

103 - 104 - 105 - 106 - 107 - 108 - 109 - 110 - 111 - 112 - 113 - 114 - 115 - 116 - 117 - 118 - 119 - 120 - 121 - 122 - 123 - 124 - 125 - 126 - 127 - 128 - 129 - 130 - 131 - 132 - 133 - 134 - 135 - 136 - 137 - 138 - 139 - 140 - 141 - 142 - 143 - 144 - 145 - 146 - 147 - 148 - 149 - 150 - 151 - 152 - 153 - 154 - 155 - 156 - 157 - 158 - 159 - 160 - 161 - 162 - 163 - 164 - 165 - 166 - 167 - 168 - 169 - 170 - 171 - 172 - 173 - 174 - 175 - 176 - 177 - 178 - 179 - 180 - 181 - 182 - 183 - 184 - 185 - 186 - 187 - 188 - 189 - 190 - 191 - 192 - 193 - 194 - 195 - 196 - 197 - 198 - 199 - 200

12

CAP. 11 TÓPICOS ESPECIAIS

- CONVECÇÃO DE CALOR LAMINAR
- FLUIDOS COMPRESSÍVEIS
- ESCOAMENTOS TURBULENTOS

# 11.1 CONVECÇÃO DE CALOR

- Considerando:
- escoamento laminar bidimensional
  - fluido incompressível
  - propriedades variáveis ( $\rho, \mu, c_p, k$ )
  - coordenadas cartesianas

O modelo matemático de problemas de convecção (forçada/natural) é dado por:

Eq. Conservação da massa: 
$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial (\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial (\rho v)}{\partial y} = 0 \quad (11.1)$$

Eq. Conservação da quantidade de movimento linear na direção x (QMLx):

$$\frac{\partial (\rho u)}{\partial t} + \frac{\partial (\rho u^2)}{\partial x} + \frac{\partial (\rho v u)}{\partial y} = -\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial (\mu \frac{\partial u}{\partial x})}{\partial x} + \frac{\partial (\mu \frac{\partial u}{\partial y})}{\partial y} \quad (11.2)$$

QMLy:

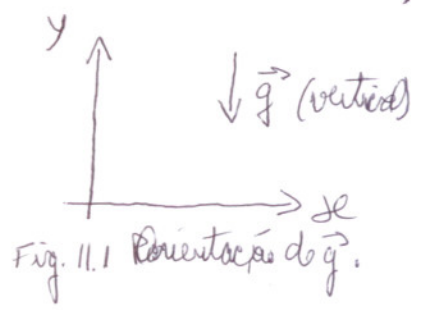
$$\frac{\partial (\rho v)}{\partial t} + \frac{\partial (\rho v^2)}{\partial y} + \frac{\partial (\rho u v)}{\partial x} = -\frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\partial (\mu \frac{\partial v}{\partial x})}{\partial x} + \frac{\partial (\mu \frac{\partial v}{\partial y})}{\partial y} + \underbrace{\rho g \beta (T - T_\infty)}_{\text{força de empuxo}} \quad (11.3)$$

Eq. Conservação da energia térmica:

$$\rho c_p \frac{\partial T}{\partial t} + \rho c_p u \frac{\partial T}{\partial x} + \rho c_p v \frac{\partial T}{\partial y} = \frac{\partial (k \frac{\partial T}{\partial x})}{\partial x} + \frac{\partial (k \frac{\partial T}{\partial y})}{\partial y} + \dot{q} \quad (11.4)$$

onde

- $T$  = temperatura
- $c_p$  = calor específico à pressão constante
- $k$  = condutividade térmica
- $\dot{q}$  = geração de calor por unidade de volume
- $g$  = módulo da aceleração gravitacional (~~horizontal~~)
- $T_\infty$  =  $T$  de referência



$$\beta = \text{coeficiente de expansão térmica} = -\frac{1}{\rho} \left( \frac{\partial \rho}{\partial T} \right)_p \quad (11.5)$$

(para gases perfeitos,  $p = \rho R T \rightarrow \beta = \frac{1}{T}$ )

~~As outras variáveis seguem as definições de cap. 10~~

- $x, y$  = coordenadas espaciais
- $t$  = " temporal
- $u, v$  = componentes do vetor velocidade ( $\vec{v}$ ) nas direções  $x$  e  $y$
- $p$  = pressão estática
- $\mu$  = viscosidade absoluta

INCÓGNITAS:  $u, v, p, T$

O termo  $\rho g \beta (T - T_{\infty})$  da Eq. (11.3) representa a aproximação de Boussinesq para convecção natural. [explicitar  $\neq$  entre convecção forçada/natural], Ela é usada para considerar  $\rho$  constante ~~em~~ em problemas de convecção natural cujo movimento <sup>do fluido</sup> é causado pelas diferenças de  $\rho$  devido às variações de  $T$ .

A discretização das Eqs. (11.1) a (11.4) pode ser feita conforme visto no Cap. 10, observando-se:

$$\int_{\Delta V} \rho g \beta (T - T_{\infty}) dV \approx \rho_f g \beta_p (T_p - T_{\infty}) \Delta x_p \Delta y_p \Delta z \quad (11.6)$$

• deve-se usar  $(C_p)_p$  na integração da Eq. (11.4)

Algoritmo resumido para solução do regime permanente:

- 1) ler os dados e fazer inicializações para  $t = 0$
- 2) estimar  $U_p^*$ ,  $v_p^*$ ,  $T_p^*$  e  $T_p^*$  em  $t + \Delta t$
- 3) calcular os coeficientes e fontes da MLE e MLY
- 4) resolver a MLE obtendo  $U_p^*$
- 5) " " MLY " "  $v_p^*$
- 6) calcular  $U_e^*$  e  $v_n^*$
- 7) calcular os coeficientes e fontes da MASSA
- 8) resolver a MASSA obtendo  $T_p^*$
- 9) corrigir  $U_p^*$ ,  $v_p^*$ ,  $U_e^*$ ,  $v_n^*$  e  $T_p^*$  com  $T_p^*$  obtendo  $U_p$ ,  $v_p$ ,  $U_e$ ,  $v_n$  e  $T_p$
- 10) calcular os coeficientes e fontes da ENERGIA
- 11) resolver a ENERGIA obtendo  $T_p$
- 12) voltar ao item 2 até satisfazer algum critério de convergência
- 13) pós-processamento

CICLOS:

- a) MASSA: itens 7 a 9 (recomenda-se repetir 2 ou 3 vezes, normalmente)
- b) TRANSIENTE <sup>PERMANENTE</sup>: itens 2 a 11 devem ser repetidos até satisfazer algum critério

O algoritmo acima é indicado para problemas de conexão natural, conexão ~~forçada~~ mista (forçada e natural) e hidrodinâmicos (MASSA + ~~2ML~~  $2ML$ ) com  $u(T)$ . No caso particular de problemas de conexão forçada com  $u$  constante, pode-se obter a convergência de  $u, v$  e  $p$  (ciclos 2 a 9) e depois resolver  $T$  (ciclos 10 e 11).



11.2 ESCOAMENTO DE FLUIDOS COMPRESSÍVEIS

- considerações:
- ESCOAMENTO LAMINAR
  - " " BIDIMENSIONAL
  - GÁS PERFEITO
  - PROPRIEDADES CONSTANTES (ρ, μ)
  - COORDENADAS CARTESIANAS

Alterações no modelo de convecção de calor, dadas pelas eqs. (11.1) a (11.4):

• na QML de acrescentar no 1º membro da eq. (11.2):  $+\frac{1}{3} \frac{\partial}{\partial x} (\mu \nabla \cdot \vec{v})$  (11.7)

• na QML de acrescentar no 2º membro da eq. (11.3):  $+\frac{1}{3} \frac{\partial}{\partial y} (\mu \nabla \cdot \vec{v})$  (11.8)

• na ENERGIA " " " " " " eq. (11.4):  $+\frac{\partial p}{\partial t} + u \frac{\partial p}{\partial x} + v \frac{\partial p}{\partial y}$  (11.9)

onde  $\nabla \cdot \vec{v} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}$  (11.10)

Além disso, deve-se acrescentar a equação de estado dos gases perfeitos, dada por:

$p = \rho R T$  (11.11)

onde R é a constante do gás.

Portanto o modelo matemático é constituído por 5 equações e as incógnitas são u, v, p, T e ρ.

Aproximação do termo da Eq. (11.7) [QMLx] → u

$\int_{\text{volume}} \frac{1}{3} \frac{\partial}{\partial x} \left[ \mu \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) \right] dx dy dz \approx \frac{1}{3} \left[ u_e (\nabla \cdot \vec{v})_e - u_w (\nabla \cdot \vec{v})_w \right] \Delta y \Delta z$  (11.12)

onde  $(\nabla \cdot \vec{v})_e = \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right)_e \approx \underbrace{\frac{(u_e - u_w)}{\Delta x}}_{\text{coeficiente}} + \underbrace{\frac{(v_n + v_{ne} - v_s - v_{se})}{4 \Delta y}}_{\text{fonte}}$  (11.13)

Aproximação do termo da Eq. (11.8) [QMLy] → v

$\int_{\text{volume}} \frac{1}{3} \frac{\partial}{\partial y} (\mu \nabla \cdot \vec{v}) dx dy dz \approx \frac{1}{3} \left[ u_n (\nabla \cdot \vec{v})_n - u_s (\nabla \cdot \vec{v})_s \right] \Delta x \Delta z$  (11.14)

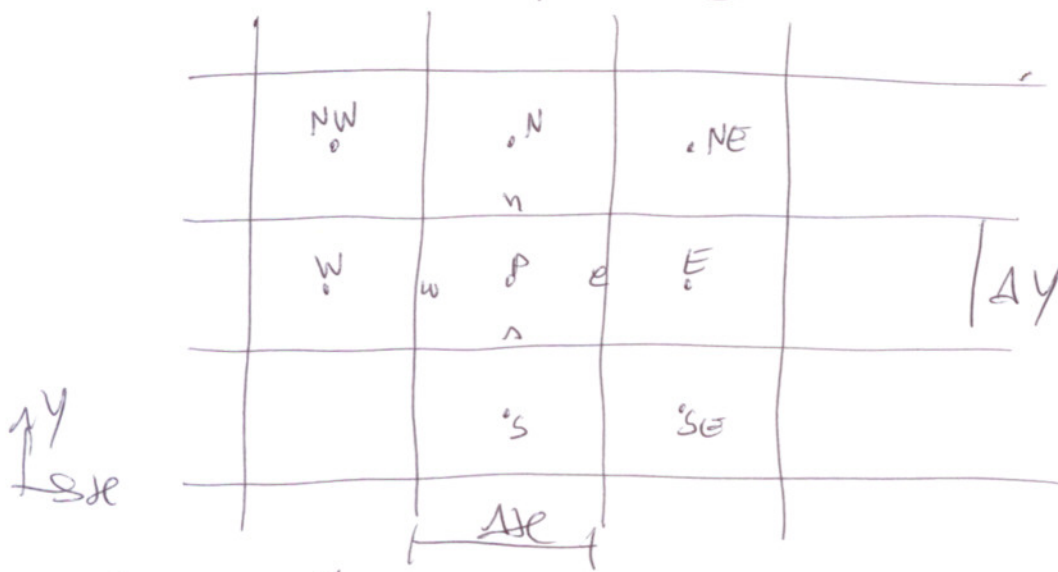


Figura 11.2 Malha 2D.

onde

$$(\nabla \cdot \vec{v})_n = \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right)_n \approx \underbrace{\frac{(u_E + u_{NE} - u_W - u_{NW})}{4\Delta x}}_{\text{fonte}} + \underbrace{\frac{(v_N - v_P)}{\Delta y}}_{\text{coeficientes}} \quad (11.15)$$

Aproximação do termo da eq. (11.9) [ENERGIA]  $\rightarrow T$

$$\int_t \int_{\text{volume}} \left( \frac{\partial p}{\partial t} + u \frac{\partial p}{\partial x} + v \frac{\partial p}{\partial y} \right) dx dy dz dt \approx \underbrace{\left( p_P - p_P^0 \right) \Delta x \Delta y \Delta z + u_P \frac{(p_E - p_W)}{2} \Delta y \Delta z \Delta t + v_P \frac{(p_N - p_S)}{2} \Delta x \Delta y \Delta t}_{\text{fonte}} \quad (11.16)$$

Discretizando-se a MASSA, eq. (11.1), obtêm-se

$$\frac{(M_P - M_P^0)}{\Delta t} + \dot{M}_e - \dot{M}_w + \dot{M}_n - \dot{M}_s = 0 \quad (11.17)$$

onde  $M_P = \rho_P \Delta x \Delta y \Delta z$  (11.18)

$M_P^0 = \rho_P^0 \Delta x \Delta y \Delta z$  (11.19)

$\dot{M}_e = \rho_e u_e \Delta y \Delta z$  (11.20)

Quando o fluido é compressível é importante considerar a relação entre  $\rho$  e  $p$  na MASSA, além de  $(u^0)$  e  $p$ . Assim, considerando-se

$u = u^0 + u'$  (11.21)

$\rho = \rho^0 + \rho'$  (11.22)

na Eq. (11.20), obtêm-se

$$\dot{M}_e = (\rho_e^* u_e^* + \rho_e^* u_e' + \rho_e^* u_e'' + \rho_e^* u_e''') \Delta y \Delta z \quad (11.23)$$

Desprezando as relações para  $u'$  e  $v'$  são obtidas de métodos de acoplamento pressão-velocidade, SIMPLEC por exemplo. E, para  $p'$ , a partir da equação de estado, Eq. (11.11), chega-se a

$$p'_T = \frac{\dot{p}_T}{RT_T} \quad (11.24)$$

Com as relações  $u'(p')$ ,  $v'(p')$  e  $p'(p')$  na Eq. (11.23) e análogas, desprezando-se termos de 2ª ordem ( $p'u'$ ), e substituindo os resultados na Eq. (11.17), chega-se a

$$a_p^T p'_T = a_w^T p'_w + a_e^T p'_e + a_s^T p'_s + a_n^T p'_n + b_p^T \quad (11.25)$$

onde, p. ex.,

$$a_w^T = \underbrace{\frac{u_w^* (1/2 + \alpha_w) \Delta y \Delta z}{RT_w}}_{\text{efeito de } p} + \underbrace{\rho_w^* d_w}_{\text{efeito de } u} \quad (11.26)$$

$p^*$  não parece ser obtido das eqs. resultantes de (11.27) a (11.30), com  $\alpha$  positivo conforme desejado (1/2  $\rightarrow$  UDS, 0  $\rightarrow$  CBS, ou  $\nabla$ )

Algoritmo:

- 1) LER DADOS
- 2) INICIALIZAÇÕES
- 3) calcular propriedades ( $\mu, \rho, k, \beta$ )
- 4) calcular coeficientes e fontes de  $u^*$  e resolver  $u^*$
- 5) calcular fontes de  $v^*$  e c.c. " "  $v^*$
- 6) " coeffs, e " " T " " " " T
- 7) "  $p_A^*$  e  $p_{faces}^*$
- 8) " coeficientes do SIMPLEC
- 9) " velocidades nas faces
- 10) " coeficientes, fontes e c.c.  $p'$  e resolver  $p'$
- 11) convergência  $p'$
- 12) voltar ao item 3 até convergir
- 13) pós-processamento



N.3

# MODELO k-ε PARA ESCORIMENTOS TURBULENTOS

- FLUIDO INCOMPRESSÍVEL
- ESCORIMENTO TURBULENTO
- ESTADO PERMANENTE
- ESCORIMENTO BIDIMENSIONAL

• escoamento isotérmico

$$\frac{\partial}{\partial x}(\rho U \phi) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho V \phi) = \frac{\partial}{\partial x}(\rho \phi \frac{\partial \phi}{\partial x}) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho \phi \frac{\partial \phi}{\partial y}) + S^\phi \quad (11.27)$$

ONDE

EQUAÇÃO	$\phi$	$\rho \phi$	$S^\phi$	
MASSA	1	0	0	(11.28)

QMLX	U	$\mu_{ef}$	$-\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x}(\mu_{ef} \frac{\partial U}{\partial x}) + \frac{\partial}{\partial y}(\mu_{ef} \frac{\partial U}{\partial y})$	(11.29)
------	---	------------	--	---------

QMLY	V	$\mu_{ef}$	$-\frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial x}(\mu_{ef} \frac{\partial V}{\partial x}) + \frac{\partial}{\partial y}(\mu_{ef} \frac{\partial V}{\partial y})$	(11.30)
------	---	------------	--	---------

ENERGIA CINÉTICA TURBULENTO	k	$\frac{\mu_t}{\sigma_k} + \mu$	$\rho(P^k - \epsilon)$	(11.31)
-----------------------------	---	--------------------------------	------------------------	---------

dissipação de k	ε	$\frac{\mu_t}{\sigma_\epsilon} + \mu$	$\rho \frac{\epsilon}{k} (C_1 P^k - C_2 \epsilon)$	(11.32)
-----------------	---	---------------------------------------	--	---------

ONDE

$$\mu_{ef} = \mu_t + \mu \quad (11.33)$$

$$\mu_t = \rho C_\mu \frac{k^2}{\epsilon} \quad (11.34)$$

$$P^k = \mu_t \left[ 2 \left( \frac{\partial U}{\partial x} \right)^2 + 2 \left( \frac{\partial V}{\partial y} \right)^2 + \left( \frac{\partial U}{\partial y} + \frac{\partial V}{\partial x} \right)^2 \right] \quad (11.35)$$

CONSTANTES:

$$C_\mu = 0.09$$

$$\sigma_k = 1.0$$

$$\sigma_\epsilon = 1.3$$

$$C_1 = 1.44$$

$$C_2 = 1.92$$

$$\left. \begin{array}{l} C_\mu = 0.09 \\ \sigma_k = 1.0 \\ \sigma_\epsilon = 1.3 \\ C_1 = 1.44 \\ C_2 = 1.92 \end{array} \right\} (11.36)$$



$x, y =$  direções coordenadas

$U, V =$  componentes médias do vetor velocidade em  $x$  e  $y$

$P =$  pressão estática média

$\rho =$  massa específica

$k =$  energia cinética turbulenta  $\propto \frac{\overline{u^2} + \overline{v^2}}{2}$

$\epsilon =$  dissipação de  $k$

$\mu =$  viscosidade laminar

$\mu_t =$  " turbulenta

$\mu_{ef} =$  " efetiva [centenas ou milhares de vezes  $\mu$ ]

Aproximação de alguns termos:

$$\Delta MLx: \int_{Vol} \frac{\partial}{\partial y} \left( \mu_{ef} \frac{\partial v}{\partial x} \right) dx dy dz \approx \left[ \left( \mu_{ef} \frac{\partial v}{\partial x} \right)_n - \left( \mu_{ef} \frac{\partial v}{\partial x} \right)_s \right] \Delta x \Delta z \quad (11.37)$$

$$\left( \frac{\partial v}{\partial x} \right)_n \approx \frac{(v_E + v_{NE} - v_W - v_{NW})}{4 \Delta x} \quad (11.38)$$

$$\Delta MLy: \int_{Vol} \frac{\partial}{\partial x} \left( \mu_{ef} \frac{\partial u}{\partial y} \right) dx dy dz \approx \left[ \left( \mu_{ef} \frac{\partial u}{\partial y} \right)_e - \left( \mu_{ef} \frac{\partial u}{\partial y} \right)_w \right] \Delta y \Delta z \quad (11.39)$$

$$\left( \frac{\partial u}{\partial y} \right)_e \approx \frac{(u_n + u_{NE} - u_s - u_{SE})}{4 \Delta y} \quad (11.40)$$

$$\int_{Vol} P^k dx dy dz \approx (\mu_t)_P \left\{ 2 \left( \frac{u_E - u_W}{2 \Delta x} \right)^2 + 2 \left( \frac{v_N - v_S}{2 \Delta y} \right)^2 + \left[ \frac{(u_N - u_S)}{2 \Delta y} + \frac{(v_E - v_W)}{2 \Delta x} \right]^2 \right\} \Delta x \Delta y \Delta z \quad (11.41)$$

## Algoritmo:

- 1) Ler dados
- 2) Inicializações
- 3) calcular propriedades ( $\mu$ ,  $\sigma$ ,  $k$ ,  $\beta$ ,  $\mu_t$ ,  $\mu_{ef}$ )
- 4) resolver  $u^*$
- 5) " "  $v^*$
- 6) " "  $p^*$
- 7) conexões com  $p^*$
- 8) resolver  $k$
- 9) " "  $\epsilon$
- 10) voltar ao item 3 até convergir
- 11) pós-processamento