Multiextrapolação de Richardson para reduzir o erro de discretização de campos em CFD

Fabiana de Fátima Giacomini[&], **Carlos Henrique Marchi**[#],
Universidade Federal do Paraná (UFPR) - Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica[&]
Universidade Federal do Paraná (UFPR) - Departamento de Engenharia Mecânica[#]
81531-980, Curitiba, PR
E-mail: giacomini@ufpr.br[&], marchi@ufpr.br[#]

Cosmo Damião Santiago
Universidade Tecnológica Federal do Paraná (UTFPR)
86800-310, Apucarana, PR
E-mail: cosmo@utfpr.edu.br

***Resumo**: O objetivo deste trabalho é estender o uso da multiextrapolação de Richardson (MER) a campos de problemas 1 e 2D. São testados o método CRE (Completed Richardson Extrapolation), encontrado na literatura, e o FRE (Full Richardson Extrapolation), desenvolvido neste trabalho, ambos baseados em pós-processamento. São resolvidas por diferenças finitas as equações de Poisson, advecção-difusão, Laplace e Burgers, com aproximações de 1ª, 2ª e 4ª ordens de acurácia; e até 9 extrapolações. Verificou-se que: os métodos CRE e FRE reduzem o erro de discretização de soluções numéricas em todos os nós da malha; para Poisson 1D, o método FRE eleva a ordem de acurácia até 20; o método FRE reduz mais o erro das equações 1D de Poisson e advecção-difusão, e 2D de Laplace; e o método CRE reduz mais o erro de discretização das equações 1D e 2D de Burgers.*

Palavras-chave: erro de discretização, ordem de acurácia, extrapolação de Richardson, esquemas de alta ordem, diferenças finitas.

1 INTRODUÇÃO

Uma solução numérica ideal deve ter erro numérico nulo, ou seja, deve resultar na solução analítica. Portanto, estudar técnicas que sejam eficientes na redução do erro numérico ou de suas fontes é importante para que seja possível medir adequadamente o erro de modelagem, isto é, o erro de um modelo matemático usado para representar um fenômeno físico real.

Por isso, para reduzir o erro numérico causado por erros de discretização foi empregada a técnica de extrapolação, conhecida por extrapolação de Richardson [4], que segundo [3] traz as seguintes vantagens: (a) é um pós-processamento simples, pois não interfere na obtenção da solução numérica em uma dada malha; (b) seu custo computacional é muito baixo em termos de memória e tempo de CPU; (c) pode ser aplicada a códigos computacionais já existentes ou a resultados já obtidos; e (d) aplica-se a diversos métodos numéricos, aproximações numéricas e variáveis de interesse.

Assim, para reduzir o erro de discretização em várias malhas com h diferentes empregou-se a multiextrapolação de Richardson e para reduzir o erro de discretização em todos os pontos de cada malha adaptou-se a multiextrapolação de Richardson para campos.

2 MODELOS MATEMÁTICOS

Os modelos matemáticos unidimensionais (1D) usados nos testes dos métodos CRE e FRE são as equações de Poisson, advecção-difusão e Burgers [7], expressas respectivamente por

$$\frac{d^2u}{dx^2} = S_1 \qquad Pe\frac{du}{dx} = \frac{d^2u}{dx^2} \qquad Re\,u\frac{du}{dx} = \frac{d^2u}{dx^2} + S_2 \tag{1}$$

onde u representa a variável dependente; x é a coordenada espacial; Pe é o número de Peclet; Re é o número de Reynolds; e os termos fontes são $S_1 = -\pi^2 sen(\pi x)$ e $S_2 = e^x[Re(e^x-1)-e+1]/(e-1)^2$. As condições de contorno, do tipo Dirichlet, são: $u(0) = u(1) = 0$ para Poisson; e $u(0) = 0$ e $u(1) = 1$ para advecção-difusão e Burgers. A solução analítica da equação de Poisson é $u = sen(\pi x)$; e $u = (e^{xb} - 1)/(e^b - 1)$ para as equações de advecção-difusão ($b = Pe$) e Burgers ($b = Re$).

O primeiro modelo matemático bidimensional (2D) é a equação de Laplace, expressa por

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \tag{2}$$

onde y é a 2ª coordenada espacial. As condições de contorno e as soluções analíticas são dadas em [3].

As equações de Burgers são o segundo modelo matemático. Elas podem ser expressas por

$$u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{1}{\mathrm{Re}}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) \quad \text{e} \quad u\frac{\partial v}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{\partial p}{\partial y} + \frac{1}{\mathrm{Re}}\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2}\right) - S(x, y, \mathrm{Re}) \tag{3}$$

onde v representa a segunda variável dependente; p é a pressão, conhecida analiticamente; e S é um termo fonte. As variáveis p e S, as condições de contorno e as soluções analíticas são dadas em [6].

3 MODELOS NUMÉRICOS

A solução numérica sem extrapolação foi obtida pelo método de diferenças finitas [7] e a discretização foi realizada em malhas estruturadas e uniformes. Para Poisson 1D foram consideradas as aproximações CDS-2 e CDS-4 (*Central Differencing Scheme*). Para advecção-difusão 1D e Burgers 2D empregou-se duas formas de discretização: a primeira com UDS-1 (*Upstream Differencing Scheme*) para os termos advectivos e CDS-2 para os termos difusivos e a segunda com CDS-2 para ambos os termos. Para Burgers 1D e Laplace 2D a discretização foi realizada com CDS-2/CDS-2. O *solver* utilizado para problemas 1D foi o TDMA (*TriDiagonal Matrix Algorithm*) e para 2D foi o MSI (*Modified Strongly Implicit*) com o acelerador de convergência *multigrid* [8]. Os programas foram implementados em linguagem FORTRAN 95, versão Intel 11.1.065, e precisão quádrupla.

A solução numérica extrapolada foi obtida por meio da extrapolação completa pelos métodos CRE desenvolvido por [5] e FRE desenvolvido por [1]. Pelo método FRE 1D, em cada nó da malha fina que coincide com um nó da malha grossa, calcula-se a correção de Richardson (C) por meio de

$$C_{g,P}^{m} = \frac{u_{g,P}^{m-1} - u_{g-1,P}^{m-1}}{r^{p_{m-1}} - 1} \tag{4}$$

onde P é a posição espacial do nó na malha; p_m representa as ordens verdadeiras [3] do erro de discretização; $g = [1,G]$, onde $g = 1$ é a malha mais grossa, e $g = G$ é a malha mais fina; h é a distância entre dois nós consecutivos; $r = h_{g-1} / h_g$ é a razão de refino; e m é o número de extrapolações.

Para os nós da malha fina que não tem correspondente na malha grossa, a correção de Richardson (C) é calculada por meio de

$$C_{g,P}^{m} = C_{g,W}^{m} + k_{g,P}^{1}(C_{g,E}^{m} - C_{g,W}^{m}) \tag{5}$$

onde os nós W e E estão respectivamente à esquerda e à direita do nó P, cujas correções de Richardson (C) são calculadas com a Equação (4); e o fator de ponderação (k) é dado por

$$k_{g,P}^{1} = \frac{u_{g,P}^{m-1} - u_{g,W}^{m-1}}{u_{g,E}^{m-1} - u_{g,W}^{m-1}} \tag{6}$$

Finalmente, para todos os nós da malha fina, a solução extrapolada é obtida através de

$$u_{g,P}^{m} = u_{g,P}^{m-1} + C_{g,P}^{m} \tag{7}$$

4 RESULTADOS

As variáveis de interesse secundárias são dadas respectivamente por [2]

$$L1 \;=\; \frac{\sum_{i=1}^{N} \left| E_i \right|}{N} \qquad\qquad L2 \;=\; \left[\frac{\sum_{i=1}^{N} (E_i)^2}{N} \right]^{1/2} \qquad\qquad L\infty \;=\; \max_{1 \le i \le N} \left| E_i \right| \tag{8}$$

onde $L1$ é a média da norma um, $L2$ é a média da norma dois e $L\infty$ é a norma infinito do erro.

O erro de discretização da solução numérica em cada nó i é definido por

$$E_i \;=\; u_i^{analítica} \;-\; u_i^{numérica} \tag{9}$$

Para analisar a eficiência dos métodos CRE e FRE na redução do erro de discretização em todos os nós de uma malha, foi empregado o conceito de ordem efetiva para MER, calculada por [3]

$$(p_E)_{g,m} = \log\left(\frac{L1_{g-1,m-1}}{L1_{g,m}} \right) \div \log(r) \tag{10}$$

onde g = [2,G] e m = [1,g-1]. A seguir, são apresentados nas Figuras 1 a 4 apenas resultados de $L1$, pois os resultados de $L2$ e $L\infty$ são qualitativamente análogos [1].

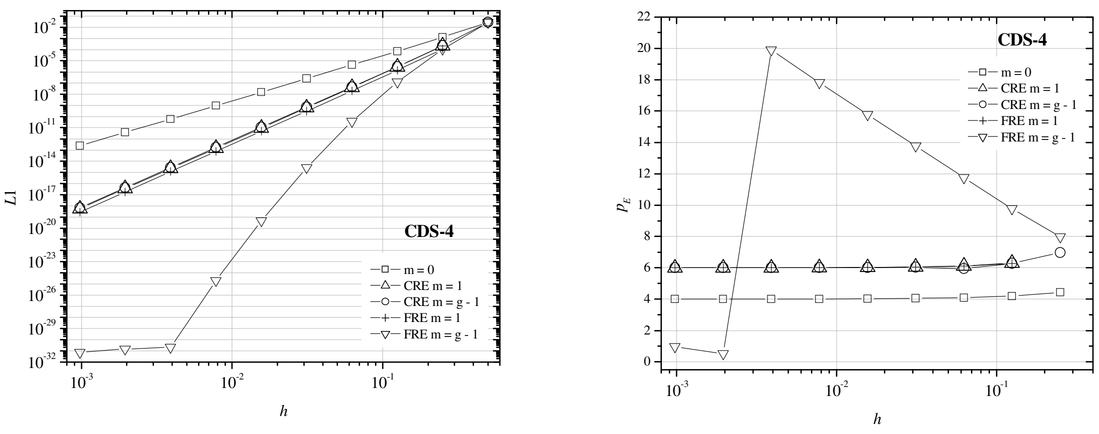

Figura 1: Resultados da equação de Poisson 1D

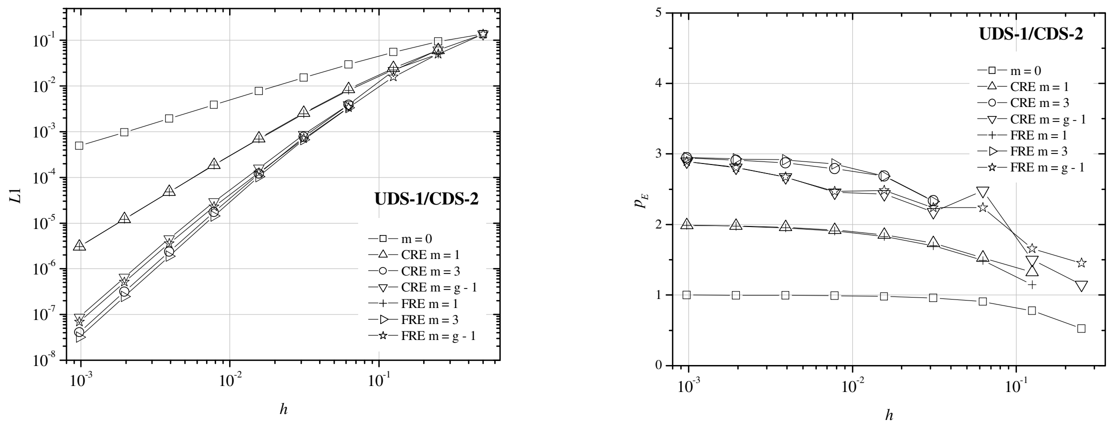

Figura 2: Resultados da equação de advecção-difusão 1D

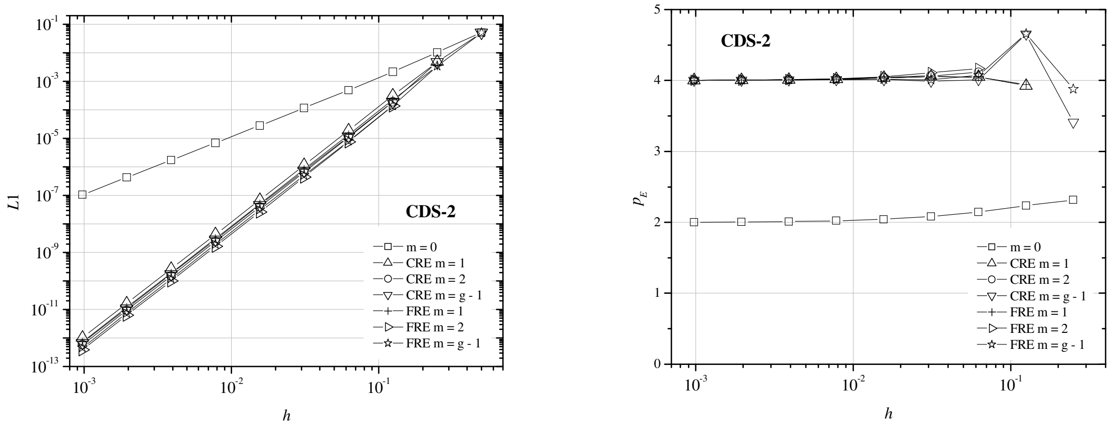

Figura 3: Resultados da equação de Laplace 2D

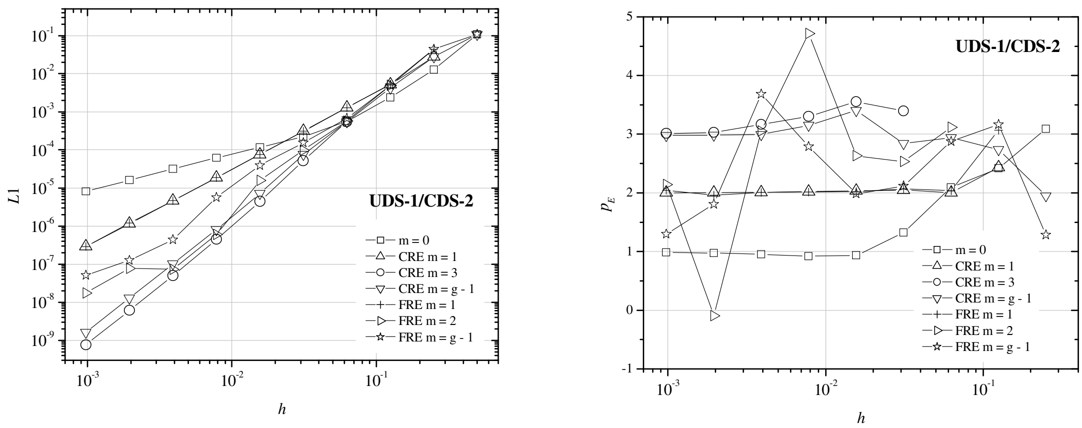

Figura 4: Resultados das equações de Burgers 2D

5 CONCLUSÃO

Entre os problemas físicos apresentados neste trabalho destacou-se a condução de calor, representada pela equação de Poisson, onde multiextrapolações aplicadas com FRE foram extremamente eficientes em reduzir o erro de discretização de todos os nós da malha. Pois, a aplicação de FRE nos erros obtidos pela diferença entre as soluções analítica e numérica, sendo esta calculada tanto pelo esquema de segunda ordem quanto pelo esquema de quarta ordem de acurácia, aumentou em 16 unidades a ordem do respectivo esquema numérico empregando sete extrapolações.

Para as equações de advecção-difusão, Laplace e Burgers 1D e 2D, multiextrapolações aplicadas com ambos os métodos, CRE e FRE, reduziram o erro de discretização de todos os nós da malha. Quando a discretização dessas equações era realizada com o esquema numérico CDS-2 para ambos os termos, difusivos e advectivos, a ordem do esquema numérico aumentou em 2 unidades para $m \geq 1$.

Para as equações de advecção-difusão e Burgers 2D, multiextrapolações aplicadas com ambos os métodos, CRE e FRE, reduziram o erro de discretização de todos os nós da malha. Quando a discretização dessas equações era realizada com o esquema numérico UDS-1 para os termos advectivos e CDS-2 para os termos difusivos, a ordem do esquema numérico aumentou em 2 unidades para $m \geq 2$.

Nos problemas modelados pelas equações de Poisson, advecção-difusão e Laplace, o método FRE reduziu mais o erro de discretização de campos do que o método CRE. Porém, nos problemas modelados por Burgers 1D e 2D, CRE apresentou os menores erros numéricos. No entanto, as ordens dos esquemas numéricos das equações de Burgers 1D, com CDS-2/CDS-2, e Burgers 2D, em ambas as discretizações, UDS-1/CDS-2 e CDS-2/CDS-2, apresentadas para ambos os métodos, aumentaram em 2 unidades.

AGRADECIMENTOS

Os autores agradecem o apoio financeiro do CNPq (Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico), AEB (Agência Espacial Brasileira, pelo Programa Uniespaço), e CAPES (Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior). O primeiro autor recebeu bolsa da CAPES. O segundo autor é bolsista do CNPq.

REFERÊNCIAS

[1] F. F. Giacomini, "Multiextrapolação de Richardson Completa para Reduzir o Erro de Discretização", Tese de Doutorado em Engenharia Mecânica, Universidade Federal do Paraná – UFPR, Curitiba, 2013.

[2] C. H. Marchi, M. A. Martins, Efeito do Tipo de Norma Sobre a Ordem de Acurácia do Erro de Soluções Numéricas, em "13th Congresso Brasileiro de Ciências Térmicas e Engenharia (XIII ENCIT)", Uberlândia, 2010.

[3] C. H. Marchi, L. A. Novak, C. D. Santiago, Múltiplas Extrapolações de Richardson para Reduzir e Estimar o Erro de Discretização da Equação de Laplace 2D, em "29th Congresso Ibero Latino-Americano de Métodos Computacionais em Engenharia (XXIX CILAMCE)", Maceió, 2008.

[4] L. F. Richardson, The Approximate Arithmetical Solution by Finite Differences of Physical Problems Involving Differential Equations, with an Application to the Stresses in a Masonry Dam, Phylosophical Proceedings of the Royal Society of London Serial A, vol. 210, pp. 307-357, (1910).

[5] P. J. Roache, P. M. Knupp, Completed Richardson Extrapolation, Communications in Numerical Methods in Engineering, vol. 9, pp. 365-374, (1993).

[6] T. M. Shih, C. H. Tan, B. C. Hwang, Effects of Grid Staggering on Numerical Schemes, International Journal for Numerical Methods in Fluids, vol. 9, pp. 193-212, (1989).

[7] J. C. Tannehill, D. A. Anderson, R. H. Pletcher, "Computational Fluid Mechanics and Heat Transfer", 2 ed, Washington: Taylor & Francis, 1997.

[8] P. Wesseling, "An introduction to multigrid methods", Wiley, New York, 1992.