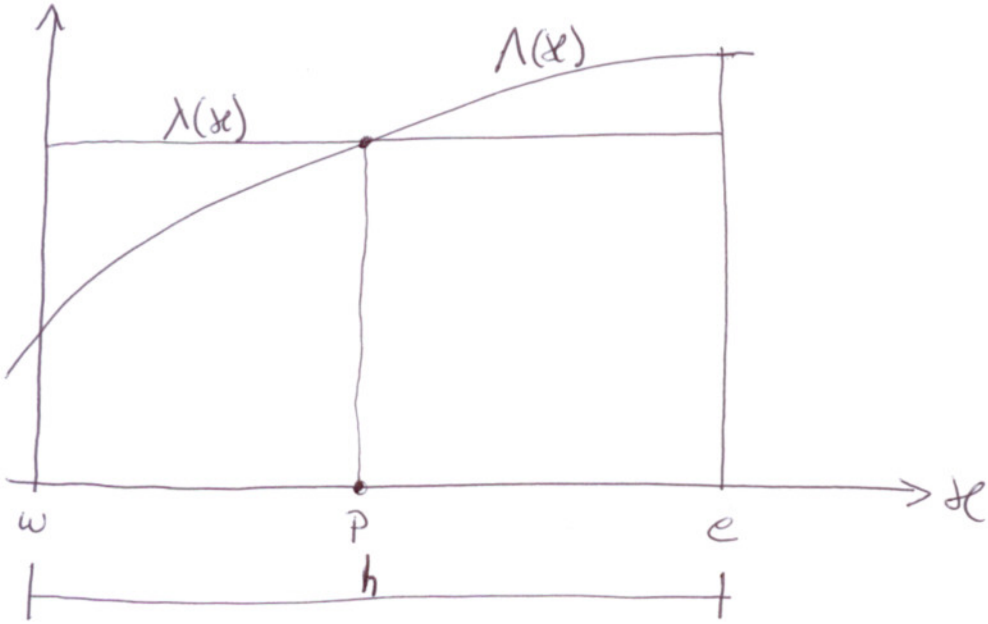
OBJETIVO: Prever o erro de truncamento e suas ordens verdadeiras do valor médio obtido pela integração de uma função pela regra do retângulo

CONSIDERAÇÕES:
- A função a integrar é conhecida (prescrita) nos nós da malha
- malha de volumes finitos
- malha unidimensional uniforme



DEFINIÇÕES:
- $\Lambda(x)$ é a função contínua analítica conhecida em $\forall x$
- $\lambda(x)$ é o valor numérico constante em cada volume P
- P é o nó genérico da malha
- "w" e "e" são as faces do volume P
- h é o tamanho constante do volume P, onde

$$h = \frac{L}{N} \qquad (1)$$

- N = nº de volumes da malha
- L = comprimento do domínio de cálculo

$\cdot\ x_P = (P - 1/2)\, h \qquad [P = 1, 2, \ldots N]$

INTEGRAL NUMÉRICA SOBRE O VOLUME P

$$\boxed{i_P = \lambda_P\, h} \tag{2}$$

~~INTE~~ VALOR MÉDIO NUMÉRICO NO DOMÍNIO

$$\bar{\lambda} = \frac{1}{L} \sum_{P=1}^{N} i_P = \frac{h}{L} \sum_{P=1}^{N} \lambda_P \tag{3}$$

INTEGRAL ANALÍTICA SOBRE O VOLUME P

$$I_P = \int_{x_w}^{x_e} \lambda(x)\, dx \tag{4}$$

VALOR MÉDIO ANALÍTICO NO DOMÍNIO

$$\bar{\lambda} = \frac{1}{L} \int_0^L \lambda(x)\, dx \tag{5}$$

ERRO DE TRUNCAMENTO

$$\varepsilon(\phi) = \Phi - \phi \tag{6}$$

onde

Φ = solução analítica

ϕ = solução numérica

SÉRIE DE TAYLOR

Expansão da função ϕ com a série de Taylor em torno do nó P:

$$\phi_x = \phi_P + (x-x_P)\phi_P' + \frac{(x-x_P)^2}{2}\phi_P'' + \frac{(x-x_P)^3}{6}\phi_P''' + \frac{(x-x_P)^4}{24}\phi_P^{iv}$$

$$+ \frac{(x-x_P)^5}{120}\phi_P^{v} + \frac{(x-x_P)^6}{720}\phi_P^{vi} + \dots \qquad (7)$$

onde ϕ', ϕ'' etc = derivadas de 1ª, 2ª etc ordens de ϕ no nó P.

x_P = coordenada x no nó P

ϕ_P = valor de ϕ no nó P

INTEGRAL ANALÍTICA ENTRE "w" E "e" COM A SÉRIE DE TAYLOR

$\cancel{I_P = \int_{x_w}^{x_e} \phi_x\,dx}$ Com a Eq. (7) em (4),

$$I_P = \int_{x_w}^{x_e}\left[\phi_P + (x-x_P)\phi_P' + \frac{(x-x_P)^2}{2}\phi_P'' + \dots\right]dx \qquad (8)$$

Definindo

$$Z = x - x_P \qquad (9)$$

obtém-se

$$dZ = dx \qquad (10)$$

$$Z_i = x_w - x_P = -\frac{h}{2} \qquad (11)$$

$$Z_f = x_e - x_P = \frac{h}{2} \qquad (12)$$

Com as Eqs. (9) a (12) em (8) tem-se

$$\int_{x_w}^{x_e}\phi_P\,dx = \phi_P\int_{-h/2}^{h/2}dZ = \phi_P Z\Big|_{-h/2}^{h/2} = \phi_P\left(\frac{h}{2}+\frac{h}{2}\right) = \phi_P h \qquad (13)$$

$$\int_{x_w}^{x_e}(x-x_P)\phi_P'\,dx = \phi_P'\int_{-h/2}^{h/2}Z\,dZ = \phi_P'\frac{Z^2}{2}\Big|_{-h/2}^{h/2} = \frac{\phi_P'}{2}\left[\left(\frac{h}{2}\right)^2 - \left(-\frac{h}{2}\right)^2\right] = \frac{\phi_P'}{2}\left(\frac{h^2}{4}-\frac{h^2}{4}\right) = 0 \qquad (14)$$

$$\int_{x_w}^{x_e}\frac{(x-x_P)^2}{2}\phi_P''\,dx = \frac{\phi_P''}{2}\int_{Z_i}^{Z_f}Z^2\,dZ = \frac{\phi_P''}{2}\frac{Z^3}{3}\Big|_{-h/2}^{h/2} = \frac{\phi_P''}{6}\left[\left(\frac{h}{2}\right)^3 - \left(-\frac{h}{2}\right)^3\right] = \frac{\phi_P''}{6}\left(\frac{h^3}{8}+\frac{h^3}{8}\right) = \frac{\phi_P''}{6}\frac{2h^3}{8} = \frac{\phi_P''}{24}h^3 \qquad (15)$$

$$\int_{x_w}^{x_e} \frac{(x-x_p)^3}{6}\lambda_p''' dx = \frac{\lambda_p'''}{6}\int_{z_i}^{z_f} z^3 dz = \frac{\lambda_p'''}{6}\frac{z^4}{4}\Big|_{-h/2}^{h/2} = \frac{\lambda_p'''}{24}\left[\left(\frac{h}{2}\right)^4 - \left(-\frac{h}{2}\right)^4\right] = \frac{\lambda_p'''}{24}\left(\frac{h^4}{16} - \frac{h^4}{16}\right) = 0 \qquad (16)$$

$$\int_{x_w}^{x_e} \frac{(x-x_p)^4}{24}\lambda_p^{iv} dx = \frac{\lambda_p^{iv}}{24}\int_{z_i}^{z_f} z^4 dz = \frac{\lambda_p^{iv}}{24}\frac{z^5}{5}\Big|_{-h/2}^{h/2} = \frac{\lambda_p^{iv}}{120}\left[\left(\frac{h}{2}\right)^5 - \left(-\frac{h}{2}\right)^5\right] = \frac{\lambda_p^{iv}}{120}\left(\frac{h^5}{32} + \frac{h^5}{32}\right) = \frac{\lambda_p^{iv} h^5}{120 \times 16} = \frac{\lambda_p^{iv}}{1920}h^5 \qquad (17)$$

$$\int_{x_w}^{x_e} \frac{(x-x_p)^5}{120}\lambda_p^{v} dx = 0 \qquad (18)$$

$$\int_{x_w}^{x_e} \frac{(x-x_p)^6}{720}\lambda_p^{vi} dx = \frac{\lambda_p^{vi}}{720}\int_{z_i}^{z_f} z^6 dz = \frac{\lambda_p^{vi}}{720}\frac{z^7}{7}\Big|_{-h/2}^{h/2} = \frac{\lambda_p^{vi}}{5040}\left[\left(\frac{h}{2}\right)^7 - \left(-\frac{h}{2}\right)^7\right] = \frac{\lambda_p^{vi}}{5040}\left(\frac{h^7}{128} + \frac{h^7}{128}\right) = \frac{\lambda_p^{vi}}{5040}\frac{h^7}{64} = \frac{\lambda_p^{vi}}{322\,560}h^7 \qquad (19)$$

Com as eqs. (13) a (19) em (8), tem-se

$$\boxed{I_p = \lambda_p h + \frac{\lambda_p''}{24}h^3 + \frac{\lambda_p^{iv}}{1920}h^5 + \frac{\lambda_p^{vi}}{322\,560}h^7 + \ldots} \qquad (20)$$

ERRO DE TRUNCAMENTO DE UM VOLUME

Com as Eqs. (20) e (2) na eq. (6), chega-se a

$$\boxed{\varepsilon(i_p) = \frac{\lambda_p''}{24}h^3 + \frac{\lambda_p^{iv}}{1920}h^5 + \frac{\lambda_p^{vi}}{322\,560}h^7 + \ldots} \qquad (21)$$

Portanto, as ordens verdadeiras e assintótica de $\varepsilon(i_p)$ são

$$p_V = 3,\ 5,\ 7,\ \ldots \qquad (22)$$

$$p_L = 3 \qquad (23)$$

VALOR MÉDIO ANALÍTICO NO DOMÍNIO

Da Eq. (5),

$$\bar{\lambda} = \frac{1}{L}\int_0^L \lambda(x)dx = \frac{1}{L}\sum_{P=1}^{N} I_P = \frac{1}{L}\sum_{P=1}^{N}\left(\lambda_p h + \frac{\lambda_p''}{24}h^3 + \frac{\lambda_p^{iv}}{1920}h^5 + \frac{\lambda_p^{vi}}{322\,560}h^7 + \ldots\right) \qquad (24)$$

ou

$$\boxed{\bar{\lambda} = \frac{h}{L}\sum_{P=1}^{N}\left(\lambda_p + \frac{\lambda_p''}{24}h^2 + \frac{\lambda_p^{iv}}{1920}h^4 + \frac{\lambda_p^{vi}}{322\,560}h^6 + \ldots\right)} \qquad (25)$$

ERRO DE TRUNCAMENTO TOTAL

Com as eqs. (25) e (3) em (6), obtém-se

$$\mathcal{E}(\bar{\lambda}) = \frac{h}{L}\sum_{p=1}^{N}\left(\frac{\Lambda_p''}{24}h^2 + \frac{\Lambda_p^{iv}}{1920}h^4 + \frac{\Lambda_p^{vi}}{322\,560}h^6 + \cdots\right) \qquad (26)$$

Definindo,

$$\overline{\Lambda_p^{n}} = \frac{\sum_{p=1}^{N}\Lambda_p^{n}}{N} \quad \text{derivada média de ordem } n \qquad (27)$$

Com a eq. (27) em (26), tem-se

$$\mathcal{E}(\bar{\lambda}) = \frac{h}{L}\left[\overline{\Lambda_p''}\,N\frac{h^2}{24} + \overline{\Lambda_p^{iv}}\,N\frac{h^4}{1920} + \overline{\Lambda_p^{vi}}\frac{N\,h^6}{322\,560} + \cdots\right] \qquad (28)$$

Da eq. (1),

$$hN = L \qquad (29)$$

Com a eq. (29) em (28), chega-se a

$$\boxed{\mathcal{E}(\bar{\lambda}) = \frac{\overline{\Lambda_p''}}{24}h^2 + \frac{\overline{\Lambda_p^{iv}}}{1920}h^4 + \frac{\overline{\Lambda_p^{vi}}}{322\,560}h^6 + \cdots} \qquad (30)$$

Portanto, para $\mathcal{E}(\bar{\lambda})$,

$$p_V = 2,\ 4,\ 6,\ \ldots \qquad (31)$$

$$p_L = 2 \qquad (32)$$

$\Rightarrow$ PRESUME-SE QUE O MESMO RESULTADO SEJA VÁLIDO PARA UM TERMO FONTE NA EQUAÇÃO DIFERENCIAL