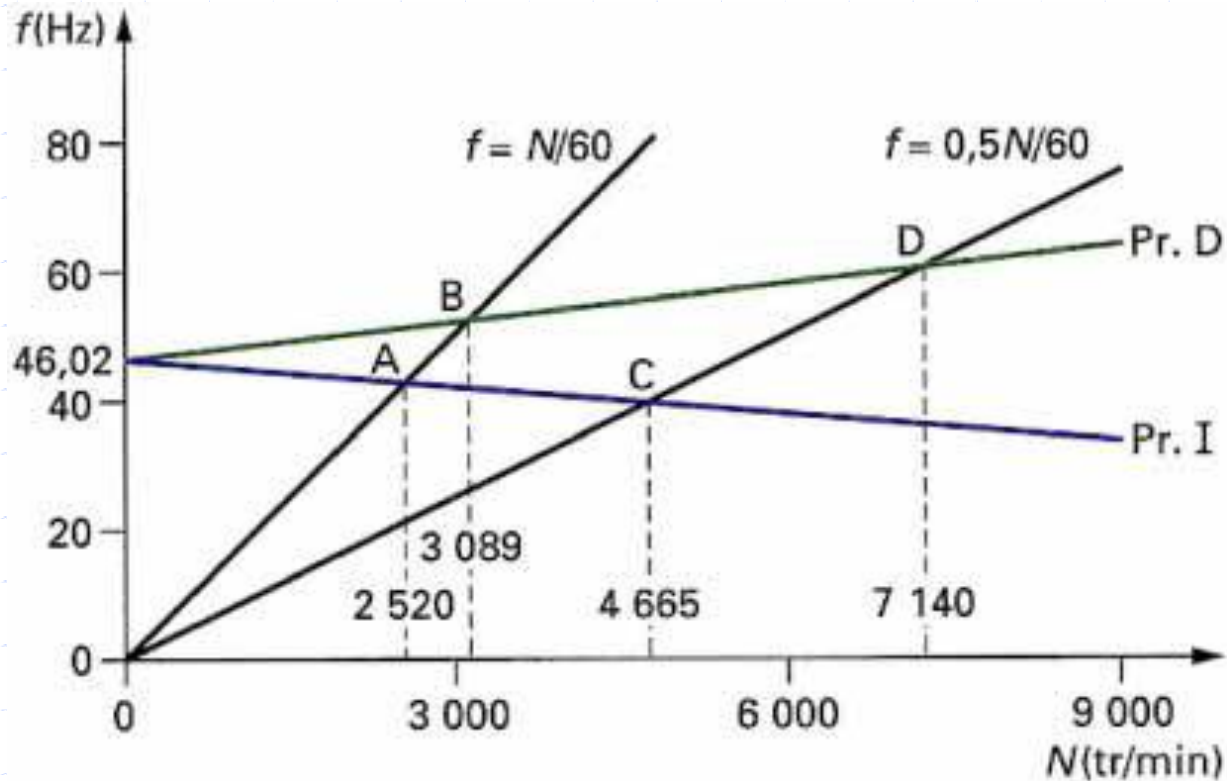
◆ Rotor Isotrópico: Resposta a Forças Assíncronas

A amplitude da resposta, considerando q_1 e q_2 e o modo assumido no ponto onde a mesma é requerida, esta representada abaixo, com $F=1\text{ N}$.



◆ Rotor Isotrópico: Diagrama de Campbell

Diagrama de Campbell:



◆ Rotor Isotrópico: Resposta a Forças Harmônicas

A força é assumida para atuar somente ao longo da direção x em $y = l_2 = 2L/3$.

Assim, usando a eq.22 e 23, suas componentes são;

$$Fq_1 = F_0 \sin \omega t \quad f(l_2) = F \sin \omega t$$

$$Fq_2 = 0$$

Sendo F a força generalizada no espaço gerado pelo modo assumido

$$F = F_0 f(l_2)$$

◆ Rotor Isotrópico: Resposta a Forças Harmônicas

As equações de movimento são

$$m\ddot{q}_1 - a\Omega\dot{q}_2 + kq_1 = F \sin \omega t$$

$$m\ddot{q}_2 + a\Omega\dot{q}_1 + kq_2 = 0$$

Como não existe nenhum amortecimento, as soluções propostas são

$$q_1 = Q_1 \sin \omega t$$

$$q_2 = Q_2 \cos \omega t$$

◆ Rotor Isotrópico: Resposta a Forças Harmônicas

E a solução da amplitude da resposta no espaço dos modos assumidos é

$$Q_1 = \frac{(k - m\omega^2)F}{(k - m\omega^2)^2 - a^2 \Omega^2 \omega^2} \quad Q_2 = \frac{-a\Omega\omega F}{(k - m\omega^2)^2 - a^2 \Omega^2 \omega^2}$$

As frequências características surgem dos valores de ω para os quais o denominador acima se anulam, isto é:

$$m^2 \omega^4 - (2km + a^2 \Omega^2) \omega^2 + k^2 = 0$$

◆ Rotor Isotrópico: Resposta a Forças Harmônicas

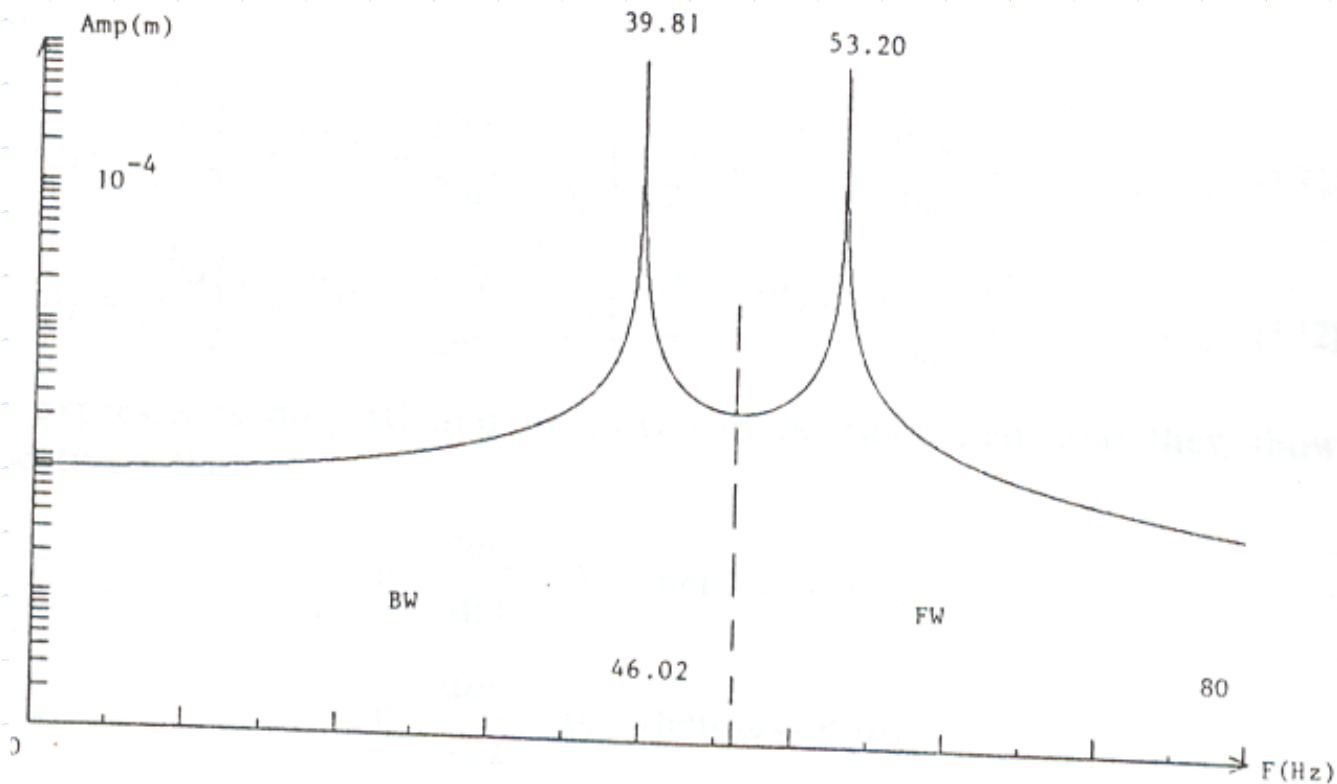
A equação característica é a mesma com $r = \pm j\omega$ e as duas frequências naturais pode também ser obtida diretamente do diagrama de Campbell. Como $Q_1 \neq Q_2$, as órbitas descritas são elípticas. Quando $\omega < \omega_{10}$ a precessão é inversa (BW); quando $\omega_{10} < \omega$ a precessão é direta (FW). Para uma dada velocidade Ω , as frequências $\omega_1(\Omega)$ e $\omega_2(\Omega)$ são obtidas excitando o rotor com um atuador eletromagnético (shaker) através de um mancal auxiliar.

$$Q_1 = \frac{(1,195 \times 10^6 - 14,29 \omega^2) F}{(1,195 \times 10^6 - 14,29 \omega^2)^2 - 8,243 \Omega^2 \omega^2}$$

$$Q_1 = \frac{-2,871 \omega F}{(1,195 \times 10^6 - 14,29 \omega^2)^2 - 8,243 \Omega^2 \omega^2}$$

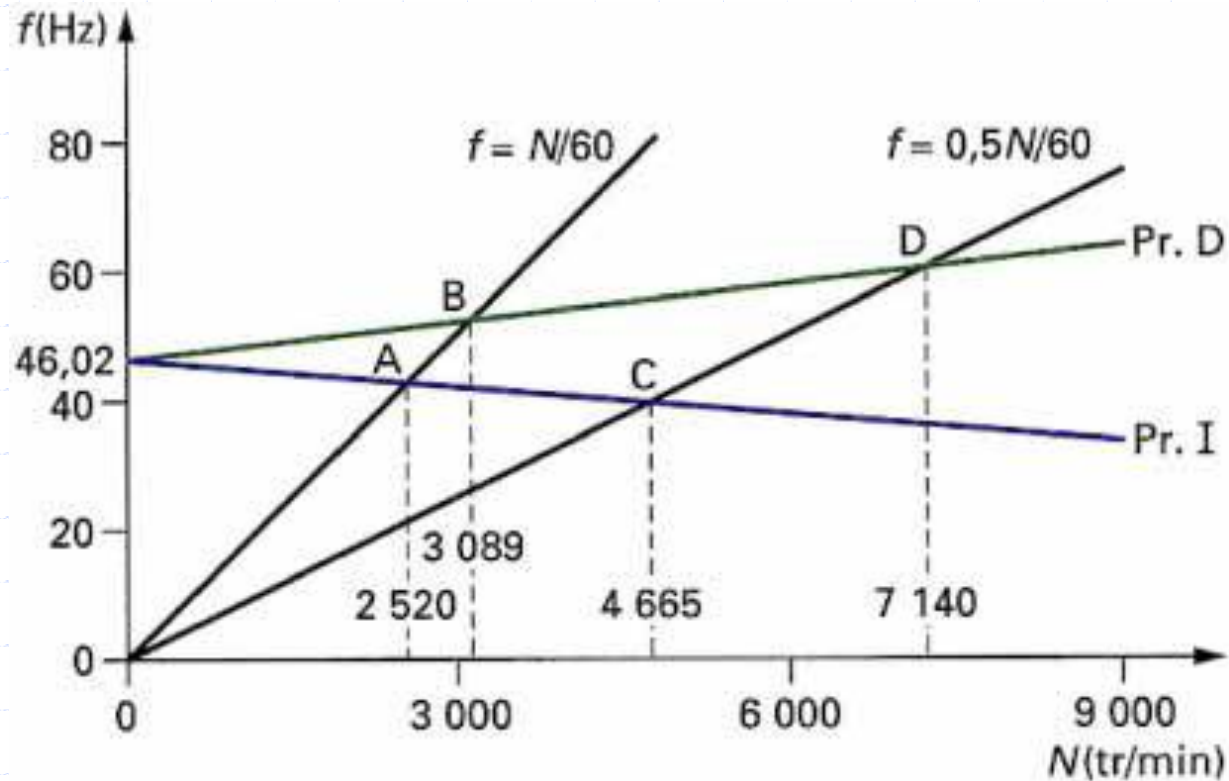
◆ Rotor Isotrópico: Resposta a Forças Harmônicas

A máxima amplitude, Amp (que é, $|Q_1|$ ou $|Q_2|$) da resposta que tem sido calculada para $N = 4000$ rpm e representado na fig.9, com $F = 1$ N.



◆ Rotor Isotrópico: Diagrama de Campbell

Diagrama de Campbell:



◆ Rotor Anisotrópico: Equação de Movimento

A anisotropia é introduzida por uma mola k_{zz} através de

$$k_1 = k$$

$$k_2 = k + k_{zz} f^2(l_2)$$

As equações de movimento são definidas por

$$m \ddot{q}_1 - a\Omega \dot{q}_2 + k_1 q_1 = m^* d \Omega^2 \sin \Omega t$$

$$m \ddot{q}_2 + a\Omega \dot{q}_1 + k_2 q_2 = m^* d \Omega^2 \cos \Omega t$$

◆ Rotor Anisotrópico: Equação de Movimento

Para o exemplo dado, as equações de movimento ficam definidas por

$$14,29 \ddot{q}_1 - 2,871\Omega \dot{q}_2 + 1,195 \times 10^6 q_1 = 1,299 \times 10^{-5} \Omega^2 \sin \Omega t$$

$$14,29 \ddot{q}_2 + 2,871\Omega \dot{q}_1 + 1,570 \times 10^6 q_2 = 1,299 \times 10^{-5} \Omega^2 \cos \Omega t$$

◆ Rotor Anisotrópico: Diagrama de Campbell

Para obter o diagrama de Campbell deve se achar a solução da equação diferencial homogênea que são definidas por

$$m\ddot{q}_1 - a\Omega\dot{q}_2 + k_1 q_1 = 0$$

$$m\ddot{q}_2 + a\Omega\dot{q}_1 + k_2 q_2 = 0$$

As soluções propostas levam ao conjunto de soluções homogêneo de equações em Q_1 e Q_2 ;

$$\begin{bmatrix} k_1 + mr^2 & -a\Omega r \\ a\Omega r & k_2 + mr^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} Q_1 \\ Q_2 \end{Bmatrix} = 0$$

◆ Rotor Anisotrópico: Diagrama de Campbell

A solução não trivial é obtida dos valores de r que anulam o determinante da matriz da equação acima

$$m^2 r^4 + (k_1 m + k_2 m + a^2 \Omega^2) r^2 + k_1 k_2 = 0$$

No repouso ($\Omega = 0$), as duas raízes da equação acima são

$$r_{10}^2 = j^2 \omega_{10}^2 = -\frac{k_1}{m}$$

$$r_{20}^2 = j^2 \omega_{20}^2 = -\frac{k_2}{m}$$

◆ Rotor Anisotrópico: Diagrama de Campbell

Assim

$$\omega_{10} = \sqrt{\frac{k_1}{m}}$$

$$\omega_{20} = \sqrt{\frac{k_2}{m}}$$

Em rotação ($\Omega \neq 0$):

$$r_1^2 = j^2 \omega_1^2$$

$$r_2^2 = j^2 \omega_2^2$$

◆ Rotor Anisotrópico: Diagrama de Campbell

com

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{\omega_{10}^2}{2} + \frac{\omega_{20}^2}{2} + \frac{a^2 \Omega^2}{2m^2} - \sqrt{\left(\frac{\omega_{10}^2}{2} + \frac{\omega_{20}^2}{2} + \frac{a^2 \Omega^2}{2m^2}\right)^2 - \omega_{10}^2 \omega_{20}^2}}$$

$$\omega_2 = \sqrt{\frac{\omega_{10}^2}{2} + \frac{\omega_{20}^2}{2} + \frac{a^2 \Omega^2}{2m^2} + \sqrt{\left(\frac{\omega_{10}^2}{2} + \frac{\omega_{20}^2}{2} + \frac{a^2 \Omega^2}{2m^2}\right)^2 - \omega_{10}^2 \omega_{20}^2}}$$

◆ Rotor Anisotrópico: Diagrama de Campbell

As expressões $d\omega_1/d\Omega$ e $d\omega_2/d\Omega$ podem ser calculadas, e elas mostram, respectivamente, que;

Se

$$\frac{d\omega_1}{d\Omega} < 0, \text{ então } \omega_1 < \omega_{10}$$

Se

$$\frac{d\omega_2}{d\Omega} > 0, \text{ então } \omega_{20} < \omega_2$$

Assim

$$\omega_1 < \omega_{10} < \omega_{20} < \omega_2$$

◆ Rotor Anisotrópico: Diagrama de Campbell

As equações acima mostram que ω_1 e ω_2 são quantidades reais, assim r_1 e r_2 são quantidades imaginárias e o rotor é estável. A forma modal também deve ser considerada.

$$Q_1 = \frac{a\Omega r Q_2}{k_1 + mr^2}$$

É fácil observar que $Q_1 \neq Q_2$; as órbitas descritas pelo rotor são elípticas. A equação característica do exemplo numérico é

$$r^4 + \left(1,935 \times 10^5 + 4,034 \times 10^{-2} \Omega^2\right) r^2 + 9,187 \times 10^9 = 0$$

◆ Rotor Anisotrópico: Diagrama de Campbell

Para $\Omega = 0$:

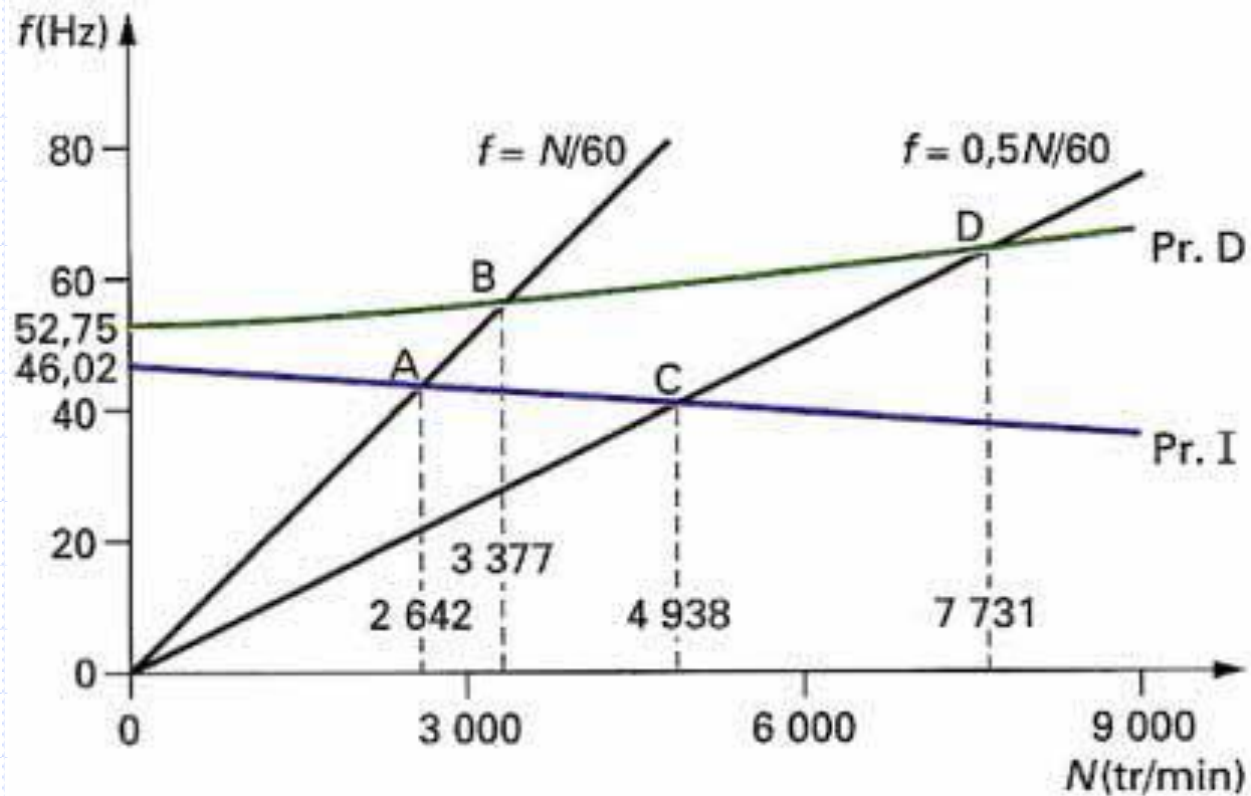
$$F_{10} = \frac{\omega_{10}}{2\pi} = 46,02 \text{ Hz}$$

$$F_{20} = \frac{\omega_{20}}{2\pi} = 52,75 \text{ Hz}$$

O diagrama de Campbell para $F_1 = F_1 (N)$ e $F_2 = F_2 (N)$ são mostradas na fig.10, onde as interseções com $F = N/60$ e $F = 0,5 N/60$ são mostradas.

◆ Rotor Isotrópico: Diagrama de Campbell

Diagrama de Campbell:



◆ Rotor Anisotrópico: Resposta ao Desbalanceamento

$$m\ddot{q}_1 - a\Omega\dot{q}_2 + k_1 q_1 = m^* d \Omega^2 \sin \Omega t$$

$$m\ddot{q}_2 + a\Omega\dot{q}_1 + k_2 q_2 = m^* d \Omega^2 \cos \Omega t$$

Somente será considerado a resposta ao estado estacionário (resposta permanente)
Considerando

$$q_1 = Q_1 \sin s \Omega t$$

$$q_2 = Q_2 \cos s \Omega t$$

◆ Rotor Anisotrópico: Resposta ao Desbalanceamento

As amplitudes Q_1 e Q_2 são

$$Q_1 = \frac{(k_2 - (m + a)\Omega^2) m^* d \Omega^2}{(k_1 - m\Omega^2)(k_2 - m\Omega^2) - a^2\Omega^4}$$

$$Q_2 = \frac{(k_1 - (m + a)\Omega^2) m^* d \Omega^2}{(k_1 - m\Omega^2)(k_2 - m\Omega^2) - a^2\Omega^4}$$

◆ Rotor Anisotrópico: Resposta ao Desbalanceamento

As velocidades críticas, devido a massa desbalanceada, são então dadas por

$$(k_1 - m\Omega^2)(k_2 - m\Omega^2) - a^2\Omega^4 = 0$$

que é

$$(m^2 - a^2)\Omega^4 - m(k_1 + k_2)\Omega^2 + k_1k_2 = 0$$

A equação característica é a mesma que a do diagrama de Campbell para $s = 1$. Assim, as duas velocidades de rotação encontradas com ela são conhecidas como velocidades ou rotações críticas.

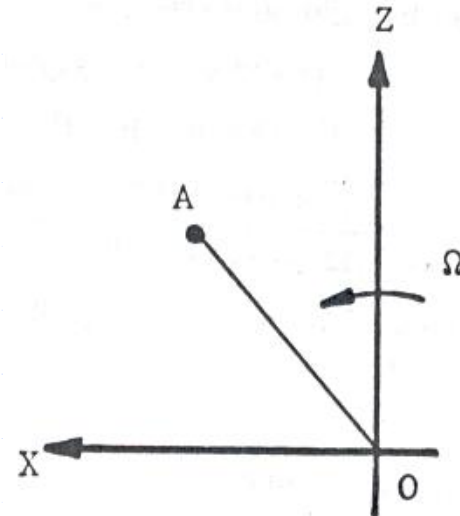
◆ Rotor Anisotrópico: Resposta ao Desbalanceamento

As órbitas descritas pelo eixo do rotor são elípticas já que $|Q_1| \neq |Q_2|$.
Para determinar a precessão, vamos supor (fig.11) que num instante t o eixo do rotor esta em A .

O produto vetorial $OA \wedge dOA$ dá o sentido da precessão da órbita.

As componentes de AO são

$$OA = \begin{bmatrix} Q_1 \sin \Omega t \\ 0 \\ Q_2 \cos \Omega t \end{bmatrix}$$



◆ Rotor Anisotrópico: Resposta ao Desbalanceamento

Assim, encontrando a derivada de OA , é possível achar o produto vetorial e com ele a direção do bamboleio do eixo

$$dOA = \begin{bmatrix} Q_1 \Omega \cos \Omega t \, dt \\ 0 \\ -Q_2 \Omega \sin \Omega t \, dt \end{bmatrix} \quad OA \wedge dOA = \begin{bmatrix} 0 \\ Q_1 Q_2 \Omega \, dt \\ 0 \end{bmatrix}$$

Desta forma, se $0 < Q_1 Q_2$, o sentido da precessão é forward (FW), e se $Q_1 Q_2 < 0$ sentido é backward (BW). As equações anteriores de Q_1 e Q_2 permitem calcular o sinal do produto entre eles, o que nos leva a seguinte equação

$$E(\Omega^2) = (k_1 - (m+a)\Omega^2)(k_2 - (m+a)\Omega^2)$$

◆ Rotor Anisotrópico: Resposta ao Desbalanceamento

Quando $k_1 < k_2$:

$$\Omega < \sqrt{\frac{k_1}{m+a}} \quad \text{---} > \quad FW$$

se

$$\sqrt{\frac{k_1}{m+a}} < \Omega < \sqrt{\frac{k_2}{m+a}} \quad \text{---} > \quad BW$$

se

$$\sqrt{\frac{k_2}{m+a}} < \Omega \quad \text{---} > \quad FW$$

◆ Rotor Anisotrópico: Resposta ao Desbalanceamento

Adicionalmente, é de particular interesse conhecer o que acontece com as velocidades críticas ω_1 e ω_2 . Estas frequências são soluções da raiz do denominador da resposta Q_1 ou Q_2 e o seu sinal tem que ser considerado

$$F(\omega^2) = (m^2 - a^2)\omega^4 - (k_1m + k_2m)\omega^2 + k_1k_2$$

Esta expressão é obviamente uma quantidade negativa quando $\omega_1 < \omega < \omega_2$; por outro lado é fácil mostrar que

$$F\left(\frac{k_1}{m+a}\right) = ak_1(k_2 - k_1) > 0$$

$$F\left(\frac{k_2}{m+a}\right) = ak_2(k_1 - k_2) < 0$$

◆ Rotor Anisotrópico: Resposta ao Desbalanceamento

Então

$$\omega_1 < \sqrt{\frac{k_2}{m+a}} < \omega_2$$

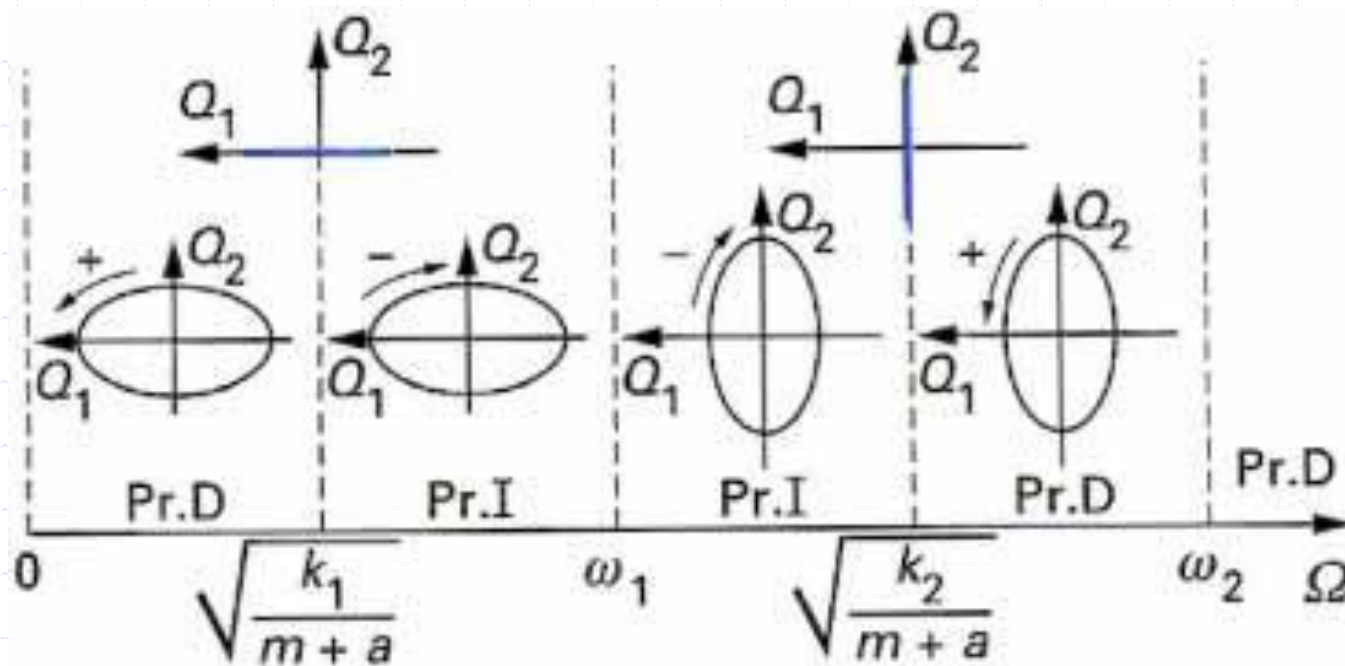
e

$$\sqrt{\frac{k_1}{m+a}} < \omega_1$$

◆ Rotor Anisotrópico: Resposta ao Desbalanceamento

$$OA \wedge dOA$$

Usando as equações é possível achar o sentido da precessão.



◆ Rotor Anisotrópico: Resposta ao Desbalanceamento

Para o rotor anisotrópico definido atrás

$$Q_1 = \frac{(1,570 \times 10^6 - 17,17 \Omega^2) 1,299 \times 10^{-5} \Omega^2}{196,1 \Omega^4 - 3,954 \times 10^7 \Omega^2 + 1,877 \times 10^{12}}$$

$$Q_2 = \frac{(1,195 \times 10^6 - 17,17 \Omega^2) 1,299 \times 10^{-5} \Omega^2}{196,1 \Omega^4 - 3,954 \times 10^7 \Omega^2 + 1,877 \times 10^{12}}$$

Quando $\omega_2 \ll \Omega$, Q_1 e Q_2 são tais que $|Q_1| = |Q_2| = 1,13 \times 10^{-6} \text{ m}$.

◆ Rotor Anisotrópico: Resposta ao Desbalanceamento

Sendo a resposta dada por

$$q_1 = Q_1 \sin \omega t$$

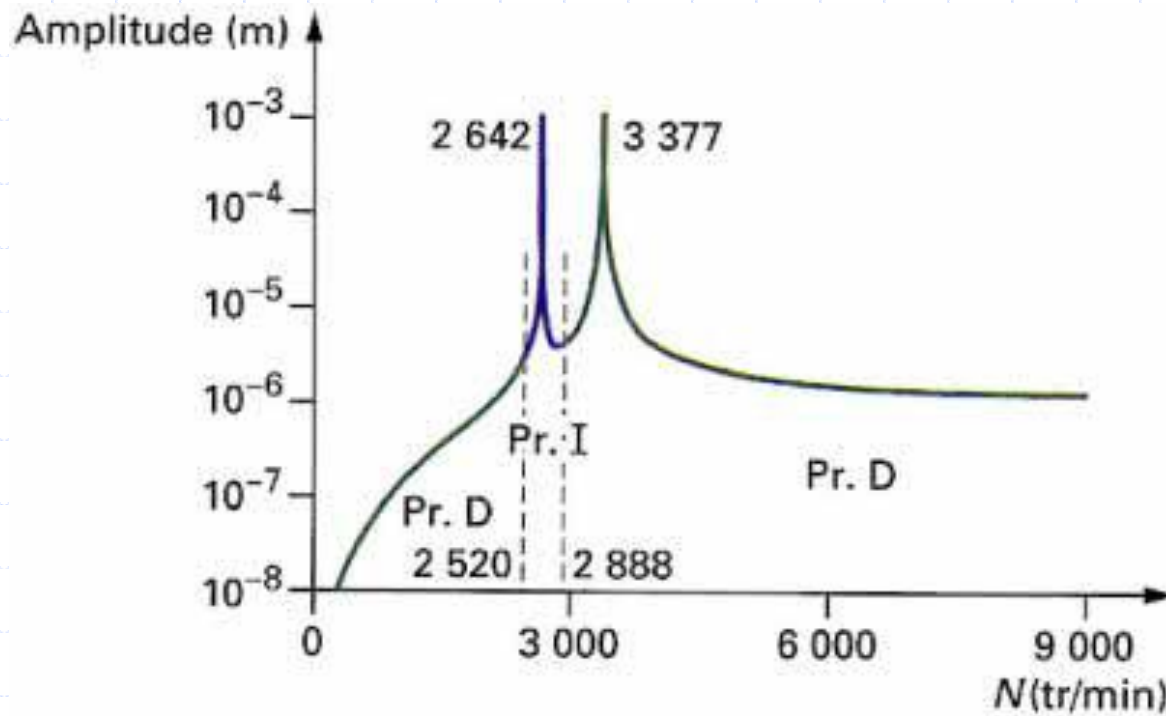
$$q_2 = Q_2 \cos \omega t$$

$$u(y,t) = f(y)q_1(t) = f(y)q_1$$

$$w(y,t) = f(y)q_2(t) = f(y)q_2$$

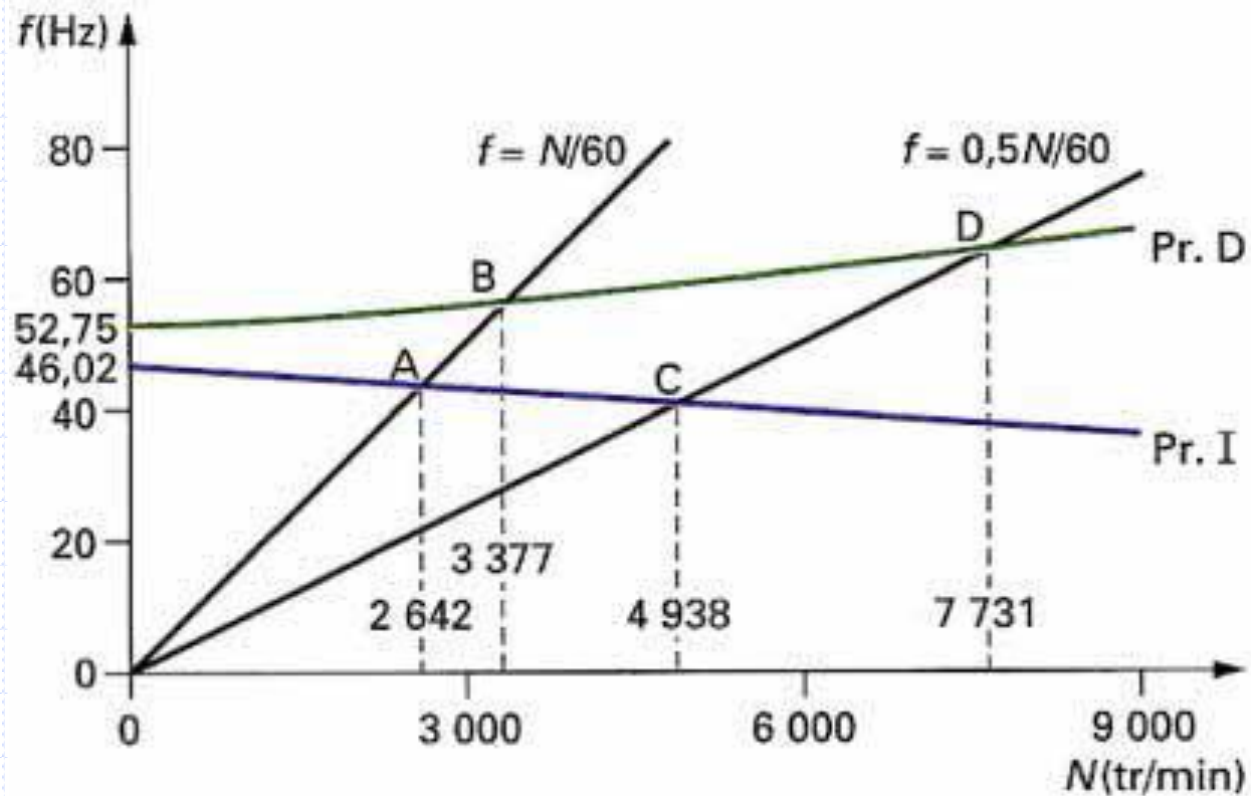
◆ Rotor Anisotrópico: Resposta ao Desbalanceamento

A resposta ao desbalanceamento em algum ponto do rotor é



◆ Rotor Isotrópico: Diagrama de Campbell

Diagrama de Campbell:



◆ Rotor Anisotrópico: Resposta a Forças Assíncronas

Considerando forças assíncronas, a equação de movimento será

$$m\ddot{q}_1 - a\Omega\dot{q}_2 + k_1q_1 = F \sin s\Omega t$$

$$m\ddot{q}_2 + a\Omega\dot{q}_1 + k_2q_2 = F \cos s\Omega t$$

◆ Rotor Anisotrópico: Resposta a Forças Assíncronas

As soluções propostas são dadas por

$$Q_1 = \frac{\left[k^2 - (ms^2 + as)\Omega^2 \right] F}{s^2 (s^2 m^2 - a^2) \Omega^4 - m(k_1 + k_2) s^2 \Omega^2 + k_1 k_2}$$

$$Q_2 = \frac{\left[k_1 - (ms^2 + as)\Omega^2 \right] F}{s^2 (s^2 m^2 - a^2) \Omega^4 - m(k_1 + k_2) s^2 \Omega^2 + k_1 k_2}$$

◆ Rotor Anisotrópico: Resposta a Forças Assíncronas

As velocidades críticas são obtidas através das raízes da equação acima. As órbitas são elípticas, e pode mostrar-se que o sentido da precessão pode ser obtido pelo sinal do produto entre Q_1 e Q_2 :

$$\Omega < \sqrt{\frac{k_1}{ms^2 + as}} \quad \text{---} > \textit{FW}$$

Se

$$\sqrt{\frac{k_1}{ms^2 + a}} < \Omega < \sqrt{\frac{k_2}{ms^2 + as}} \quad \text{---} > \textit{BW}$$

Se

$$\sqrt{\frac{k_2}{ms^2 + as}} < \Omega \quad \text{---} > \textit{FW}$$

◆ Rotor Anisotrópico: Resposta a Forças Assíncronas

Substituindo os dados do rotor anisotrópico

$$Q_1 = \frac{[1,570 \times 10^6 - 5,009 \Omega^2] F}{10,71 \Omega^4 - 9,884 \times 10^6 \Omega^2 + 1,877 \times 10^{12}}$$

$$Q_2 = \frac{[1,195 \times 10^6 - 5,009 \Omega^2] F}{10,71 \Omega^4 - 9,884 \times 10^6 \Omega^2 + 1,877 \times 10^{12}}$$

◆ Rotor Anisotrópico: Resposta a Forças Assíncronas

e considerando as relações

$$q_1 = Q_1 \sin \omega t$$

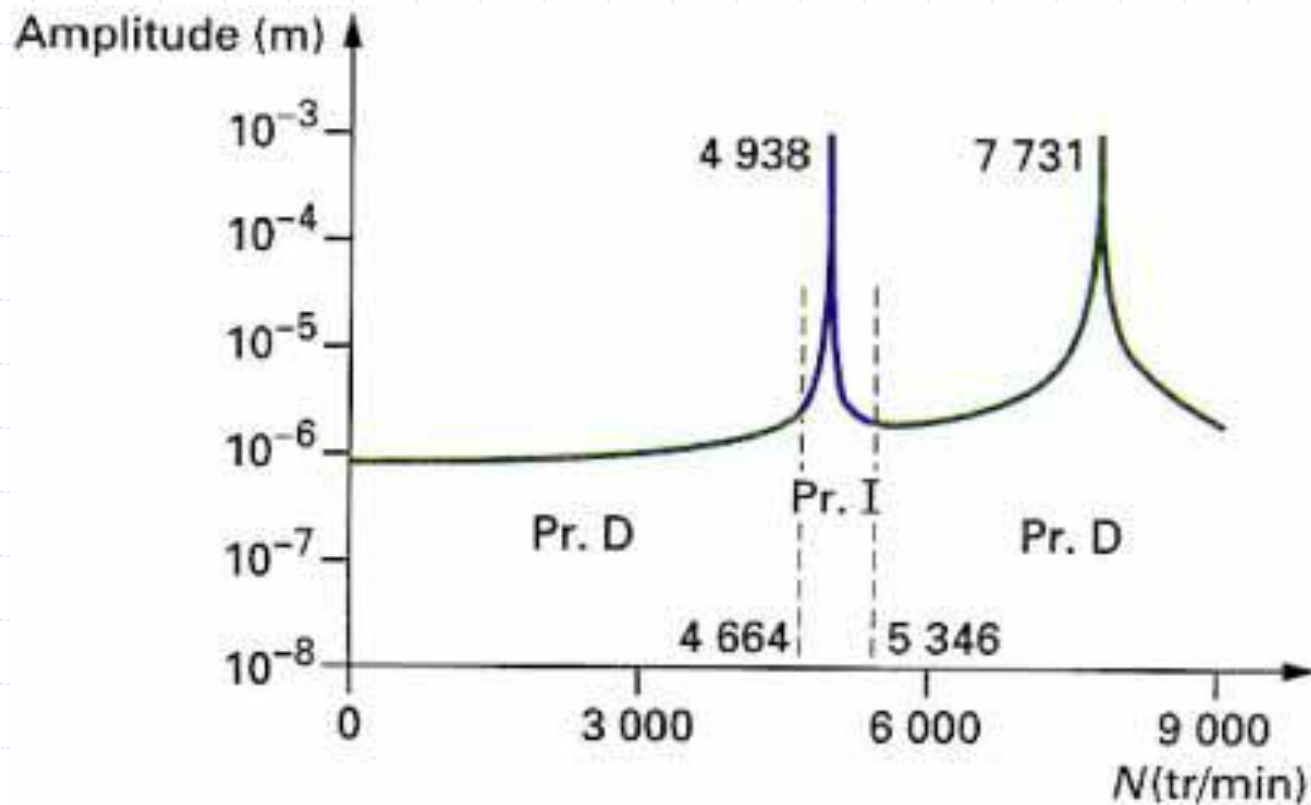
$$q_2 = Q_2 \cos \omega t$$

$$u(y,t) = f(y)q_1(t) = f(y)q_1$$

$$w(y,t) = f(y)q_2(t) = f(y)q_2$$

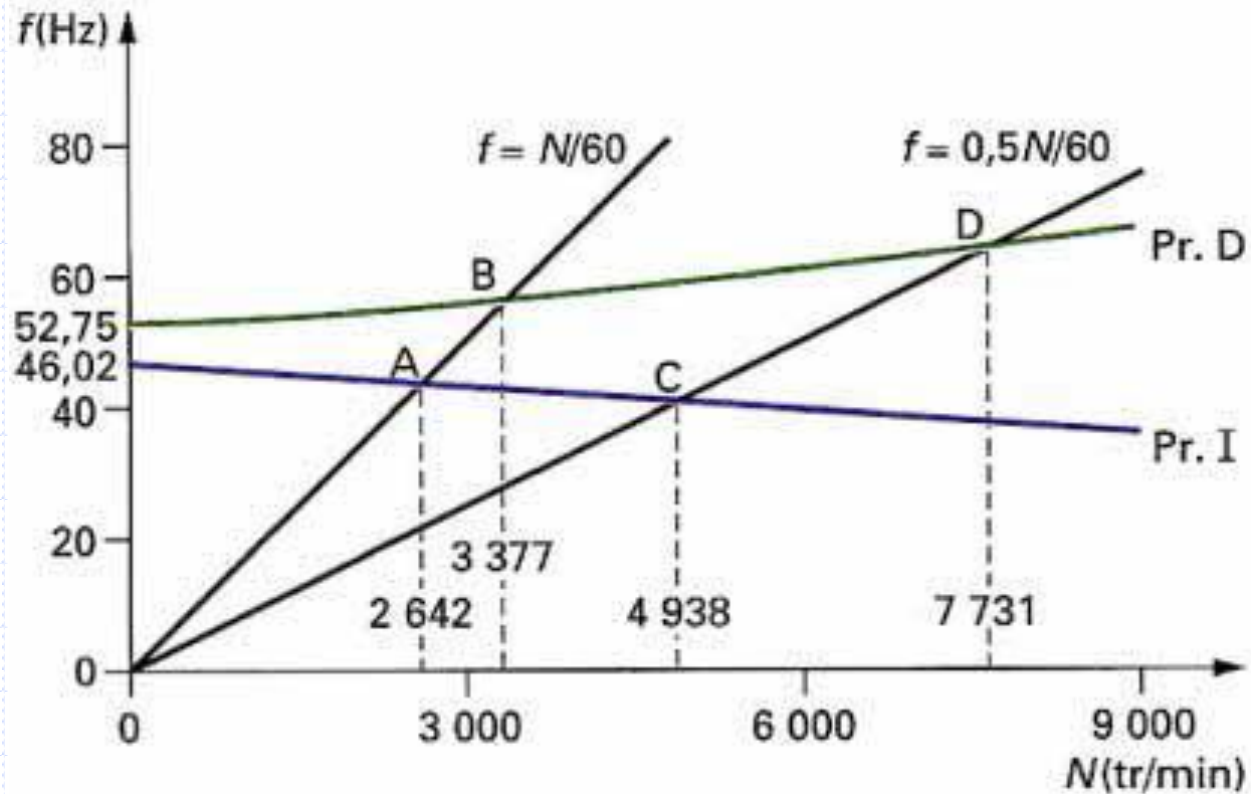
◆ Rotor Anisotrópico: Resposta a Forças Assíncronas

A resposta do sistema será.



◆ Rotor Isotrópico: Diagrama de Campbell

Diagrama de Campbell:



◆ Rotor Anisotrópico: Resposta a Força Harmônica

Para uma força harmônica a equação de movimento será:

$$m\ddot{q}_1 - a\Omega \dot{q}_2 + k_1q_1 = F \sin \omega t$$

$$m\ddot{q}_2 + a\Omega \dot{q}_1 + k_2q_2 = 0$$

E a resposta

$$Q_1 = \frac{(k_2 - m\omega^2)F}{(k_1 - m\omega^2)(k_2 - m\omega^2) - a^2\Omega^2\omega^2} \quad Q_2 = \frac{-a\Omega\omega F}{(k_1 - m\omega^2)(k_2 - m\omega^2) - a^2\Omega^2\omega^2}$$

◆ Rotor Anisotrópico: Resposta a Força Harmônica

As frequências críticas são obtidas igualando a zero o denominador da equação acima

$$m^2 \omega^4 - (k_1 m + k_2 m + a^2 \Omega^2) \omega^2 + k_1 k_2 = 0$$

a qual é a mesma que a equação obtida no diagrama de Campbell com $r = \pm j\omega$. As órbitas, quando $Q_1 \neq Q_2$, são elípticas, e o sentido da precessão é obtido através do sinal do produto $Q_1 Q_2$.

Se

$$\omega < \omega_{20} = \sqrt{\frac{k_2}{m}}$$

o sentido é backward, caso contrario será forward.

◆ Rotor Anisotrópico: Resposta a Força Harmônica

Substituindo os dados do rotor anisotrópico

$$Q_1 = \frac{(1,570 \times 10^6 - 14,29 \omega^2) F}{204,3 \omega^4 - (3,954 \times 10^7 + 8,243 \times 10^{-2} \Omega^2) \omega^2 + 1,877 \times 10^{12}}$$

$$Q_2 = \frac{-2,871 \Omega \omega F}{204,3 \omega^4 - (3,954 \times 10^7 + 8,243 \times 10^{-2} \Omega^2) \omega^2 + 1,877 \times 10^{12}}$$

◆ Rotor Anisotrópico: Resposta a Força Harmônica

Considerando as equações acima, com $F = 1N$, a resposta para um determinado ponto do eixo pode ser obtida

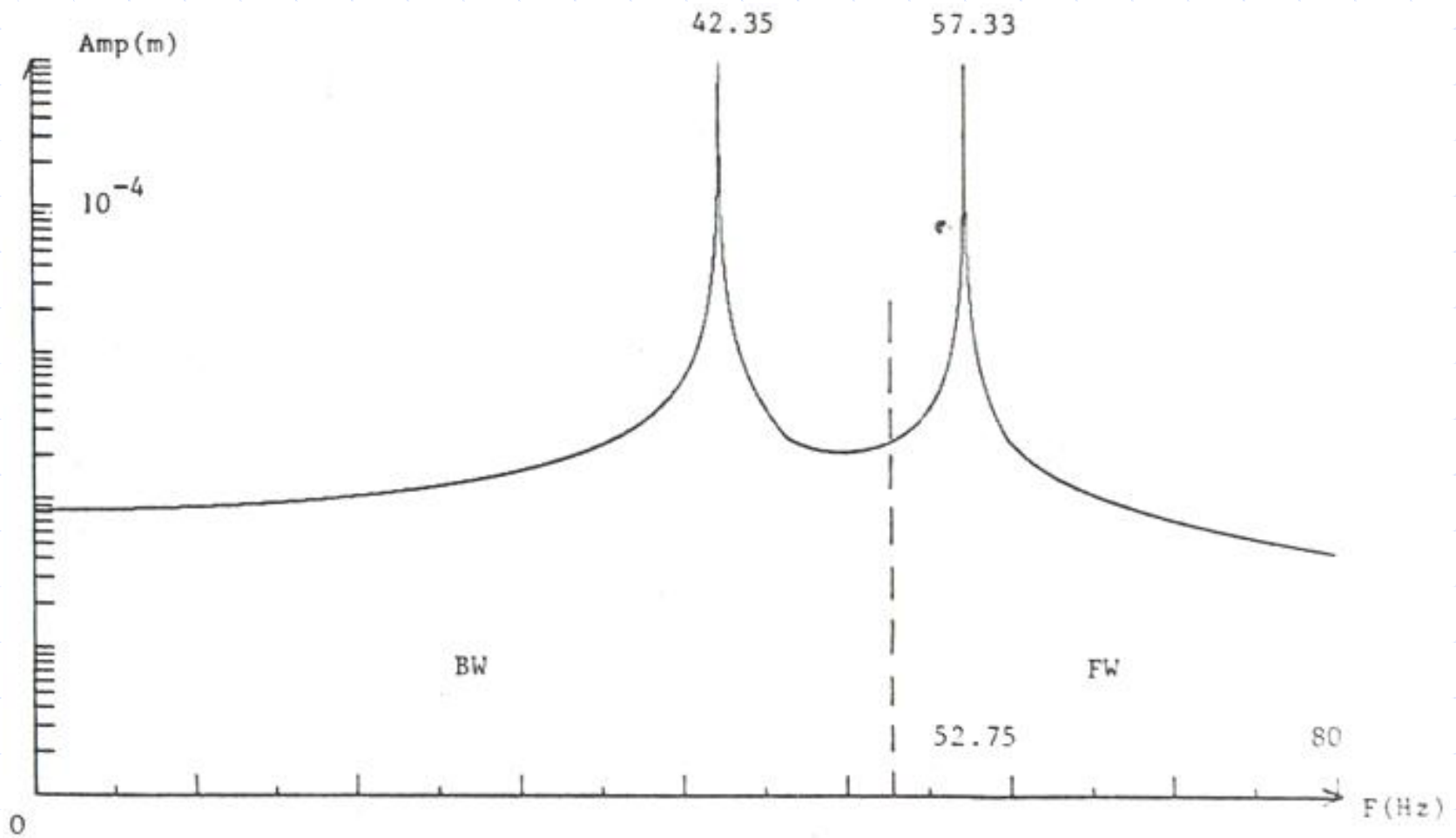
$$q_1 = Q_1 \sin \omega t$$

$$q_2 = Q_2 \cos \omega t$$

$$u(y,t) = f(y)q_1(t) = f(y)q_1$$

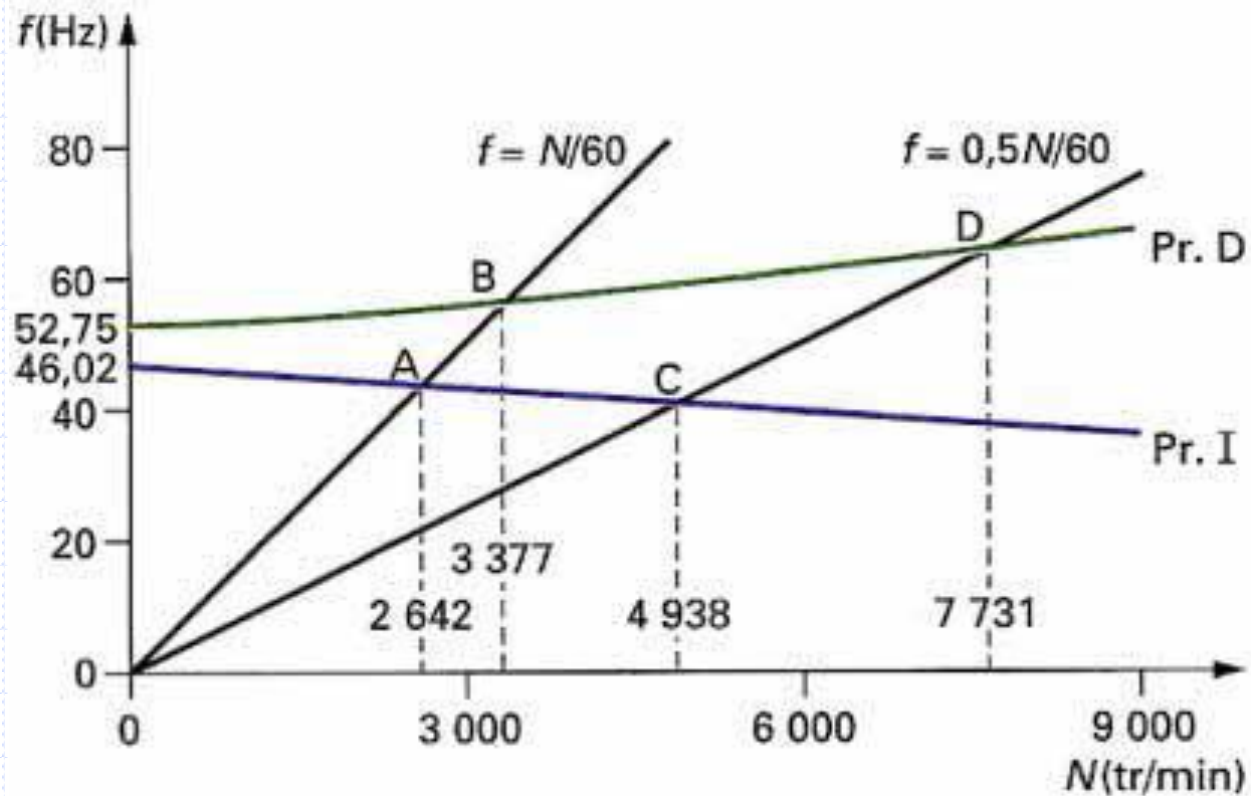
$$w(y,t) = f(y)q_2(t) = f(y)q_2$$

◆ Rotor Anisotrópico: Resposta a Força Harmônica



◆ Rotor Isotrópico: Diagrama de Campbell

Diagrama de Campbell:



◆ Rotor com Amortecimento: Diagrama de Campbell

Considere-se um rotor simples com mancal com amortecimento viscoso.

$$m\ddot{q}_1 - a\Omega\dot{q}_2 + c_1\dot{q}_1 + k_1q_1 = 0$$

$$m\ddot{q}_2 + a\Omega\dot{q}_1 + c_2\dot{q}_2 + k_2q_2 = 0$$

A equação característica será

$$m^2r^4 + m(c_1 + c_2)r^3 + (k_1m + k_2m + c_1c_2 + a^2\Omega^2)r^2 + (k_2c_1 + k_1c_2)r + k_1k_2 = 0$$

◆ Rotor com Amortecimento: Diagrama de Campbell

➤ Em geral, os valores dos coeficientes de amortecimento c_1 e c_2 são baixos e as raízes da equação característica aparecem em pares complexos conjugados.

$$r_i = -a_i \pm jb_1$$

➤ Se os coeficientes de amortecimento c_1 e c_2 são altos, as raízes da equação característica podem ser tais que a frequência natural desapareça, e então uma solução pode ser

$$r_i = -a_i$$

◆ Rotor com Amortecimento: Diagrama de Campbell

Considerando novamente o mancal da exemplo numérico e supondo que as características são

$$k_{xx}=2 \times 10^5 \text{ N/m}, k_{zz}=5 \times 10^5 \text{ N/m}, k_{xz}=k_{zx}=0, c_{xx}=\beta \times 2 \times 10^5 \text{ N/m/s},$$

$$c_{zz}=\beta \times 5 \times 10^5 \text{ N/m/s}, c_{xz}=c_z=0. \text{ As equações de movimento em função}$$

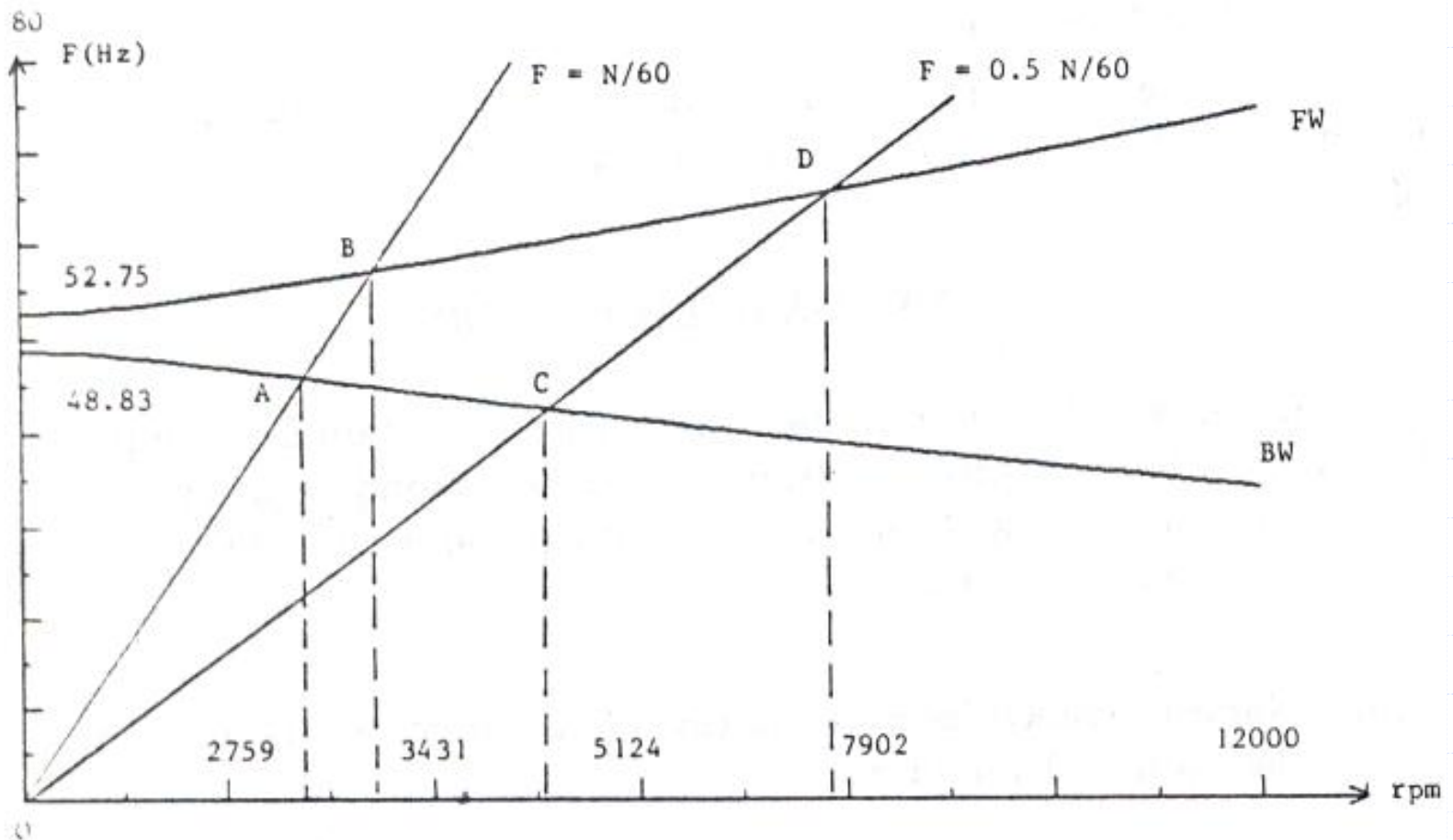
de β ficam

$$14,29\ddot{q}_1 - 2,871\Omega\dot{q}_2 + \beta \times 1,5 \times 10^5 \dot{q}_1 + 1,345 \times 10^6 q_1 = 0$$

$$14,29\ddot{q}_2 + 2,871\Omega\dot{q}_1 + \beta \times 3,75 \times 10^5 \dot{q}_2 + 1,570 \times 10^6 q_2 = 0$$

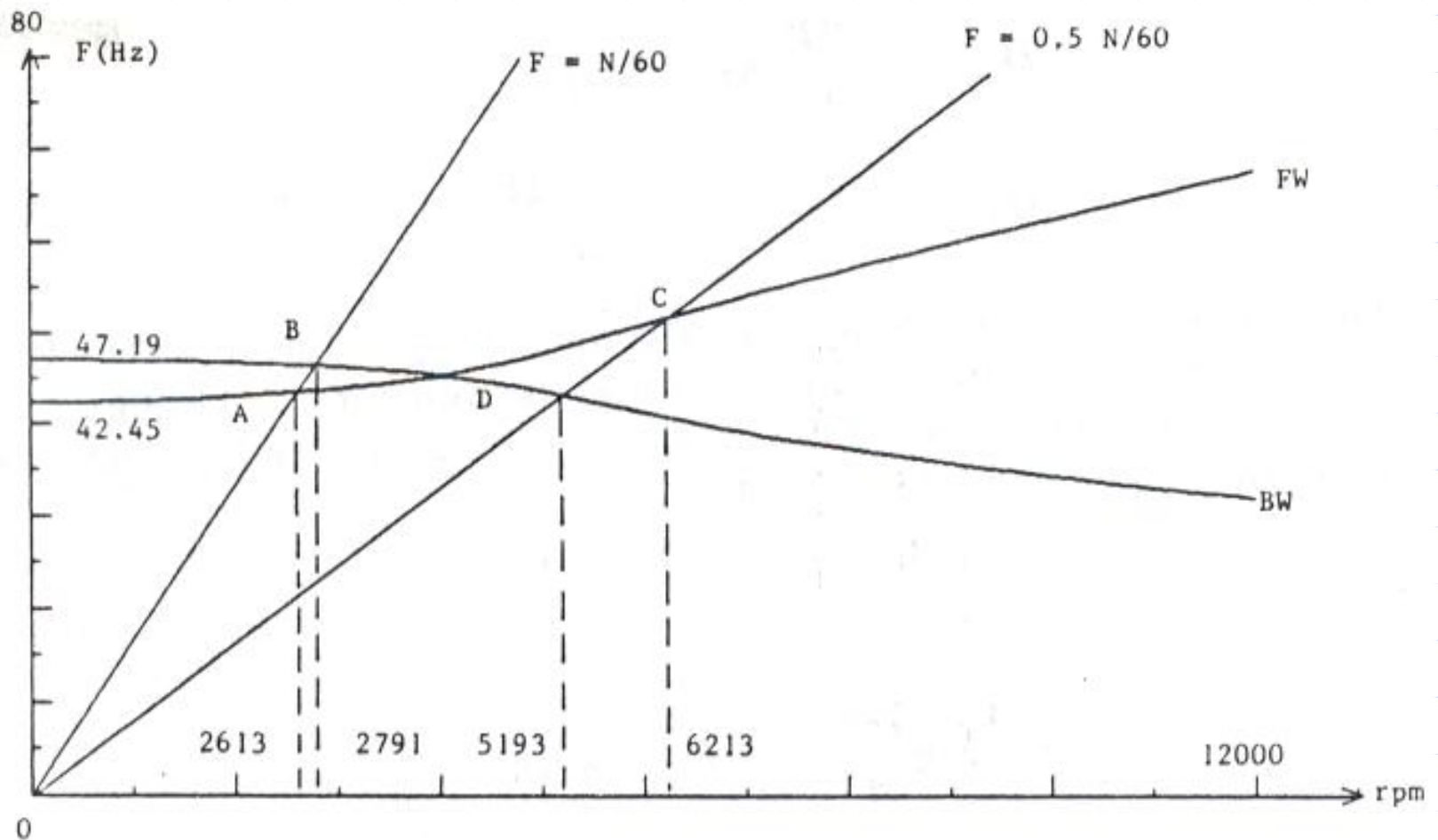
◆ Rotor com Amortecimento: Diagrama de Campbell

Baixo amortecimento, $\beta = 0,0002$: o diagrama de Campbell é idêntico a $\beta = 0$



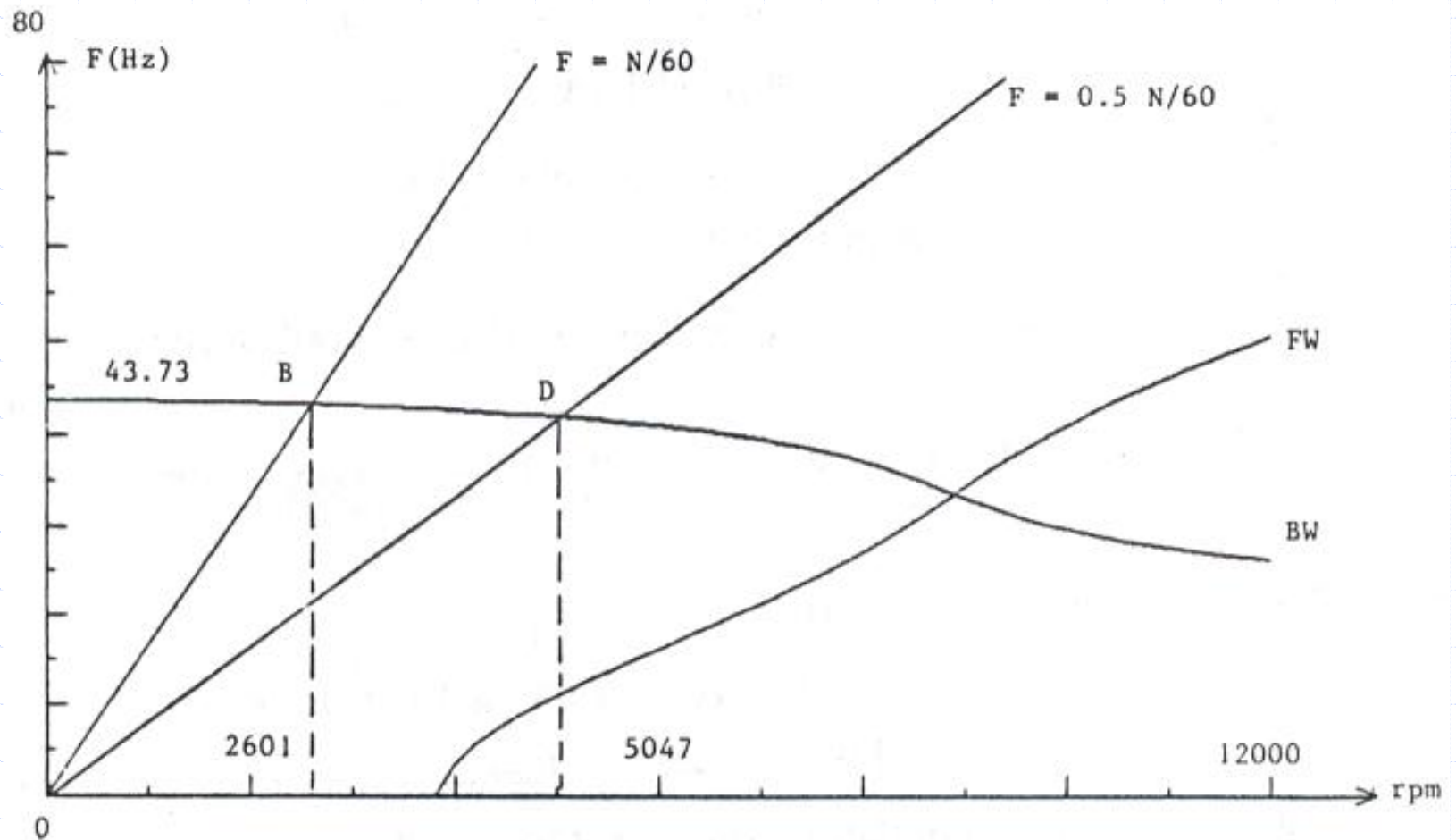
◆ Rotor com Amortecimento: Diagrama de Campbell

Amortecimento alto, $\beta = 0,015$: o diagrama de Campbell muda



◆ Rotor com Amortecimento: Diagrama de Campbell

Amortecimento muito alto, $\beta = 0,026$: apenas uma rotação crítica aparece



◆ Rotor c/Amortecimento: Resposta ao Desbalanceamento

Sendo a massa desbalanceada a mesma do exemplo, as equações ficam

$$m\ddot{q}_1 - a\Omega\dot{q}_2 + c_1\dot{q}_1 + k_1q_1 = m^*d \Omega^2 \sin \Omega t$$

$$m\ddot{q}_2 + a\Omega\dot{q}_1 + c_2\dot{q}_2 + k_2q_2 = m^*d \Omega^2 \cos \Omega t$$

◆ Rotor c/Amortecimento: Resposta ao Desbalanceamento

Com o sistema amortecido, as soluções propostas são

$$q_1 = A_1 \sin \Omega t + B_1 \cos \Omega t$$

$$q_2 = A_2 \sin \Omega t + B_2 \cos \Omega t$$

Substituindo as soluções propostas acima na equação de movimento resulta

$$\begin{bmatrix} k_1 - m\Omega^2 & -c_1\Omega & 0 & a\Omega^2 \\ c_1\Omega & k_1 - m\Omega^2 & -a\Omega^2 & 0 \\ 0 & -a\Omega^2 & k_1 - m\Omega^2 & -c_2\Omega \\ a\Omega^2 & 0 & c_2\Omega & k_1 - m\Omega^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_1 \\ B_1 \\ A_2 \\ B_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m^* d \Omega^2 \\ 0 \\ 0 \\ m^* d \Omega^2 \end{bmatrix}$$

◆ Rotor c/Amortecimento: Resposta ao Desbalanceamento

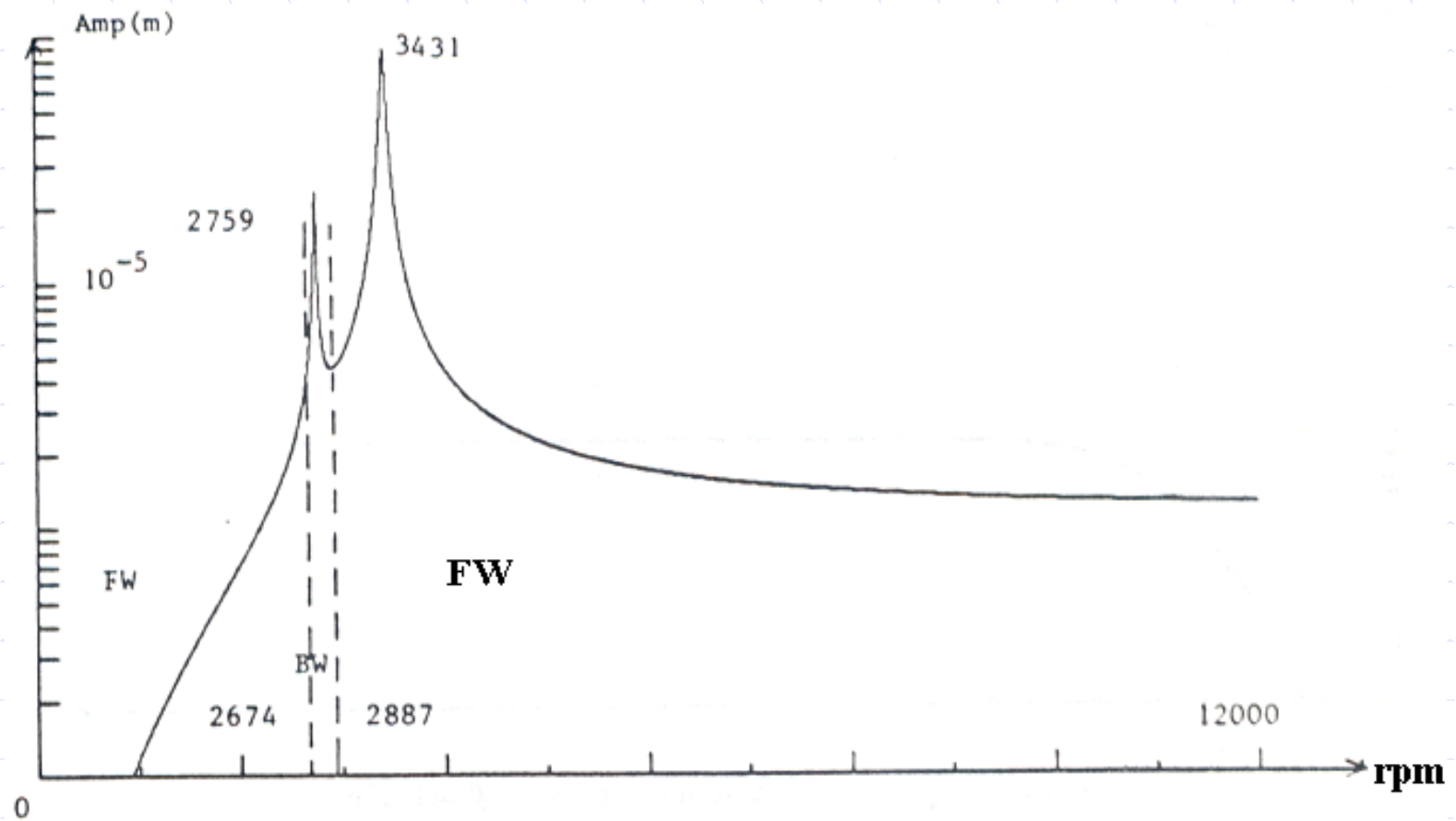
Para um dado valor de Ω , a solução da equação matricial acima dá $A_1(\Omega)$, $B_1(\Omega)$, $A_2(\Omega)$ e $B_2(\Omega)$; então q_1 e q_2 podem ser obtidas.

Os dados usados para a resposta da massa desbalanceada são os mesmos do exemplo numérico.

Nas figuras seguintes, as respostas para distintos valores de β são apresentadas: para amortecimento baixo duas velocidades críticas aparecem e para valores de amortecimento elevado e muitos elevado as velocidades críticas aparecem muito amortecidas ou simplesmente desaparecem, respectivamente.

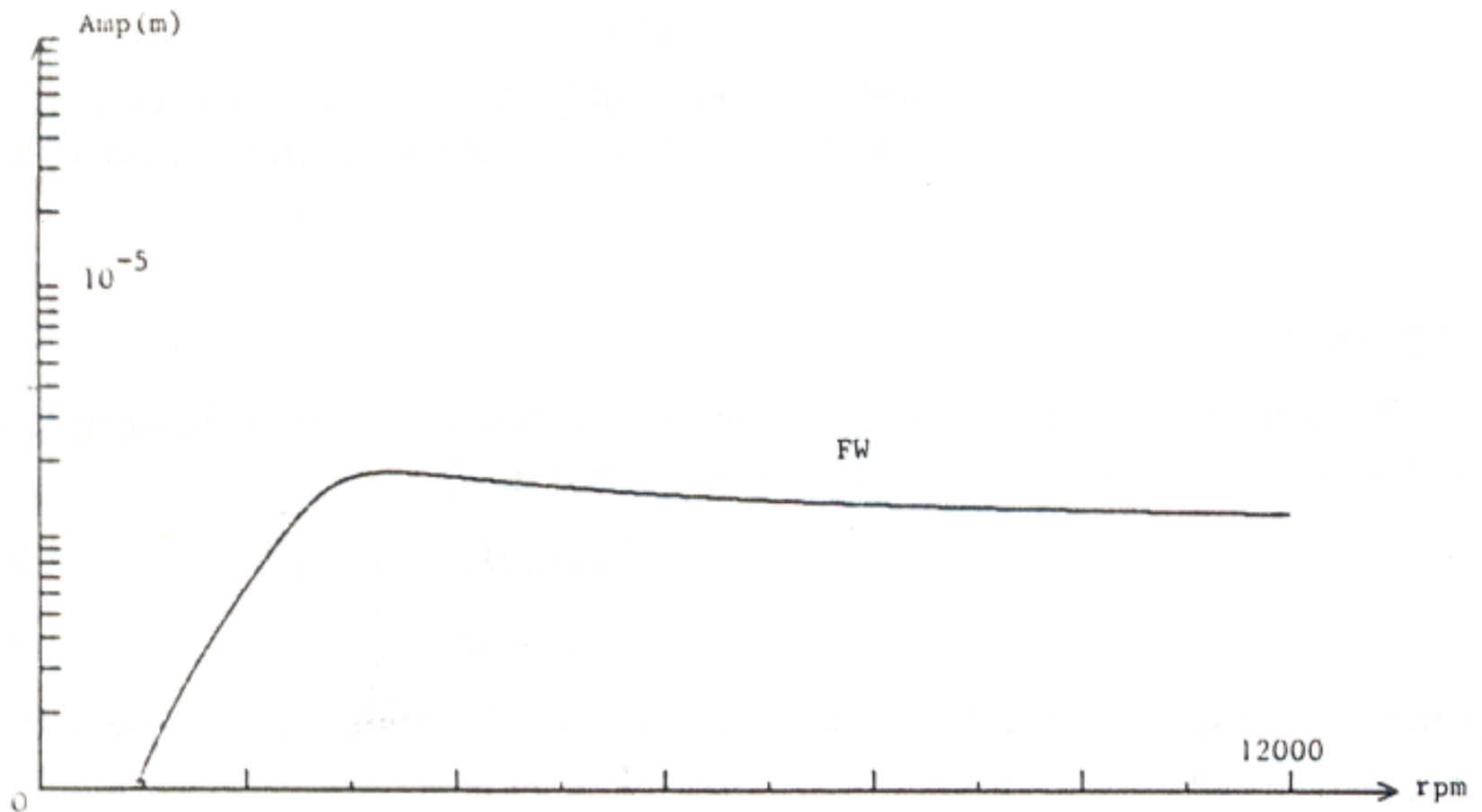
◆ Rotor c/Amortecimento: Resposta ao Desbalanceamento

para baixos amortecimentos, $\beta = 0,0002$



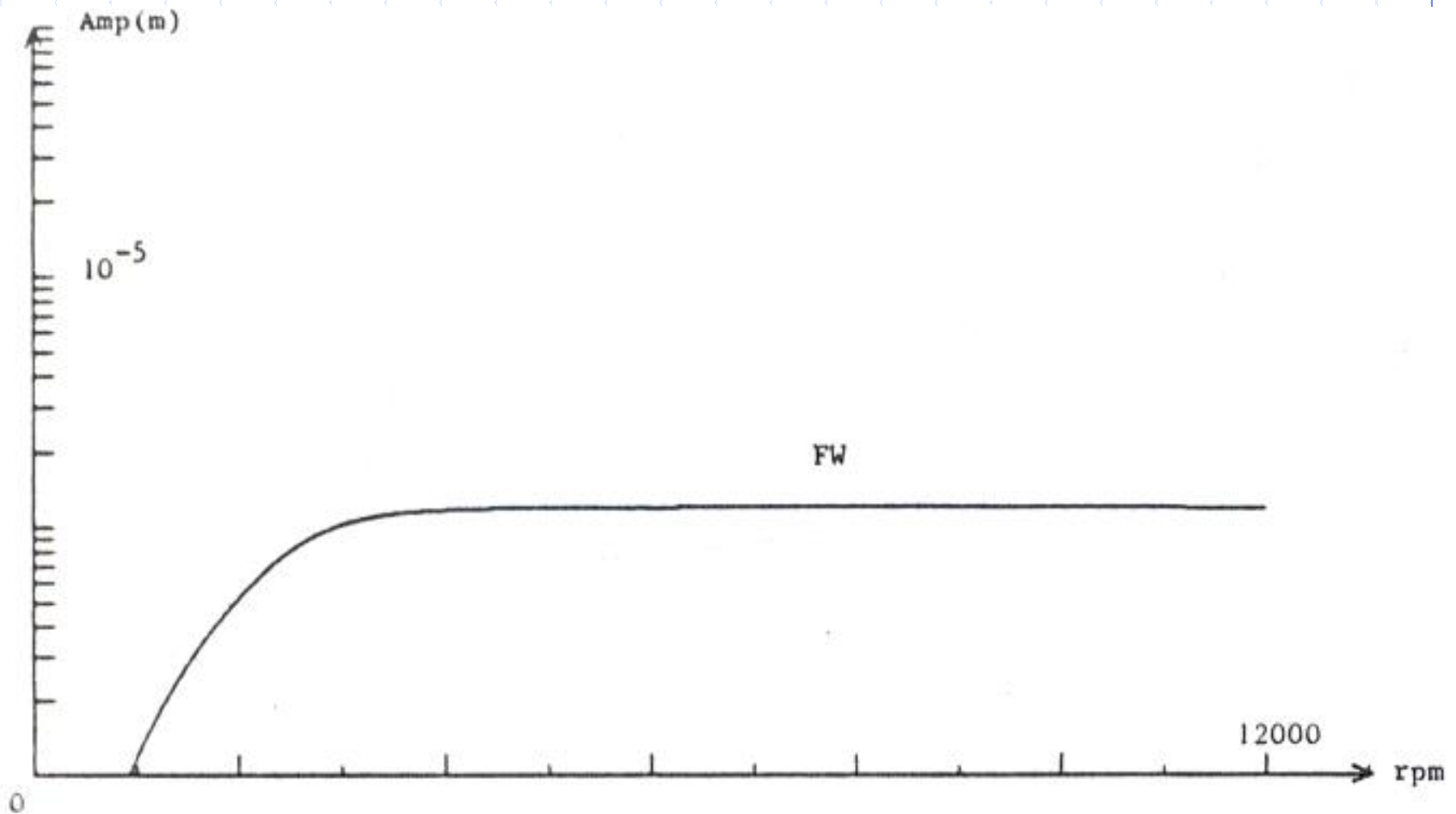
◆ Rotor c/Amortecimento: Resposta ao Desbalanceamento

para amortecimento, $\beta = 0,015$



◆ Rotor c/Amortecimento: Resposta ao Desbalanceamento

para amortecimento, $\beta = 0,026$



◆ Rotor c/Amortecimento: Resposta a Forças Assíncronas

As componentes das forças já foram apresentadas atrás e as soluções são encontradas através de

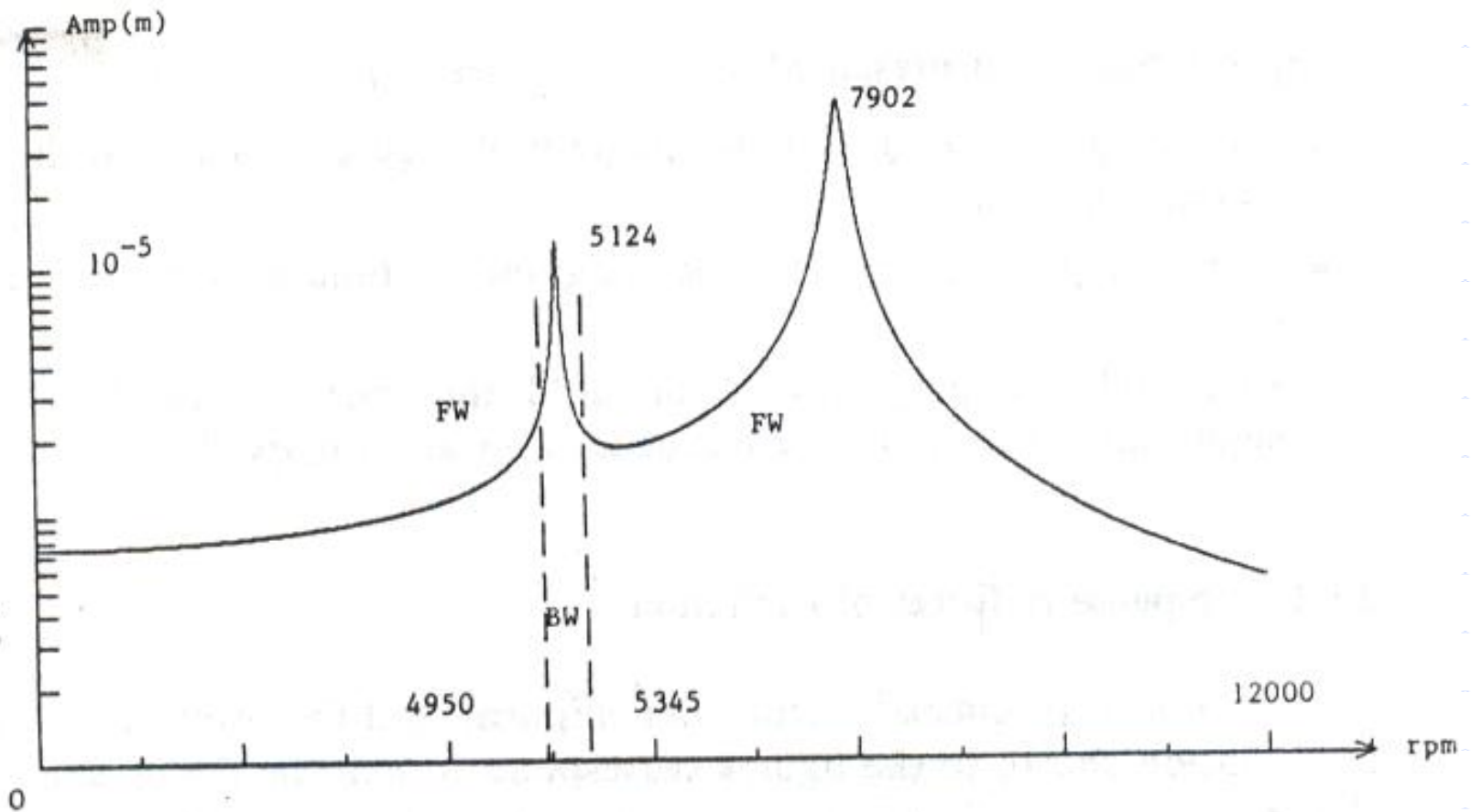
$$q_1 = A_1 \sin s\Omega t + B_1 \cos s\Omega t$$

$$q_2 = A_2 \sin s\Omega t + B_2 \cos s\Omega t$$

Procedendo como anteriormente, os resultados são apresentados nas figuras a seguir

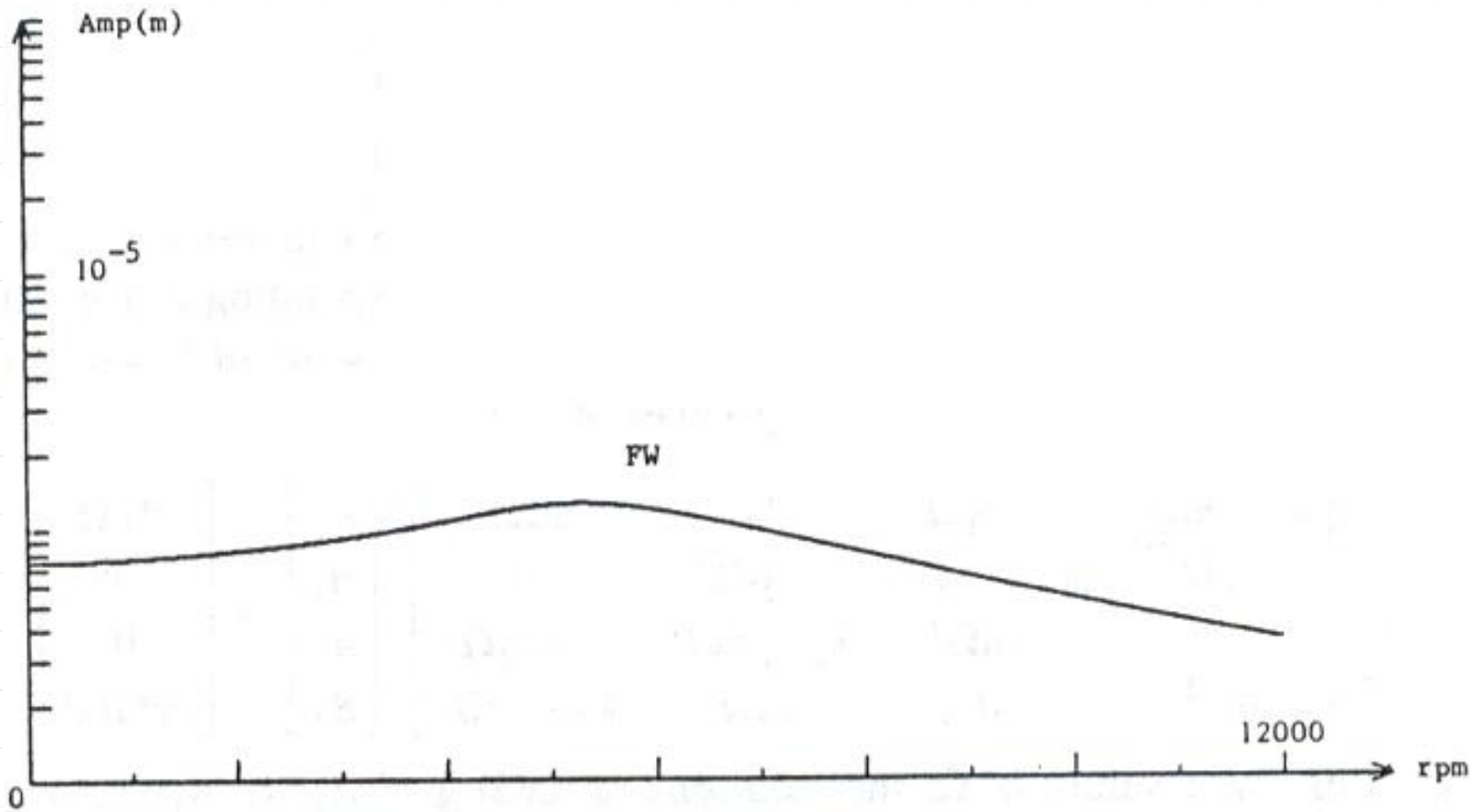
◆ Rotor c/Amortecimento: Resposta a Forças Assíncronas

para baixos amortecimentos, $\beta = 0,0002$



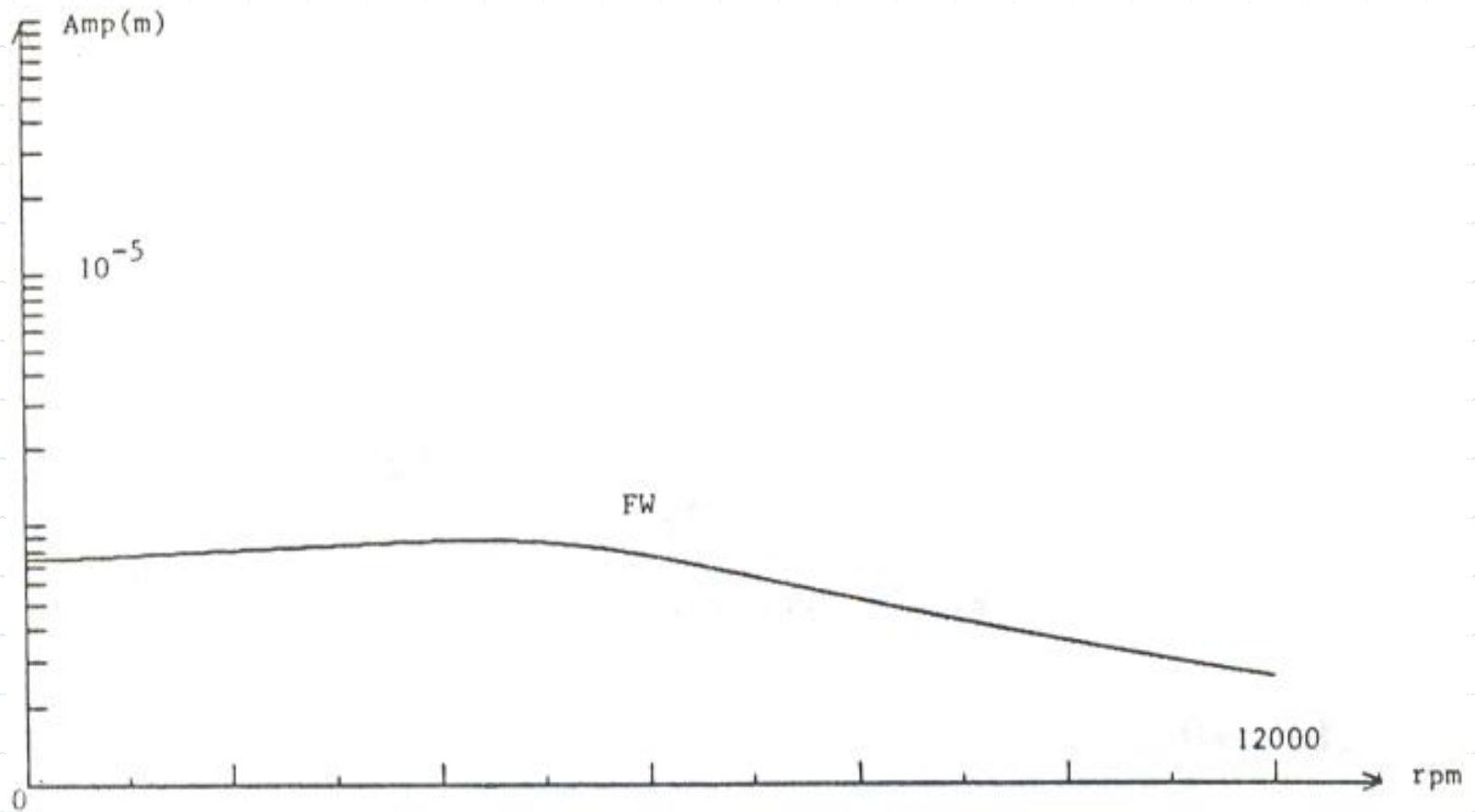
◆ Rotor c/Amortecimento: Resposta a Forças Assíncronas

para elevado amortecimento, $\beta = 0,015$



◆ Rotor c/Amortecimento: Resposta a Forças Assíncronas

para amortecimento muito elevado, $\beta = 0,026$



◆ Rotor c/Amortecimento: Resposta a Forças Harmônicas

As componentes de forças são as mesmas anteriormente apresentadas e as soluções são encontradas através de

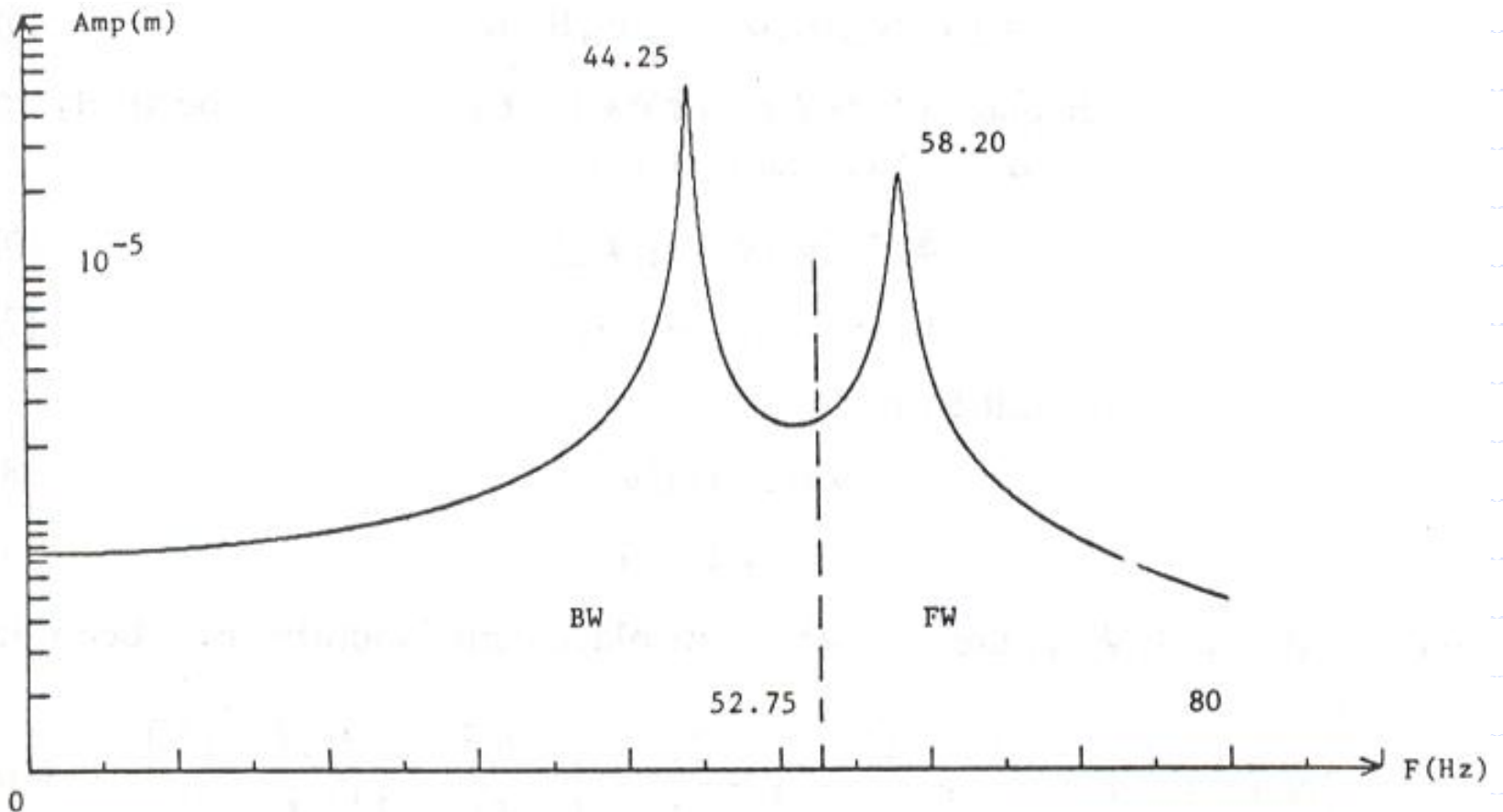
$$q_1 = A_1 \sin \omega t + B_1 \cos \omega t$$

$$q_2 = A_2 \sin \omega t + B_2 \cos \omega t$$

Procedendo como nas seções anteriores, os resultados são apresentados nas figuras seguintes para velocidade de rotação de 4000 rpm.

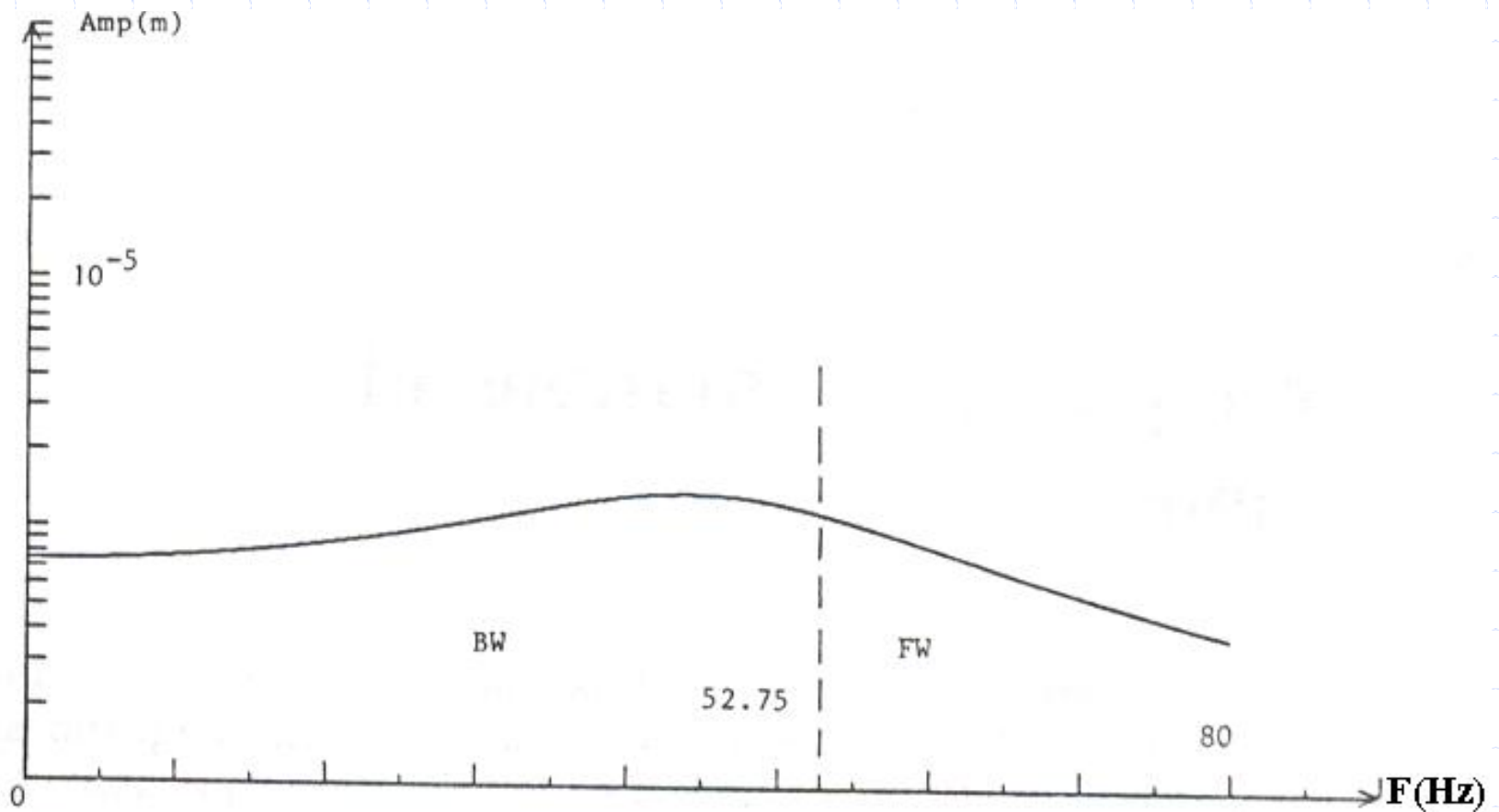
◆ Rotor c/Amortecimento: Resposta a Forças Harmônicas

para baixos amortecimentos, $\beta = 0,0002$



◆ Rotor c/Amortecimento: Resposta a Forças Harmônicas

para amortecimentos elevados, $\beta = 0,015$



◆ Rotor c/Amortecimento: Resposta a Forças Harmônicas

para amortecimento muito elevado, $\beta = 0,026$

