UFPR	UFPR - Departamento de Engenharia Mecânica TM-266 Introdução ao Método dos Elementos Finitos	Lista de exercícios

1. Obtenha a forma fraca do seguinte problema não linear a valores no contorno e identifique as suas variáveis primária e secundária:

$$\begin{aligned} -\frac{d}{dx}\left(u\frac{d}{dx}u\right) + f = 0, &\qquad 0 < x < 1 \\ \left(\frac{d}{dx}u\right)\bigg|_{x=0} = 0 & \\ u(1) = \sqrt{2} & \end{aligned}$$

2. Determine uma solução aproximada para o problema abaixo por meio do método de Rayleigh-Ritz. Empregue no máximo dois polinômios como funções de aproximação definidas no intervalo $0 < x < 1$.

$$\begin{aligned} -\frac{d}{dx}\left((1+x)\frac{d}{dx}u\right) = 0, &\qquad 0 < x < 1 \\ u(0) = 0 & \\ u(1) = 1 & \end{aligned}$$

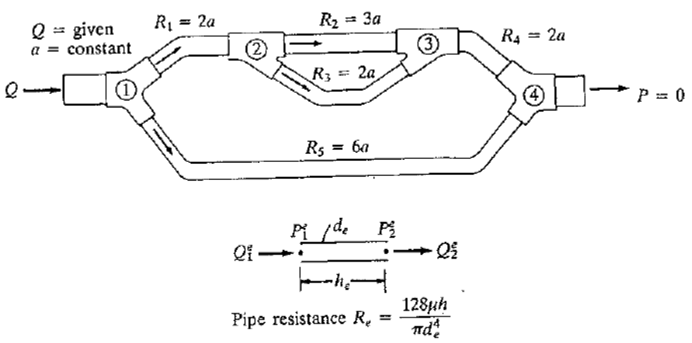
É dada a forma fraca do problema:

$$\int_0^1 (1+x)\frac{dw}{dx}\frac{du}{dx}dx = \left((1+x)w\frac{du}{dx}\right)\bigg|_0^1$$

3. Considere a rede hidráulica mostrada abaixo. Um elemento genérico (um tubo cilíndrico de diâmetro uniforme) com 2 nós também é mostrado abaixo. A variável primária é a pressão P, e a secundária é a vazão Q. O modelo local de elementos finitos é:

$$\frac{1}{R_e}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} P_1^e \\ P_2^e \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} Q_1^e \\ Q_2^e \end{Bmatrix}, \qquad R_e = \frac{128\mu h_e}{\pi d_e^4}$$

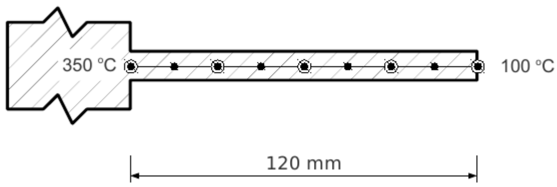
onde d_e é o diâmetro do tubo, h_e é o seu comprimento, e μ é a viscosidade do fluido. Obtenha o modelo global para a malha proposta na figura e imponha nele as condições de contorno.



4. A aleta da figura dissipa calor em regime permanente. As temperaturas nodais dela, obtidas por meio da malha de elementos finitos quadráticos abaixo, são:

$$T = \{350\,,\,345\,,\,334\,,\,315\,,\,288\,,\,252\,,\,209\,,\,150\,,\,100\}^T \quad [^\circ\mathrm{C}]$$

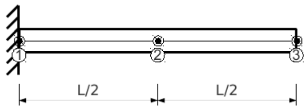
O coeficiente de condutividade térmica da aleta é de 20 W.m^{-1}.°C^{-1}. Faça o gráfico da temperatura ao longo da aleta e determine o fluxo de calor na extremidade mais quente dela.



5. A forma fraca de um problema de barra axialmente carregada restrito a um elemento genérico é:

$$\int_0^{h_e} a\,\frac{d}{d\chi}\,w\,\frac{d}{d\chi}\,u\,d\chi \;=\; \int_0^{h_e} w\,f\,dx \;+\; w(0)\,Q_1^e \;+\; w(h_e)\,Q_2^e$$

Obtenha o modelo local de elementos finitos do problema para um elemento linear genérico e, depois, obtenha o modelo global da malha formada por dois elementos lineares iguais, conforme a figura. Considere a e f constantes.



6. O modelo global de elementos finitos da condução de calor em regime permanente numa parede é dado por:

$$\begin{bmatrix} 10 & -5 & 0 \\ -5 & 20 & -5 \\ 0 & -5 & 10 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 500 \\ 1000 \\ 500 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} Q_1 \\ Q_2 \\ Q_3 \end{Bmatrix}$$

As condições de contorno na parede são temperatura de 1000 °C na face esquerda e calor dissipado por convecção natural num ambiente a 25 °C, na direita. Imponha as condições de contorno no modelo, rearranje e resolva o sistema de equações algébricas, apresentando a solução do problema. Os coeficientes de condutividade térmica e de convecção natural valem respectivamente 150 W.m^{-1}.°C^{-1} e 30 W.m^{-2}.°C^{-1}.

7. Dados abaixo o modelo local de elementos finitos para um elemento genérico e a matriz de conectividade dos elementos para uma determinada malha, determine o modelo global de elementos finitos para essa malha.

$$\begin{bmatrix} 70 & -80 & 10 \\ -80 & 160 & -80 \\ 10 & -80 & 70 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1^e \\ u_2^e \\ u_3^e \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 10 \\ 40 \\ 10 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} Q_1^e \\ Q_2^e \\ Q_3^e \end{Bmatrix}$$

$$[B] = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 4 & 5 \\ 3 & 6 & 7 \end{bmatrix}$$

Também imponha as "forças" concentradas 20, -10 e 5 nos nós 1, 5 e 7 da malha, respectivamente.

8. Dados abaixo o modelo de elementos finitos para um elemento quadrático genérico e a matriz de conectividade entre os elementos de uma malha, determine o modelo de elementos finitos para essa malha.

Modelo de elementos finitos para um elemento genérico:

$$\begin{bmatrix} 70 & -80 & 10 \\ -80 & 160 & -80 \\ 10 & -80 & 70 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1^e \\ u_2^e \\ u_3^e \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 10 \\ 40 \\ 10 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} Q_1^e \\ Q_2^e \\ Q_3^e \end{Bmatrix}$$

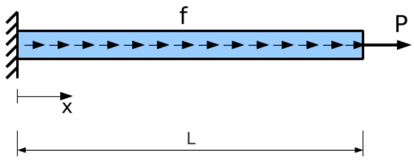
Matriz de conectividade dos elementos da malha:

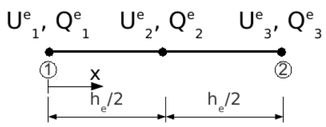
$$[B] = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 4 & 5 \\ 3 & 6 & 7 \end{bmatrix}$$

9. A equação que rege a deformação axial de uma barra elástica sob ação da variação de temperatura ΔT e dos carregamentos axiais distribuído e concentrado, f e P, respectivamente, é:

$$
\begin{aligned}
&-\frac{d}{dx}\left[EA\left(\frac{d}{dx}\,u - \alpha \Delta T\right)\right] = f, \qquad 0 < x < L \\
&u(0) = 0
\end{aligned}
$$

onde α é o coeficiente de dilatação térmica, E é o módulo de elasticidade e A é a área da seção transversal. Utilizando como malha apenas um elemento quadrático, determine a expressão aproximada do deslocamento axial ao longo de uma barra de comprimento $2,0$ m, fixa à esquerda, submetida à força axial de 1800 N em tração à direita, à força distribuída $f = 1000$ N/m para a direita e à variação de temperatura de 15 °C. Considere $A = 3,87 \cdot 10^{-3}$ m^2, $E = 2,06 \cdot 10^{11}$ Pa e $\alpha = 12 \cdot 10^{-6}$ °C^{-1}.



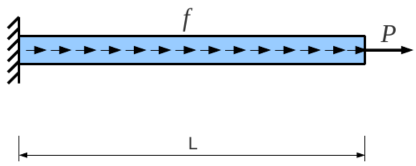


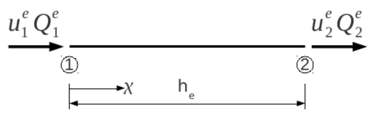
10. A equação governante da deformação axial de uma barra elástica sob ação do carregamento distribuído f e da carga concentrada P é:

$$
\begin{aligned}
&-\frac{d}{dx}\left(EA\frac{d}{dx}\,u\right) = f, \qquad 0 < x < L \\
&u(0) = 0 \\
&\left.\left(EA\frac{d}{dx}\,u\right)\right|_{x=L} = P
\end{aligned}
$$

onde E é o módulo de elasticidade e A é a área de seção transversal. Utilizando 2 elementos lineares de mesmo comprimento, determine pelo método dos elementos finitos a força axial ao longo dos dois elementos. A barra de comprimento $L = 750$ mm é fixa à esquerda e submetida à carga axialmente dsitribuída $f = 2,0$ N/mm e à força axial $P = 1800$ N em tração à direita. Adote $A = 3,87$ mm^2 e $E = 2,06 \cdot 10^{11}$ Pa. É dada abaixo a forma fraca do problema restrito a um elemento genérico:

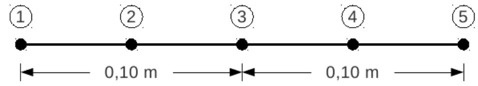
$$
\int_0^{h_e} EA\,\frac{d}{d\chi}\,w\frac{d}{d\chi}\,u\,d\chi = \int_0^{h_e} f\,w\,d\chi + Q_1^e w(0) + Q_2^e w(h_e)
$$





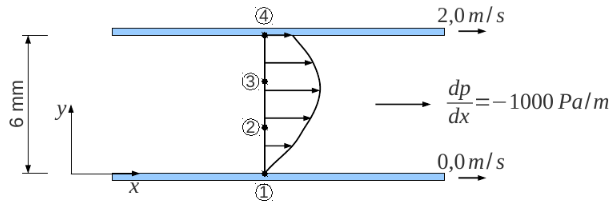
11. Os valores nodais da solução pelo MEF de um problema de transferência de calor em regime permanente ao longo de uma barra por meio de uma malha, mostrada abaixo, de 2 elementos quadráticos iguais foram: $u_1 = 20$ °C; $u_2 = 25$ °C; $u_3 = 38$ °C; $u_4 = 50$ °C; $u_5 = 55$ °C. Sendo o coeficiente de condutividade térmica da barra uniforme e igual a 100 W.m^{-1}.°C^{-1}, determine e apresente graficamente o fluxo de calor ao longo da barra.

12. Dado o modelo global de elementos finitos da distribuição de velocidade na seção transversal do escoamento de água entre duas placas paralelas, uma móvel com velocidade $v_0 = 2,0$ m/s e outra fixa, conforme a figura, obtenha



a tensão de cisalhamento em ambas as placas e a distribuição de velocidade na seção transversal do escoamento, mostrando-a depois por meio de um gráfico. A viscosidade da água é $\mu = 1,00 \cdot 10^{-3}$ N.s/m^2.

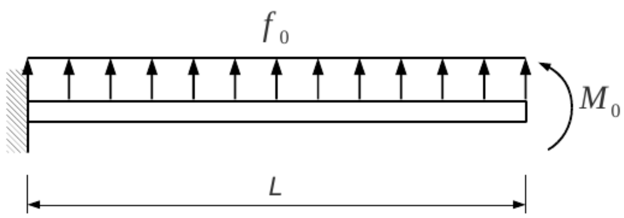
$$\begin{bmatrix} 0,50 & -0,50 & 0,00 & 0,00 \\ -0,50 & 1,00 & -0,50 & 0,00 \\ 0,00 & -0,50 & 1,00 & -0,50 \\ 0,00 & 0,00 & -0,50 & 0,50 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \\ U_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1,00 \\ 2,00 \\ 2,00 \\ 1,00 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} Q_1 \\ Q_2 \\ Q_3 \\ Q_4 \end{Bmatrix}$$



13. Obtenha a forma fraca do seguinte problema a valores no contorno restrito a um elemento quadrático genérico:

$$\frac{d^2}{d\chi^2}\, u + k\, u^2 = f, \quad 0 < \chi < h_e$$
$$-\frac{d}{d\chi}\, u\bigg|_{\chi=0} = Q_1$$
$$\frac{d}{d\chi}\, u\bigg|_{\chi=h_e} = Q_3$$

14. Determine o modelo global de elementos de uma viga carregada e apoiada conforme a figura por meio de uma malha de 2 elementos iguais, e imponha nele as condições de apoio. A rigidez à flexão e a força distribuída ao longo da viga são uniformes e iguais a EI e f_0, respectivamente.



15. Num elemento de viga de comprimento $0,1$ m obtiveram-se $u_1^e = -1,25 \cdot 10^{-5}$ m, $u_2^e = 4,36 \cdot 10^{-5}$ rad, $u_3^e = -2,01 \cdot 10^{-5}$ m e $u_4^e = 2,95 \cdot 10^{-5}$ rad. Sendo a rigidez à flexão do elemento igual a 1150 kN.m^2, determine os diagramas de força cortante e momento fletor nesse elemento.

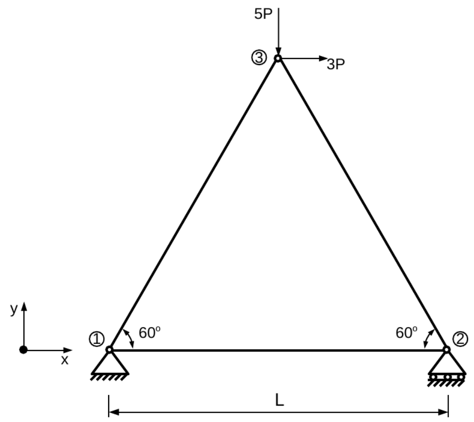
16. Determine as forças axiais da treliça abaixo pelo método dos elementos finitos. A rigidez axial das barras são iguais a EA.

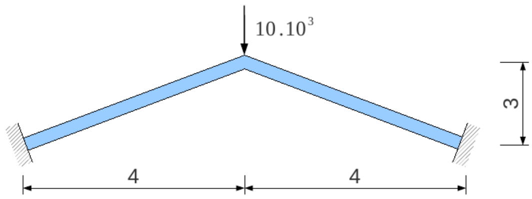
17. Dado o pórtico mostrado abaixo, obtenha o modelo global de elementos finitos por meio de uma malha de apenas 2 elementos e imponha nele as condições de apoio e de carregamento. São dados $EI = 125/2$ e $I/A = 25/2$, ambos uniformes ao longo do pórtico.

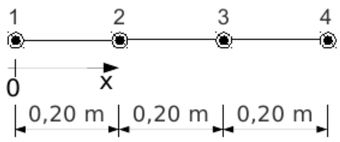
18. O modelo de elementos finitos de um problema de condução de calor em regime permanente unidimensional a partir de uma malha com 3 elementos lineares fornece os seguintes valores nodais de temperatura: $U_1 = -10,0$ °C, $U_2 = -8,60$ °C, $U_3 = -6,40$ °C e $U_4 = -3,40$ °C. Sendo a solução exata dada por $T = 10x^2 + 5x - 10$ [°C], determine o erro da solução de elementos finitos na norma $L^2(\Omega)$.

19. Dado um elemento quadrático, determine o coeficiente K_{12}^e de sua matriz de rigidez local cujos coeficientes são dados por:

$$K_{ij}^e = \int_{x_1^e}^{x_3^e} \frac{d}{dx}\,\psi_i^e\, \frac{d}{dx}\,\psi_j^e\, dx$$







Empregue a quadratura de Gauss com 4 pontos de integração, diga se o coeficiente assim obtido é exato e explique por que. Assuma que os nós no elemento mestre estão igualmente espaçados.

20. Dados os valores nodais de temperatura de uma barra de comprimento $1,0$ m obtidos pelo MEF por meio de uma malha com 2 elementos lineares de igual comprimento:

$U_1 = 100,0$ °C, $U_2 = 91,25$ °C e $U_3 = 90,00$ °C,

determine o erro da solução na norma $L^2(\Omega)$ por meio da quadratura de Gauss-Legendre. A solução exata da distribuição de temperatura ao longo da barra é $T = 10x^3 - 20x + 100$ [°C].

21. A solução de um problema de deformação axial de uma barra por meio de uma malha de elementos quadráticos de comprimento característico h apresentou o seguinte erro na norma da energia:

$$\|e\|_{H^1(\Omega)} = 4,1 \cdot 10^1$$

Qual seria o erro estimado nessa mesma norma quando o comprimento caracterísitico for reduzido a $1/5$? Justifique.

22. Dada a integral:

$$\int_0^1 \ln(1+x)\,dx$$

determine o valor aproximado da integral I pela quadratura de Gauss-Legendre. Empregue uma transformação de coordenadas linear e 4 pontos de integração. Estime o erro obtido nesta integração. Para facilitar, a derivada de 8ª ordem de $\ln(1+x)$ é:

$$\frac{d^8}{dx^8}\ln(1+x) = -\frac{5040}{(x+1)^8}$$

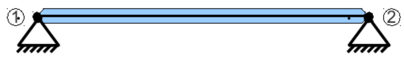
23. Obteve-se a solução da distribuição de temperatura em uma barra de comprimento igual a 1 pelo MEF através de uma malha de um único elemento linear, cujos resultados nodais foram: $U_1 = 0,00$ °C e $U_2 = 152$ °C. Sendo a solução exata:

$$u(x) = \frac{152}{e-1}\left(e^x - 1\right) \ \ [°C]$$

determine o erro da solução pelo MEF na norma da energia. Integre por meio da quadratura de Gauss-Legendre com 2 pontos de integração e estime o erro obtido nesta integração.

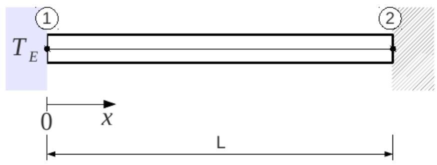
24. Ao empregar o MEF na solução de um problema de 2ª ordem por meio de uma malha de elementos quadráticos de comprimento característico h, o erro na norma $L^2(\Omega)$ foi igual a e_0. Estime o erro na mesma norma ao se empregar uma malha de elementos cúbicos de comprimento característico $\dfrac{h}{2}$.

25. Determine as 2 primeiras frequências naturais e respectivos modos de vibrar da viga bi-apoiada abaixo utlizando apenas um elemento como malha. São dados para o material o módulo de elasticidade de 206 GPa e a densidade de $7,8 \cdot 10^3$ kg/m^3, e para a geometria o comprimento de $0,50$ m, a área transversal de $1,20 \cdot 10^{-4}$ m^2 e o momento de inércia de área de $8,00 \cdot 10^{-9}$ m^4.



26. Determine as 2 primeiras frequências naturais e respectivos modos de vibrar da viga em balanço abaixo utlizando apenas um elemento como malha. São dados para o material o módulo de elasticidade de 206 GPa e a densidade de $7,8 \cdot 10^3$ kg/m^3, e para a geometria o comprimento de $0,50$ m, a área transversal de $1,20 \cdot 10^{-4}$ m^2 e o momento de inércia de área de $8,00 \cdot 10^{-9}$ m^4.

27. O modelo global de elementos finitos do problema de transferência de calor transiente na barra de comprimento $L = 1$ mostrada na figura abaixo é dado a seguir:



$$h \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{U}_1 \\ \dot{U}_2 \end{Bmatrix} + \frac{2}{h} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_1 \\ U_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} Q_1 \\ Q_2 \end{Bmatrix}$$

As condições de contorno e iniciais são respectivamente:

$$U(0,t) = 25$$
$$\frac{\partial}{\partial x} U \bigg|_{(1,t)} = 0$$
$$U(x,0) = 800$$

Adotando um esquema numérico com $\alpha = 1$, obtenha a temperatura do nó 2 no instante $t_1 = 0,1$.

28. O modelo global de elementos finitos do movimento axial da barra da figura abaixo, cuja extremidade livre está solidária a um bloco rígido, é:

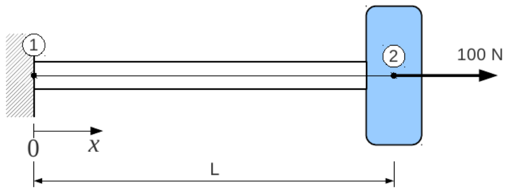
$$\begin{bmatrix} 2,00 & 1,00 \\ 1,00 & 8,00 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{u}_1 \\ \ddot{u}_2 \end{Bmatrix} + 4,00 \cdot 10^4 \begin{bmatrix} 1,00 & -1,00 \\ -1,00 & 1,00 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} Q_1 \\ Q_2 \end{Bmatrix} \quad \text{[SI]}$$

As condições de contorno do problema são:

$$u(0,t) = 0$$
$$\left(EA \frac{d}{dx} u \right) \bigg|_{(L,t)} = 100\,\text{N}$$

e as condições iniciais:

$$u(x,0) = 0$$
$$\dot{u}(x,0) = 0$$



Empregando o método de Newmark com $\alpha = 0$ e $\gamma = 1$, obtenha o deslocamento da extremidade livre decorrido $0,01\,\mathrm{s}$. Adote para isto $\Delta t = 0,01\,\mathrm{s}$ no método Newmark. Observe que, antes da força axial ser aplicada na extremidade livre, no instante $t = 0$, a barra está completamente descarregada.

29. O modelo global de elementos finitos de um problema de transferência de calor com geração de calor é:

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{u}_1 \\ \dot{u}_2 \end{Bmatrix} + 2,00 \cdot 10^2 \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 10\,(1 - \mathrm{e}^{-t}) \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} Q_1 \\ Q_2 \end{Bmatrix} \quad [\mathrm{SI}]$$

Suas condições de contorno são:

$$u(0,t) = 10 \quad [\mathrm{SI}]$$
$$Q_2 = \frac{\partial}{\partial x} u \bigg|_{(1,t)} = 0 \quad [\mathrm{SI}]$$

e suas condições iniciais:

$$u(x,0) = 10 \quad [\mathrm{SI}]$$

Obtenha pelo esquema da diferença regressiva ($\alpha = 1$) a solução no nó 2 decorrido $0,1$s. Sugestão: adote $\Delta t = 0,1$s no esquema.