

ESTIMATIVA DE ERROS DE SOLUÇÕES NUMÉRICAS MULTIDIMENSIONAIS PARA ORDEM APARENTE CONVERGENTE

Carlos Henrique Marchi

Departamento de Engenharia Mecânica

Universidade Federal do Paraná

Caixa postal 19011

81531-990, Curitiba, PR, Brasil

marchi@demec.ufpr.br

Antônio Fábio Carvalho da Silva

Departamento de Engenharia Mecânica

Universidade Federal de Santa Catarina

88040-900, Florianópolis, SC, Brasil

fabio@emc.ufsc.br

Estimação de erro multidimensional para ordem aparente convergente

Agradecimentos

O primeiro autor agradece à Universidade Federal do Paraná (UFPR), à Fundação Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES), ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica da Universidade Federal de Santa Catarina (UFSC) e ao Laboratório de Simulação Numérica em Mecânica dos Fluidos e Transferência de Calor (SINMEC/UFSC) pelo apoio financeiro e de infra-estrutura.

RESUMO

O objetivo principal deste trabalho é fundamentar matematicamente procedimentos que são apresentados para estimar o erro de soluções numéricas de problemas multidimensionais. Para tanto, considera-se que: o erro numérico é causado apenas por erros de truncamento, neste caso ele é chamado de erro de discretização; as estimativas de erro ou as incertezas são baseadas na extrapolação de Richardson; e as aproximações numéricas são unidimensionais sobre malhas uniformes em cada dimensão. São analisados dois casos: quando as malhas são refinadas simultaneamente em todas as quatro dimensões (x,y,z,t) ; e quando o refino de malha em cada dimensão é separado das demais. São apresentados exemplos de aplicação em problemas de transferência de calor e mecânica dos fluidos, resolvidos com os métodos de diferenças finitas e volumes finitos. Verificou-se que, para a situação em que a ordem aparente da incerteza numérica é do tipo convergente, podem ser calculados dois valores de incerteza que limitam o erro de discretização.

Palavras-chave: simulação numérica, erros de discretização, erros numéricos, verificação, dinâmica dos fluidos, diferenças finitas, volumes finitos.

NOMENCLATURA

c	coeficientes da equação do erro de truncamento
C	coeficientes da equação do erro de discretização
E	erro de discretização da solução numérica
h	tamanho dos elementos da malha
K	coeficientes da equação da incerteza da solução numérica
p_L	ordem assintótica do erro de discretização
p_U	ordem aparente da incerteza
q	razão de refino de malha
t	coordenada temporal
U	incerteza ou erro estimado da solução numérica
U_C	incerteza da solução numérica segundo o estimador convergente
U_{Ri}	incerteza da solução numérica segundo o estimador de Richardson
x, y, z	coordenadas espaciais
ε	erro de truncamento

ϕ	solução numérica de uma variável de interesse
Φ	solução analítica exata de uma variável de interesse
ϕ_C	solução numérica convergente
ϕ_∞	estimativa da solução analítica exata (Φ) obtida por extrapolação
Λ	variável dependente

Subscritos

1	malha fina
2	malha grossa
3	malha supergrossa
b	malha-base
d	dimensão (1= x , 2= y , 3= z , 4= t)

INTRODUÇÃO

Ainda é comum encontrar na literatura (Jameson e Martinelli, 1998) trabalhos nos quais a magnitude do erro de discretização (Roache, 1998) é avaliada apenas apresentando-se resultados numéricos obtidos com duas ou três malhas diferentes. Mas também já é comum o emprego da extrapolação de Richardson (Richardson, 1910) para estimar erros de discretização, por exemplo, o trabalho de Roy e Blottner (2001). Também tem sido empregado uma variante da extrapolação de Richardson, o estimador *GCI* (Roache, 1994), por exemplo, no trabalho de Cadafalch *et al.* (2002).

Para cada variável de interesse, a estimativa do erro feita com a extrapolação de Richardson utiliza soluções numéricas obtidas em duas ou mais malhas diferentes, isto é, malhas com número diferente de volumes, pontos ou elementos. Desta forma, num problema bidimensional, por exemplo, as malhas podem ser refinadas nas duas direções (x e y) simultaneamente ou em cada direção separadamente.

O objetivo deste trabalho é fundamentar matematicamente procedimentos que são apresentados para estimar erros de soluções numéricas de problemas multidimensionais para a situação onde a ordem aparente (De Vahl Davis, 1983) da estimativa do erro é do tipo convergente (Marchi e Silva, 2002). Isso permite encontrar limites inferior e superior para o erro. Além disso, o presente trabalho é desenvolvido considerando:

- 1) A teoria e as definições adotadas no trabalho de Marchi e Silva (2002), que aborda apenas problemas unidimensionais.
- 2) O erro numérico é causado apenas por erros de truncamento, isto é, considera-se que não existem erros de iteração, de arredondamento e de programação (Marchi e Silva, 2002), ou, então, eles são muito pequenos em relação aos erros de truncamento. Neste caso, o erro numérico é denominado de erro de discretização.
- 3) As estimativas do erro de discretização são do tipo *a posteriori* e baseadas na extrapolação de Richardson (Richardson, 1910; Blottner, 1990; Roache, 1994), que usa múltiplas malhas.
- 4) Até três dimensões espaciais (x,y,z) e uma temporal (t).
- 5) As aproximações numéricas usadas para discretizar os modelos matemáticos são unidimensionais.
- 6) As malhas são uniformes em cada dimensão.
- 7) As estimativas do erro de discretização podem ser aplicadas às variáveis dependentes do modelo matemático ou a qualquer variável obtida a partir delas por diferenciação, integração ou outra operação matemática.
- 8) São conhecidas as soluções analíticas exatas das variáveis de interesse dos problemas usados como exemplo neste trabalho. Isso permite comparar a estimativa do erro (incerteza) com o erro verdadeiro.

Nas próximas seções, caracteriza-se o erro de discretização multidimensional e são apresentados procedimentos para estimar o erro de discretização quando as malhas são refinadas simultaneamente em todas as dimensões e quando o refino é separado em cada dimensão. São apresentados exemplos de aplicação que envolvem condução de calor bidimensional em regime permanente, condução de calor unidimensional em regime transiente e escoamento bidimensional em regime permanente de fluido viscoso incompressível. As soluções numéricas destes problemas são obtidas através dos métodos de diferenças finitas e de volumes finitos. Finalmente, apresenta-se a conclusão do trabalho.

ERRO DE DISCRETIZAÇÃO MULTIDIMENSIONAL

Considere-se a equação de Laplace bidimensional (Incropera e DeWitt, 1996):

$$\frac{\partial^2 \Lambda}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Lambda}{\partial y^2} = 0 \quad (1)$$

onde x e y são as variáveis independentes e Λ é a variável dependente. Esta equação pode ser discretizada com aproximações numéricas do tipo diferença central (Ferziger e Peric, 1999) para cada um de seus termos, isto é,

$$\left(\frac{\partial^2 \Lambda}{\partial x^2}\right)_P \approx \frac{(\Lambda_W + \Lambda_E - 2\Lambda_P)}{h_x^2} \quad (2)$$

$$\left(\frac{\partial^2 \Lambda}{\partial y^2}\right)_P \approx \frac{(\Lambda_S + \Lambda_N - 2\Lambda_P)}{h_y^2} \quad (3)$$

onde

$$h_x = x_P - x_W = x_E - x_P = \dots = \text{constante 1} \quad (4)$$

$$h_y = y_P - y_S = y_N - y_P = \dots = \text{constante 2} \quad (5)$$

Nas Eqs. (2) a (5), os subíndices referem-se à Fig. 1, onde P representa um nó genérico da malha sobre o qual são feitas aproximações numéricas, e W , E , S e N representam seus nós vizinhos. Outras aproximações numéricas podem ser vistas nos textos de Ferziger e Peric (1999) e Tannehill *et al.* (1997).

Com base na série de Taylor (Kreyszig, 1999), pode-se verificar que os erros de truncamento (Tannehill *et al.*, 1997) das aproximações numéricas dadas nas Eqs. (2) e (3) são, respectivamente,

$$\varepsilon \left(\frac{\partial^2 \Lambda}{\partial x^2}\right)_P = -\left(\frac{\partial^4 \Lambda}{\partial x^4}\right)_P \frac{h_x^2}{12} - \left(\frac{\partial^6 \Lambda}{\partial x^6}\right)_P \frac{h_x^4}{360} - \dots \quad (6)$$

$$\varepsilon \left(\frac{\partial^2 \Lambda}{\partial y^2}\right)_P = -\left(\frac{\partial^4 \Lambda}{\partial y^4}\right)_P \frac{h_y^2}{12} - \left(\frac{\partial^6 \Lambda}{\partial y^6}\right)_P \frac{h_y^4}{360} - \dots \quad (7)$$

onde os três pontos indicam uma série infinita.

Com as Eqs. (2) e (3) na Eq. (1), obtém-se

$$\frac{(\Lambda_W + \Lambda_E - 2\Lambda_P)}{h_x^2} + \frac{(\Lambda_S + \Lambda_N - 2\Lambda_P)}{h_y^2} = 0 \quad (8)$$

Neste caso, o erro de truncamento da Eq. (8) resulta na soma das Eqs. (6) e (7).

Generalizando, para uma equação diferencial quadridimensional (x,y,z,t) que tenha diversos termos em cada dimensão, com derivadas de várias ordens diferentes, o erro de truncamento da equação diferencial discretizada (*EDD*), em cada nó P da malha, resulta em

$$\varepsilon (EDD)_P = \sum_{d=1}^4 \left[\sum_{i=1}^{\infty} \left(c_{i,d} h_d^{p_{i,d}} \right) \right] \quad (9)$$

onde $d = 1, 2, 3$ e 4 representa, respectivamente, as dimensões x, y, z e t ; h_d representa a distância entre dois nós consecutivos da malha em cada dimensão d ; i representa cada um dos termos da série infinita, como nas Eqs. (6) e (7); $c_{i,d}$ representa coeficientes que dependem de derivadas de Λ em cada nó da malha, mas independem de h_d ; finalmente, $p_{i,d}$ são as ordens verdadeiras (Marchi e Silva, 2002) do erro de truncamento, que são números inteiros e positivos.

Por analogia (Roache, 1998; Ferziger e Peric, 1999) à equação do erro de truncamento (ε), Eq. (9), pode-se assumir que o erro de discretização (E) de qualquer variável de interesse (ϕ) é dado por

$$E(\phi) = \sum_{d=1}^4 \left[\sum_{i=1}^{\infty} \left(C_{i,d} h_d^{p_{i,d}} \right) \right] \quad (10)$$

onde ϕ pode ser a solução numérica da variável dependente (Λ) na equação diferencial, numa coordenada específica, sua média do campo inteiro, ou qualquer outra variável obtida a partir de Λ ; e os coeficientes $C_{i,d}$ e os expoentes $p_{i,d}$ podem ser ou não iguais aos coeficientes $c_{i,d}$ e $p_{i,d}$ da Eq. (9), dependendo de ϕ . Evidentemente, quando a solução analítica exata (Φ) é conhecida, o erro de discretização da solução numérica (ϕ) também pode ser calculado pela sua definição, dada por

$$E(\phi) = \Phi - \phi \quad (11)$$

A determinação do erro de discretização através da Eq. (10) ou (11) requer o conhecimento da solução analítica exata (Φ). Infelizmente, nos problemas práticos, Φ é

desconhecido. Nestes casos, emprega-se o conceito de incerteza (U) (Mehta, 1996), definida por

$$U(\phi) = \phi_{\infty} - \phi \quad (12)$$

onde ϕ_{∞} representa uma estimativa de Φ . A obtenção de ϕ_{∞} em problemas multidimensionais é tratada nas duas próximas seções. Para tanto, faz-se uma simplificação da Eq. (10), retendo-se apenas o primeiro termo de cada dimensão, isto é, o termo que domina os demais à medida que $h_d \rightarrow 0$. Desta forma, obtém-se

$$U(\phi) = K_x h_x^{p_x} + K_y h_y^{p_y} + K_z h_z^{p_z} + K_t h_t^{p_t} \quad (13)$$

onde os coeficientes K_d são admitidos serem constantes, isto é, são independentes de h_d ; e p_x , p_y , p_z e p_t são as ordens assintóticas (Marchi e Silva, 2002) do erro de discretização de cada dimensão. Em geral, o valor da incerteza (U) difere do erro (E) devido à simplificação feita ao se passar da Eq. (10) para a Eq. (13).

REFINO SIMULTÂNEO DE MALHA EM TODAS AS DIMENSÕES

O refino simultâneo é caracterizado quando o número de nós, elementos ou volumes de controle de todas as dimensões varia entre as malhas utilizadas para estimar o erro de discretização. Por exemplo, num problema tridimensional, refinar a malha $10*10*10$ volumes de controle para $15*20*30$. O caso em que o refino de malha em cada dimensão é separado das demais é abordado na próxima seção. A seguir são analisadas duas situações: quando a razão de refino de malha é variável entre cada dimensão; e quando ela é constante.

Razão de Refino de Malha Variável

Com as Eqs. (12) e (13) escritas para cinco malhas diferentes, isto é, com número diferente de nós, elementos ou volumes de controle entre elas em cada dimensão, denotadas por $h_{d,1}$, $h_{d,2}$, $h_{d,3}$, $h_{d,4}$ e $h_{d,5}$, e cujas soluções numéricas são, respectivamente, ϕ_1 , ϕ_2 , ϕ_3 , ϕ_4 e ϕ_5 , obtém-se

$$\left. \begin{aligned}
\phi_{\infty} - \phi_1 &= K_x h_{x,1}^{p_x} + K_y h_{y,1}^{p_y} + K_z h_{z,1}^{p_z} + K_t h_{t,1}^{p_t} \\
\phi_{\infty} - \phi_2 &= K_x h_{x,2}^{p_x} + K_y h_{y,2}^{p_y} + K_z h_{z,2}^{p_z} + K_t h_{t,2}^{p_t} \\
\phi_{\infty} - \phi_3 &= K_x h_{x,3}^{p_x} + K_y h_{y,3}^{p_y} + K_z h_{z,3}^{p_z} + K_t h_{t,3}^{p_t} \\
\phi_{\infty} - \phi_4 &= K_x h_{x,4}^{p_x} + K_y h_{y,4}^{p_y} + K_z h_{z,4}^{p_z} + K_t h_{t,4}^{p_t} \\
\phi_{\infty} - \phi_5 &= K_x h_{x,5}^{p_x} + K_y h_{y,5}^{p_y} + K_z h_{z,5}^{p_z} + K_t h_{t,5}^{p_t}
\end{aligned} \right\} \quad (14)$$

Neste sistema de equações, são conhecidos todos os valores de h_d , p_d , ϕ_1 , ϕ_2 , ϕ_3 , ϕ_4 e ϕ_5 . As incógnitas são as quatro constantes K_d e ϕ_{∞} . Com a solução deste sistema para ϕ_{∞} , a partir da Eq. (12), pode-se obter a incerteza de cada uma das cinco soluções numéricas empregadas na Eq. (14). Para se obter ϕ_{∞} e calcular as incertezas em problemas tridimensionais e bidimensionais em regime permanente são necessárias apenas quatro e três soluções numéricas, respectivamente. Finalmente, no caso unidimensional, com apenas duas soluções numéricas obtém-se ϕ_{∞} e U conforme demonstrado por Marchi e Silva (2002).

No sistema de Eqs. (14), admite-se que as ordens assintóticas p_x , p_y , p_z e p_t sejam conhecidas a partir das aproximações numéricas empregadas na discretização da equação diferencial. Porém, elas podem ser deixadas livres, isto é, elas podem ser obtidas através do conceito de ordem aparente (De Vahl Davis, 1983). Desta forma, no caso quadridimensional haverá mais quatro incógnitas e serão necessárias nove soluções numéricas para se obter ϕ_{∞} . O caso unidimensional é demonstrado por Marchi e Silva (2002).

Razão de Refino de Malha Constante

Considere-se duas malhas diferentes, a primeira, fina, caracterizada por $h_{x,1}$, $h_{y,1}$, $h_{z,1}$ e $h_{t,1}$, e a segunda, grossa, caracterizada por $h_{x,2}$, $h_{y,2}$, $h_{z,2}$ e $h_{t,2}$. No caso particular da razão de refino de malha (q) ser a mesma para todas as dimensões, isto é,

$$q = \frac{h_{x,2}}{h_{x,1}} = \frac{h_{y,2}}{h_{y,1}} = \frac{h_{z,2}}{h_{z,1}} = \frac{h_{t,2}}{h_{t,1}} \quad (15)$$

onde q pode assumir valores reais maiores do que a unidade, é possível demonstrar que a Eq. (13) resulta em

$$U(\phi) = h_L^{p_L} (a_x h_L^{p_x - p_L} + a_y h_L^{p_y - p_L} + a_z h_L^{p_z - p_L} + a_t h_L^{p_t - p_L}) \quad (16)$$

onde

$$p_L = \text{Min}(p_x, p_y, p_z, p_t) \quad (17)$$

e a_x, a_y, a_z e a_t são constantes; p_L representa o valor mínimo entre as ordens assintóticas das quatro dimensões, conforme a Eq. (17); e h_L é a dimensão da malha associada a p_L .

Para $h_L \rightarrow 0$, a Eq. (16) se reduz a

$$U(\phi) = K_L h_L^{p_L} \quad (18)$$

onde K_L é uma constante. No lugar de p_L , na Eq. (18), também pode-se usar o conceito de ordem aparente (p_U), isto é,

$$U(\phi) = K_U h_L^{p_U} \quad (19)$$

onde K_U é uma constante. As Eqs. (18) e (19) representam exatamente o caso unidimensional tratado por Marchi e Silva (2002). Portanto, estas equações podem ser usadas para se obter a incerteza de soluções numéricas de problemas multidimensionais, desde que a razão de refino de malha (q) seja a mesma em todas as dimensões. Segundo estes autores, se a ordem aparente (p_U) é convergente, então a solução analítica exata (Φ) fica limitada entre $\phi_\infty(p_L)$ e $\phi_\infty(p_U)$, com

$$\phi_\infty(p_L) = \phi_1 + \frac{(\phi_1 - \phi_2)}{(q^{p_L} - 1)} \quad (20)$$

$$\phi_\infty(p_U) = \phi_1 + \frac{(\phi_1 - \phi_2)}{(q^{p_U} - 1)} \quad (21)$$

$$p_U = \frac{\log\left(\frac{\phi_2 - \phi_3}{\phi_1 - \phi_2}\right)}{\log(q)} \quad (22)$$

$$q = \frac{h_{L,2}}{h_{L,1}} = \frac{h_{L,3}}{h_{L,2}} \quad (23)$$

e ϕ_1 , ϕ_2 e ϕ_3 são as soluções numéricas obtidas com as malhas fina ($h_{L,1}$), grossa ($h_{L,2}$) e supergrossa ($h_{L,3}$), respectivamente.

As Eqs. (20) e (21) se constituem na extrapolação de Richardson generalizada (Roache, 1994). Substituindo-as na Eq. (12), obtém-se

$$U_{Ri}(\phi_1, p_L) = \frac{(\phi_1 - \phi_2)}{(q^{p_L} - 1)} \quad (24)$$

$$U_{Ri}(\phi_1, p_U) = \frac{(\phi_1 - \phi_2)}{(q^{p_U} - 1)} \quad (25)$$

que representam as incertezas ou as estimativas do erro de discretização da solução numérica ϕ_1 segundo o estimador de Richardson (U_{Ri}). Marchi e Silva (2002) demonstraram que

$$\frac{U_{Ri}(\phi_1, p_a)}{E(\phi_1)} \leq 1 \leq \frac{U_{Ri}(\phi_1, p_b)}{E(\phi_1)} \quad (26)$$

onde p_a e p_b representam a ordem assintótica (p_L) ou a ordem aparente (p_U), dependendo de p_U ser subconvergente ou superconvergente.

A Eq. (26) significa que o erro de discretização da solução numérica ϕ_1 , $E(\phi_1)$, é limitado pelas incertezas $U_{Ri}(\phi_1, p_L)$ e $U_{Ri}(\phi_1, p_U)$. Portanto, se o objetivo é obter uma incerteza que seja maior do que o erro, em magnitude, isto é, uma incerteza confiável, a solução numérica da variável de interesse deve ser representada por

$$\phi = \phi_1 + U_{Ri}(\phi_1) \quad (27)$$

onde

$$U_{Ri}(\phi_1) = sg(\phi_1 - \phi_2) \text{Max}\{|U_{Ri}(\phi_1, p_L)|; |U_{Ri}(\phi_1, p_U)|\} \quad (28)$$

com $sg(\phi_1 - \phi_2)$ representando o sinal da diferença entre ϕ_1 e ϕ_2 , e $Max\{\}$, o máximo entre os módulos de $U_{Ri}(\phi_1, p_L)$ e $U_{Ri}(\phi_1, p_U)$.

Com as mesmas soluções numéricas usadas para obter as incertezas dadas nas Eqs. (24) e (25), isto é, com ϕ_1 , ϕ_2 e ϕ_3 , é possível diminuir o erro de discretização da solução numérica, $E(\phi_1)$, através da solução numérica convergente, dada por (Marchi e Silva, 2002)

$$\phi_C = \frac{\phi_\infty(p_L) + \phi_\infty(p_U)}{2} \quad (29)$$

Neste caso a representação da solução numérica passa a ser

$$\phi = \phi_C \pm U_C(\phi_C) \quad (30)$$

onde a incerteza de ϕ_C é dada por

$$U_C(\phi_C) = \frac{|\phi_\infty(p_L) - \phi_\infty(p_U)|}{2} \quad (31)$$

Recomenda-se empregar a representação dada na Eq. (30), em vez daquela da Eq. (27), porque o erro de discretização de ϕ_C , $E(\phi_C)$, é menor do que o erro de discretização de ϕ_1 , $E(\phi_1)$, conforme Marchi e Silva (2002). Isso é exemplificado na Fig. 3.

REFINO SEPARADO DE MALHA EM CADA DIMENSÃO

O refino separado é caracterizado quando cada dimensão (espacial e temporal) é refinada separadamente das demais, com ordens assintóticas (p_L) e razões de refino de malha (q) iguais ou diferentes entre cada dimensão. Um exemplo é mostrado na Tab. 6. O principal motivo que justifica o uso de refino separado é a possibilidade de obter estimativas de erro com malhas menores do que aquelas necessárias para o refino simultâneo.

Em problemas multidimensionais, existem diversas possibilidades de se fazer o refino separado para estimar o erro de discretização de uma solução numérica, como pode ser visto na Fig. 2 para um problema bidimensional. Nesta figura, x_3 , x_2 e x_1 representam, respectivamente, o número de nós, elementos ou volumes de controle na direção x , das malhas

supergrossa, grossa e fina. O mesmo vale para y_3 , y_2 e y_1 na direção y . As setas indicam o processo de extrapolação que permite obter soluções numéricas nas malhas x_∞ e y_∞ .

O exemplo da Fig. 2 refere-se, como se verá mais adiante, ao caso em que se determina a ordem aparente (p_U) de cada dimensão, quando são necessárias três malhas em cada dimensão, conforme as Eqs. (21), (22) e (25). Mas no caso de se usar apenas o conceito de ordem assintótica (p_L) são necessárias apenas duas malhas em cada dimensão, conforme as Eqs. (20) e (24).

Na Fig. 2, o refino simultâneo, abordado na seção anterior, é caracterizado pela linha diagonal que une as malhas (x_3, y_3) , (x_2, y_2) e (x_1, y_1) , que representam, respectivamente, as soluções numéricas ϕ_3 , ϕ_2 e ϕ_1 . Com estas soluções numéricas e a extrapolação de Richardson, Eq. (21), obtém-se ϕ_∞ , que é representado pela malha (x_∞, y_∞) .

Admitindo-se a validade da Eq. (13) e considerando-se a teoria de Marchi e Silva (2002) para problemas unidimensionais, a estimativa do erro de discretização da solução numérica de um problema multidimensional pode ser obtida a partir de (Roache, 1994)

$$U_b(\phi_b) = \sum_{d=1}^4 U_d(\phi_b) = U_x(\phi_b) + U_y(\phi_b) + U_z(\phi_b) + U_t(\phi_b) \quad (32)$$

onde ϕ_b representa a solução numérica obtida com a denominada malha-base. Esta malha deve ser a mesma envolvida nos refinamentos realizados em todas as dimensões. Para o exemplo abordado na Tab. 6, a malha-base é 65×750 que equivale à malha $x_2 \times y_2$ da Fig. 2. Na Eq. (32), $U_b(\phi_b)$ representa a incerteza ou a estimativa do erro de discretização da solução numérica ϕ_b . Os parâmetros que aparecem na Eq. (32) são calculados através de

$$U_d(\phi_b) = sg(\phi_{1,d} - \phi_{2,d}) \text{Max} \left\{ \left| \phi_{\infty,d}(p_{L,d}) - \phi_b \right|; \left| \phi_{\infty,d}(p_{U,d}) - \phi_b \right| \right\} \quad (33)$$

$$\phi_{\infty,d}(p_{L,d}) = \phi_{1,d} + \frac{(\phi_{1,d} - \phi_{2,d})}{(q_d^{p_{L,d}} - 1)} \quad (34)$$

$$\phi_{\infty,d}(p_{U,d}) = \phi_{1,d} + \frac{(\phi_{1,d} - \phi_{2,d})}{(q_d^{p_{U,d}} - 1)} \quad (35)$$

$$p_{U,d} = \frac{\log\left(\frac{\phi_{2,d} - \phi_{3,d}}{\phi_{1,d} - \phi_{2,d}}\right)}{\log(q_d)} \quad (36)$$

$$q_d = \frac{h_{3,d}}{h_{2,d}} = \frac{h_{2,d}}{h_{1,d}} \quad (37)$$

com $d = 1, 2, 3$ e 4 representando, respectivamente, as dimensões x, y, z e t ; $\phi_{3,d}, \phi_{2,d}$ e $\phi_{1,d}$ são as soluções numéricas obtidas, respectivamente, com as malhas supergrossa ($h_{3,d}$), grossa ($h_{2,d}$) e fina ($h_{1,d}$) de cada dimensão, relacionadas pela razão de refino q_d , Eq. (37); $p_{L,d}$ e $p_{U,d}$ são as ordens assintótica e aparente de cada dimensão d .

É possível demonstrar que, se a ordem aparente de cada dimensão ($p_{U,d}$) for convergente, de acordo com a definição de Marchi e Silva (2002), então o erro de discretização da solução numérica $\phi_b, E(\phi_b)$, é limitado por $U_b(\phi_b)$, isto é,

$$\frac{U_l(\phi_b)}{E(\phi_b)} \leq 1 \leq \frac{U_b(\phi_b)}{E(\phi_b)} \quad (38)$$

onde $U_l(\phi_b)$ é obtido com a Eq. (32) trocando-se *Max* por *Min* na Eq. (33), isto é, obtendo-se a soma do valor mínimo da incerteza em cada dimensão. A representação da solução numérica da variável de interesse é

$$\phi = \phi_b + U_b(\phi_b) \quad (39)$$

Para refino simultâneo, através das Eqs. (29) a (31), mostrou-se que é possível reduzir o erro de discretização (E) com o mesmo conjunto de soluções numéricas usadas para calcular a incerteza (U). Isso também pode ser feito para o refino separado quando a Eq. (38) é válida. Neste caso, com as mesmas soluções numéricas usadas para calcular $U_b(\phi_b)$, isto é, $\phi_{3,d}, \phi_{2,d}$ e $\phi_{1,d}$, é possível reduzir o valor do erro de discretização da solução numérica, $E(\phi_b)$, através de

$$\phi_M = \phi_b + \sum_{d=1}^4 (\phi_{C,d} - \phi_b) \quad (40)$$

$$U_M(\phi_M) = \sum_{d=1}^4 (U_{C,d}) \quad (41)$$

onde

$$\phi_{C,d} = \frac{\phi_{\infty,d}(p_{L,d}) + \phi_{\infty,d}(p_{U,d})}{2} \quad (42)$$

$$U_{C,d} = \frac{|\phi_{\infty,d}(p_{L,d}) - \phi_{\infty,d}(p_{U,d})|}{2} \quad (43)$$

com $\phi_{\infty,d}(p_{L,d})$ e $\phi_{\infty,d}(p_{U,d})$ dados pelas Eqs. (34) e (35). Neste caso, a representação adequada da solução numérica é

$$\phi = \phi_M \pm U_M(\phi_M) \quad (44)$$

As Eqs. (40) e (41) são equivalentes, respectivamente, às Eqs. (29) e (31) do refino simultâneo.

As técnicas de refino simultâneo e refino separado podem ser empregadas conjuntamente no chamado refino misto. Num problema bidimensional transiente (x,y,t) , por exemplo, pode-se empregar o refino simultâneo nas direções x e y , e o refino separado entre (x,y) e o tempo (t) .

RESULTADOS

Nesta seção são descritos e apresentados resultados numéricos de três problemas usados para ilustrar, através de exemplos de cálculo, a aplicação da teoria explicada nas seções anteriores.

Definição dos Problemas

O problema 1 consiste na condução de calor bidimensional em regime permanente (Incropera e DeWitt, 1996), descrita pela equação de Laplace (Kreyszig, 1999), Eq. (1). As condições de contorno são do tipo Dirichlet nos quatro contornos de um domínio quadrado de lado unitário, com $\Lambda(x,1) = \text{sen}(\pi x)$ e $\Lambda = 0$ nos outros três contornos.

O problema 2 consiste na condução de calor unidimensional transiente (Incropera e DeWitt, 1996), descrita pela equação

$$\frac{\partial \Lambda}{\partial t} = \frac{\partial^2 \Lambda}{\partial x^2} \quad (45)$$

As condições de contorno de Dirichlet são $\Lambda(0,t) = \Lambda(1,t) = 0$, e a condição inicial é dada por $\Lambda(x,0) = \text{sen}(\pi x)$. A solução do problema é obtida para o instante de tempo $t = 0.1$ s.

O problema 3 consiste no escoamento bidimensional, em regime permanente, de um fluido incompressível dentro de uma cavidade quadrada, de lado unitário, cuja tampa se movimenta, fazendo o fluido escoar em seu interior. Este problema é modelado pelas equações de Navier-Stokes e descrito na seção 2 do trabalho de Shih *et al.* (1989). O modelo matemático envolve as equações de conservação da massa, e da quantidade de movimento linear nas direções x e y , com viscosidade e massa específica constantes. Acrescenta-se um termo fonte com o intuito de obter-se uma solução analítica do problema para suas três incógnitas: duas componentes de velocidade (u,v) e a pressão. A solução analítica deste problema é dada por Shih *et al.* (1989).

Os problemas 1 e 2 também apresentam soluções analíticas conhecidas para as duas variáveis de interesse, isto é, as variáveis para as quais os erros e suas estimativas são analisados: a temperatura no centro do domínio de cálculo e a temperatura média do campo. No caso do problema 3, as variáveis de interesse são u e v , no centro do domínio, e o fluxo da massa (M) que circula na cavidade.

O método de diferenças finitas foi empregado nos problemas 1 e 2, e o método dos volumes finitos (Marchi e Maliska, 1994) no problema 3. Nos três problemas, as derivadas espaciais foram aproximadas por diferença central (Ferziger e Peric, 1999). A Eq. (45) foi discretizada através da formulação totalmente implícita, com a derivada temporal aproximada por diferença a montante (Ferziger e Peric, 1999). Nos problemas 1 e 3, para minimizar seus efeitos sobre os erros de discretização, as iterações foram realizadas até que os erros de iteração atingissem o erro de máquina. A solução do problema 2 é direta.

Refino Simultâneo

Empregando-se refino simultâneo nos três problemas multidimensionais descritos acima, chegou-se às mesmas conclusões que Marchi e Silva (2002) chegaram para problemas unidimensionais. Alguns resultados são comentados a seguir.

A Tab. 1 apresenta as soluções numéricas de $\Lambda^{(1/2,1/2)}$ obtidas em três malhas diferentes para o problema 1, onde Φ representa a solução analítica da variável de interesse, isto é, a temperatura no centro do domínio de cálculo, e ϕ_3 , ϕ_2 e ϕ_1 representam as soluções numéricas. A aplicação do estimador de erro de Richardson (U_{Ri}), que envolve as Eqs. (20) a (28), é mostrada na coluna esquerda da Tab. 2. O erro de discretização (E) é calculado com a Eq. (11). A aplicação do estimador de erro convergente (U_C), que envolve as Eqs. (29) a (31), é mostrada na coluna direita da Tab. 2.

Pode-se perceber através dos resultados da Tab. 2 que: (i) a incerteza do estimador de Richardson (U_{Ri}) é confiável, já que $U_{Ri}(\phi_1)/E(\phi_1) > 1$, e acurada, pois $U_{Ri}(\phi_1)/E(\phi_1) \approx 1$; (ii) a relação da Eq. (26) é satisfeita; e (iii) tanto a incerteza quanto o erro da solução numérica convergente (ϕ_C) são bem menores em relação à solução numérica calculada (ϕ_1) uma vez que $U_C(\phi_C)/U_{Ri}(\phi_1) = 0.00384$ e $E(\phi_C)/E(\phi_1) = 0.00225$.

Resultados para diversas malhas são apresentados na Fig. 3. Nela são apresentadas as incertezas $U_{Ri}(\phi_1)$ e $U_C(\phi_C)$ da temperatura no centro do domínio, do problema 1, e seus respectivos erros de discretização $E(\phi_1)$ e $E(\phi_C)$. Os resultados referem-se a malhas de 3×3 a 1025×1025 pontos, com $q = 2$. Pode-se perceber nesta figura a vantagem significativa de se usar ϕ_C , em vez de ϕ_1 , sobre a redução do erro de discretização. Também pode-se verificar que tanto a incerteza de Richardson (U_{Ri}) quanto do estimador convergente (U_C) são confiáveis em qualquer h_L .

A Tab. 3 apresenta as soluções numéricas de $u^{(1/2,1/2)}$ obtidas em três malhas diferentes para o problema 3, onde Φ representa a solução analítica da variável de interesse, isto é, a componente da velocidade na direção x no centro do domínio de cálculo, e ϕ_3 , ϕ_2 e ϕ_1 representam as soluções numéricas. A aplicação do estimador de erro de Richardson (U_{Ri}), que envolve as Eqs. (20) a (28), é mostrada na coluna esquerda da Tab. 4. O erro de discretização (E) é calculado com a Eq. (11). A aplicação do estimador de erro convergente (U_C), que envolve as Eqs. (29) a (31), é mostrada na coluna direita da Tab. 4.

Pode-se perceber através dos resultados da Tab. 4 que: (i) a incerteza do estimador de Richardson (U_{Ri}) é confiável, já que $U_{Ri}(\phi_1)/E(\phi_1) > 1$, e acurada, pois $U_{Ri}(\phi_1)/E(\phi_1) \approx 1$; (ii) a relação da Eq. (26) é satisfeita; e (iii) tanto a incerteza quanto o erro da solução numérica convergente (ϕ_C) são bem menores em relação à solução numérica calculada (ϕ_1) uma vez que $U_C(\phi_C)/U_{Ri}(\phi_1) = 0.125$ e $E(\phi_C)/E(\phi_1) = -0.0245$.

Na Tab. 5 são apresentados os valores obtidos para a ordem aparente (p_U) das variáveis de interesse nos problemas 1 a 3, empregando-se refino simultâneo e razão de refino

$q = 2$. Também é apresentada a ordem assintótica (p_L) esperada, obtida do erro de truncamento deduzido com expansões da série de Taylor sobre o modelo matemático discretizado, como nas Eqs. (6) e (7). Os tamanhos de malhas apresentados na Tab. 5 referem-se à malha fina. Portanto, no cálculo da ordem aparente (p_U), Eq. (22), foram empregadas duas malhas mais grossas em cada caso. Por exemplo, no caso do problema 3 foram utilizadas as malhas $256*256$, $128*128$ e $64*64$.

Refino Separado

Na Tab. 6 são apresentadas as soluções numéricas do problema 2, Eq. (45), calculadas para a temperatura no centro do domínio. Neste caso, por ser um problema bidimensional, o cálculo da incerteza (U_b) envolve soluções numéricas obtidas em cinco malhas diferentes. A malha $65*750$ foi escolhida, neste exemplo, como a malha comum às duas dimensões, ou seja, ela é a malha-base, portanto, $\phi_b = \phi_{2,x} = \phi_{2,t}$.

Através de análises do erro de truncamento das aproximações numéricas usadas para discretizar a Eq. (45), determina-se que suas ordens assintóticas são $p_{L,x} = 2$ e $p_{L,t} = 1$. Neste exemplo, a razão de refino de malha na dimensão x ($q_x = 2$) é diferente da dimensão t ($q_t = 1.5$). Com as Eqs. (33) a (36), $p_{L,x}$, $p_{L,t}$ e as soluções numéricas dadas na Tab. 6, chega-se aos resultados apresentados na Tab. 7. Com estes resultados, a aplicação do estimador de erro de Richardson (U_b) através das Eqs. (32) a (37) e (39) fornece os resultados mostrados no lado esquerdo da Tab. 8. Deve-se notar que $U_b(\phi_b)/E(\phi_b) > 1$, isto é, a incerteza $U_b(\phi_b)$ é confiável porque superestima o erro $E(\phi_b)$, e bastante acurada, já que $U_b(\phi_b)/E(\phi_b) \approx 1$.

Uma aplicação do estimador de erro convergente (U_M) é mostrada na coluna direita da Tab. 8. Para tanto, foram usadas as Eqs. (40) a (44) com base nas mesmas soluções numéricas do problema 2 dadas na Tab. 6 e com os parâmetros da Tab. 7. Pode ser observado na Tab. 8 que $U_M(\phi_M)/E(\phi_M) = 1.00228$, isto é, a incerteza $U_M(\phi_M)$ é confiável porque superestima o erro $E(\phi_M)$. Além disso, houve significativa redução tanto da incerteza quanto do erro na solução numérica convergente (ϕ_M) em relação à solução numérica calculada (ϕ_b) uma vez que $U_M(\phi_M)/U_b(\phi_b) = 0.128$ e $E(\phi_M)/E(\phi_b) = 0.128$.

CONCLUSÃO

Fundamentou-se matematicamente dois procedimentos para estimar o erro de soluções numéricas de problemas multidimensionais. Ambos os procedimentos se baseiam na

extrapolação de Richardson que usa múltiplas malhas. No primeiro procedimento, as malhas são refinadas simultaneamente em todas as quatro dimensões (x,y,z,t) . No segundo procedimento, realiza-se um refino de malha em cada dimensão separado das demais.

Estes dois procedimentos são denominados, respectivamente, de refino simultâneo e separado. Eles foram bem-sucedidos nos testes realizados, que envolveram três problemas: equação de Laplace bidimensional, condução de calor unidimensional transiente e as equações de Navier-Stokes bidimensionais. Estes problemas foram resolvidos com os métodos de diferenças finitas e volumes finitos para três tipos de variáveis de interesse: as variáveis dependentes (Λ,u,v) , médias das variáveis dependentes no campo inteiro $(\Lambda$ médio) e a integração de uma variável dependente (M) .

Verificou-se que o emprego do refino simultâneo em problemas multidimensionais recai no caso de problemas unidimensionais. Isso ocorre se a razão de refino de malha é constante entre as dimensões e se a ordem aparente (p_U) da incerteza é do tipo convergente. Neste caso valem todas as conclusões de Marchi e Silva (2002), das quais destacam-se: o erro de discretização (E) é limitado pelas estimativas de erro do estimador de Richardson (U_{Ri}) calculadas com base nas ordens assintótica (p_L) e aparente (p_U) ; é possível reduzir com confiabilidade o erro e a incerteza da solução numérica ao se usar a solução numérica convergente (ϕ_C) e seu respectivo estimador de erro convergente (U_C) ; e fora do intervalo convergente da ordem aparente (p_U) não há garantia da validade das duas conclusões anteriores.

As mesmas conclusões do refino simultâneo valem para o refino separado desde que: a ordem aparente (p_U) de cada dimensão seja do tipo convergente e exista uma malha comum (malha-base) aos refinamentos realizados em todas as dimensões.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

1. C. H. Marchi and A. F. C. da Silva, Unidimensional Numerical Solution Error Estimation for Convergent Apparent Order, *Numerical Heat Transfer, Part B*, vol. 42, pp. 167-188, 2002.
2. G. de Vahl Davis, Natural Convection of Air in a Square Cavity: A Bench Mark Numerical Solution, *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, vol. 3, pp. 249-264, 1983.
3. P. J. Roache, Perspective: A Method for Uniform Reporting of Grid Refinement Studies, *Journal of Fluids Engineering*, vol. 116, pp. 405-413, 1994.

4. F. G. Blottner, Accurate Navier-Stokes Results for the Hypersonic Flow Over a Spherical Nostep, *Journal of Spacecraft and Rockets*, vol. 27, pp. 113-122, 1990.
5. J. H. Ferziger and M. Peric, *Computational Methods for Fluid Dynamics*, 2nd ed., Springer-Verlag, Berlin, 1999.
6. J. C. Tannehill, D. A. Anderson, and R. H. Pletcher, *Computational Fluid Mechanics and Heat Transfer*, 2nd. ed., Taylor & Francis, Washington, DC, 1997.
7. P. J. Roache, *Verification and Validation in Computational Science and Engineering*, Hermosa, Albuquerque, NM, 1998.
8. E. Kreyszig, *Advanced Engineering Mathematics*, 8th ed., Wiley, New York, 1999.
9. F. P. Incropera and D. P. DeWitt, *Fundamentals of Heat and Mass Transfer*, 4th ed., Wiley, New York, 1996.
10. T. M. Shih, C. H. Tan, and B. C. Hwang, Effects of Grid Staggering on Numerical Schemes, *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, vol. 9, pp. 193-212, 1989.
11. C. H. Marchi and C. R. Maliska, A Nonorthogonal Finite-Volume Method for the Solution of All Speed Flows Using Co-Located Variables, *Numerical Heat Transfer, Part B*, vol. 26, pp. 293-311, 1994.
12. A. Jameson and L. Martinelli, Mesh Refinement and Modeling Errors in Flow Simulation, *AIAA Journal*, vol. 36, pp. 676-686, 1998.
13. L. F. Richardson, The Approximate Arithmetical Solution by Finite Differences of Physical Problems Involving Differential Equations, with an Application to the Stresses in a Masonry Dam, *Philosophical Proceedings of the Royal Society of London Serial A*, vol. 210, pp. 307-357, 1910.
14. C. J. Roy and J. R. Blottner, Assessment of One- and Two-Equation Turbulence Models for Hypersonic Transitional Flows, *Journal of Spacecraft and Rockets*, vol. 38, pp. 699-710, 2001.
15. J. Cadafalch, C. D. Pérez-Segarra, R. Cònsul, and A. Oliva, Verification of Finite Volume Computations on Steady-State Fluid Flow and Heat Transfer, *Journal of Fluids Engineering*, vol. 124, pp. 11-21, 2002.
16. U. B. Mehta, Guide to Credible Computer Simulations of Fluid Flows, *Journal of Propulsion and Power*, vol. 12, pp. 940-948, 1996.

Tabela 1. Soluções numéricas do problema 1, Eq. (1), para $\Lambda(1/2, 1/2)$.

malha ($x*y$)	solução numérica	outros dados
5 * 33	$\phi_3 = 0.206809183$	$q = 2$
9 * 65	$\phi_2 = 0.201144859$	$p_L = 2$
17 * 129	$\phi_1 = 0.199736958$	$\Phi = 0.199268408$

Tabela 2. Cálculo de incertezas com as soluções numéricas da Tab. 1.

Estimador de Richardson	Estimador convergente
(Eq. 20) $\phi_{\infty}(p_L) = 0.199267658$	(Eq. 29) $\phi_C = 0.199269462$
(Eq. 22) $p_U = 2.008358693$	(Eq. 31) $U_C(\phi_C) = \pm 0.000001804$
(Eq. 21) $\phi_{\infty}(p_U) = 0.199271266$	(Eq. 11) $E(\phi_C) = -0.000001054$
(Eq. 28) $U_{Ri}(\phi_1) = -0.000469300$	$U_C(\phi_C) / E(\phi_C) = 1.71$
(Eq. 11) $E(\phi_1) = -0.000468550$	$U_C(\phi_C) / U_{Ri}(\phi_1) = 0.00384$
$U_{Ri}(\phi_1) / E(\phi_1) = 1.0016$	$U_{Ri}(\phi_1) / U_C(\phi_C) = 260$
(Eq. 27) $\phi = 0.199736958 - 0.000469300$	(Eq.30) $\phi = 0.199269462 \pm 0.000001804$
	$E(\phi_1) / E(\phi_C) = 445$

Tabela 3. Soluções numéricas do problema 3 para $u(1/2, 1/2)$.

malha ($x*y$)	solução numérica	outros dados
4 * 4	$\phi_3 = - 0.172578576$	$q = 2$
8 * 8	$\phi_2 = - 0.226911929$	$p_L = 2$
16 * 16	$\phi_1 = - 0.243644223$	$\Phi = - 1/4$

Tabela 4. Cálculo de incertezas com as soluções numéricas da Tab. 3.

Estimador de Richardson	Estimador convergente
(Eq. 20) $\phi_{\infty}(p_L) = - 0.249221654$	(Eq. 29) $\phi_C = - 0.250155835$
(Eq. 22) $p_U = 1.699202828$	(Eq. 31) $U_C(\phi_C) = \pm 0.000934181$
(Eq. 21) $\phi_{\infty}(p_U) = - 0.251090015$	(Eq. 11) $E(\phi_C) = 0.000155835$
(Eq. 28) $U_{Ri}(\phi_1) = - 0.007445792$	$U_C(\phi_C) / E(\phi_C) = 5.995$
(Eq. 11) $E(\phi_1) = - 0.006355777$	$U_C(\phi_C) / U_{Ri}(\phi_1) = 0.125$
$U_{Ri}(\phi_1) / E(\phi_1) = 1.171$	$U_{Ri}(\phi_1) / U_C(\phi_C) = 7.97$
(Eq. 27) $\phi = - 0.243644223 - 0.007445792$	(Eq.30) $\phi = - 0.250155835 \pm 0.000934181$
	$E(\phi_1) / E(\phi_C) = - 40.8$

Tabela 5. Ordens aparente (p_U), para $q = 2$, e assintóticas (p_L) para refino simultâneo.

problema	variável	malha	p_U	p_L
1: Laplace 2D	Λ central	1025 * 1025	1.999984	2
1: Laplace 2D	Λ médio	1025 * 1025	1.999903	2
2: Condução 1Dt	Λ central	4097 * 2048	1.000004	1
2: Condução 1Dt	Λ médio	4097 * 2048	0.999109	1
3: Navier-Stokes 2D	u central	256 * 256	1.996552	2
3: Navier-Stokes 2D	v central	256 * 256	1.982185	2
3: Navier-Stokes 2D	fluxo de massa	256 * 256	2.012358	2

Tabela 6. Soluções numéricas do problema 2, Eq. (45), para Λ em $x = \frac{1}{2}$ e $t = 0.1$.

refino em x ($q_x = 2$)	refino em t ($q_t = 1.5$)	outros dados
malha 33*750: $\phi_{3,x} = 0.373245017$	malha 65* 500: $\phi_{3,t} = 0.373144380$	$p_{L,x} = 2$
malha 65*750: $\phi_{2,x} = 0.373023555$	malha 65* 750: $\phi_{2,t} = 0.373023555$	$p_{L,t} = 1$
malha 129*750: $\phi_{1,x} = 0.372968193$	malha 65*1125: $\phi_{1,t} = 0.372942967$	$\Phi = 0.372707839$

Tabela 7. Cálculo dos componentes da incerteza para refino separado no problema 2.

Equação	refino em x	refino em t
Eq. (34)	$\phi_{\infty,x}(p_{L,x}) = 0.372949739$	$\phi_{\infty,t}(p_{L,t}) = 0.372862379$
Eq. (36)	$p_{U,x} = 2.000091205$	$p_{U,t} = 0.998836779$
Eq. (35)	$\phi_{\infty,x}(p_{U,x}) = 0.372949741$	$\phi_{\infty,t}(p_{U,t}) = 0.372781563$
Eq. (33)	$U_x(\phi_b) = -0.000073816$	$U_t(\phi_b) = -0.000241992$

Tabela 8. Cálculo da incerteza total para refino separado no problema 2.

Estimador de Richardson	Estimador convergente
(Eq. 32) $U_b(\phi_b) = -0.000315808$	(Eq. 42) $\phi_{C,x} = 0.372949740$
(Eq. 39) $\phi = 0.373023555 - 0.000315808$	(Eq. 43) $U_{C,x} = \pm 0.000000001$
(Eq. 11) $E(\phi_b) = -0.000315716$	(Eq. 42) $\phi_{C,t} = 0.372821971$
$U_b(\phi_b) / E(\phi_b) = 1.00029$	(Eq. 43) $U_{C,t} = \pm 0.000040408$
	(Eq. 40) $\phi_M = 0.372748156$
	(Eq. 41) $U_M(\phi_M) = \pm 0.000040409$
	(Eq. 44) $\phi = 0.372748156 \pm 0.000040409$
	(Eq. 11) $E(\phi_M) = -0.000040317$
	$U_M(\phi_M) / E(\phi_M) = 1.00228$
	$U_M(\phi_M) / U_b(\phi_b) = 0.128$
	$U_b(\phi_b) / U_M(\phi_M) = 7.82$
	$E(\phi_b) / E(\phi_M) = 7.83$

LEGENDAS DAS FIGURAS

Figura 1. Malha bidimensional uniforme em cada direção.

Figura 2. Possibilidades para refino separado de um problema bidimensional.

Figura 3. Módulos da incerteza (U) e do erro (E) de $\Lambda(1/2, 1/2)$ do problema 1.

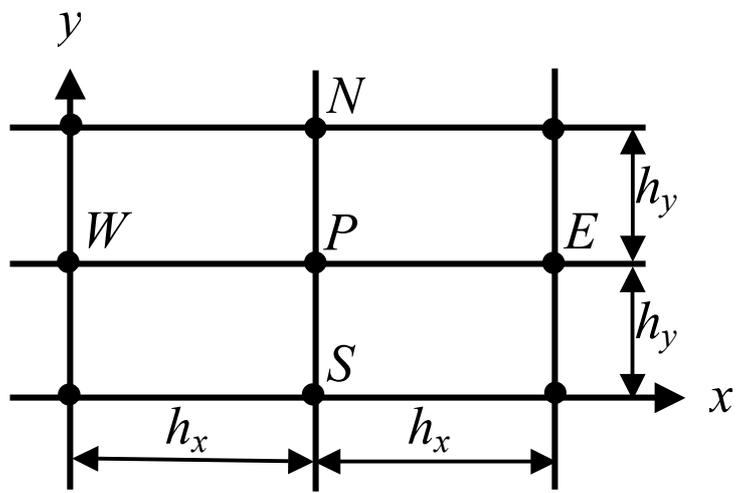


Figura 1. Malha bidimensional uniforme em cada direção.

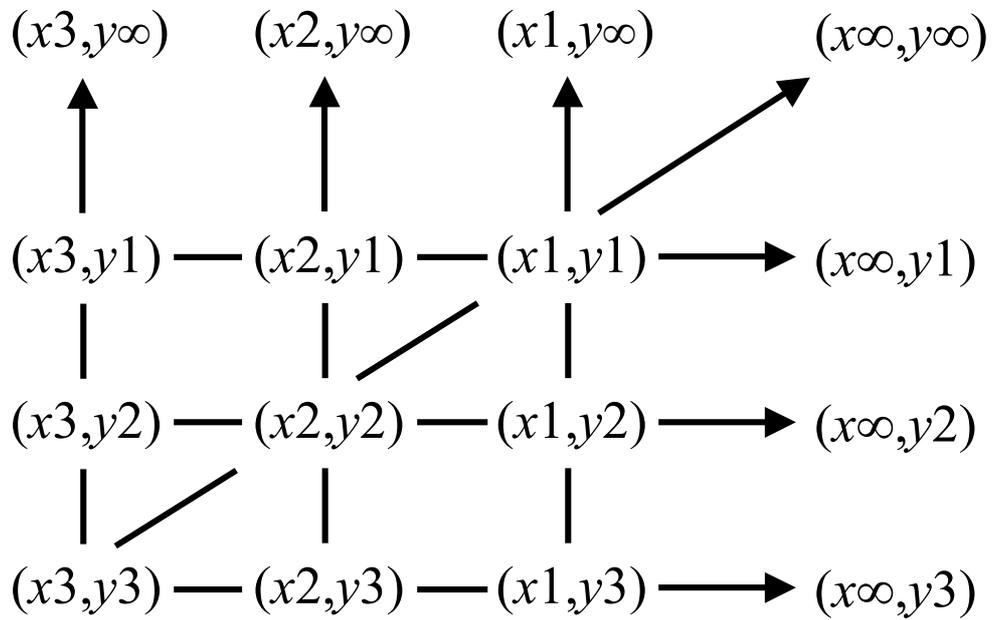


Figura 2. Possibilidades para refino separado de um problema bidimensional.

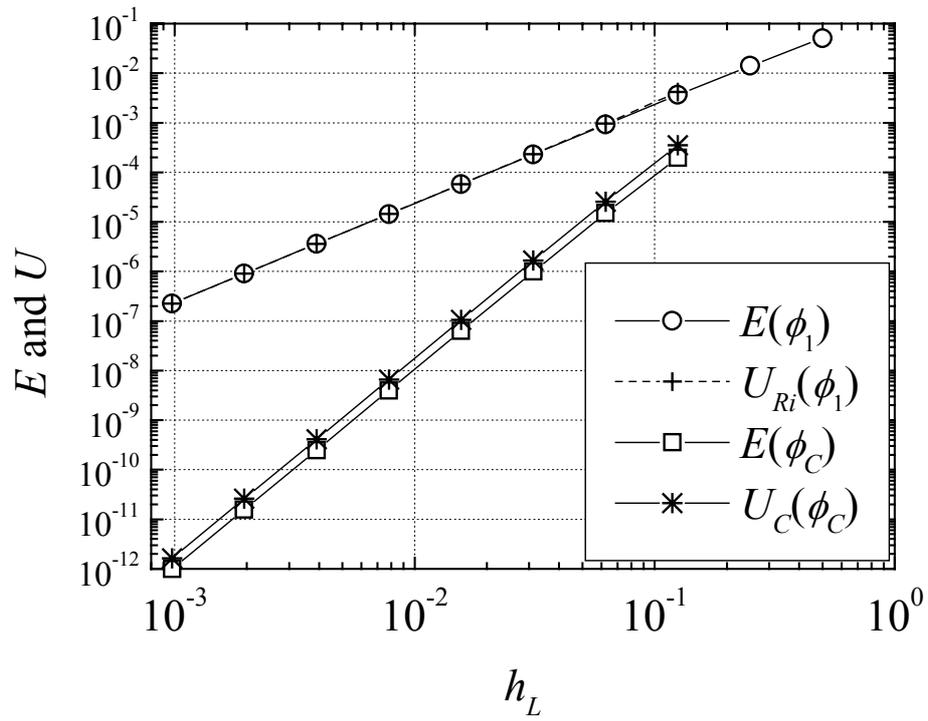


Figura 3. Módulos da incerteza (U) e do erro (E) de $\Lambda(1/2, 1/2)$ do problema 1.