DEFINIÇÕES GERAIS

Equação do erro (E) verdadeiro de discretização de uma variável de interesse (ϕ):

$$E(\phi_h) = C_1 h^{p_L} + C_2 h^{p_2} + C_3 h^{p_3} + \ldots \qquad (1)$$

onde

$C_1, C_2, C_3, \ldots$ = coeficientes constantes

h = tamanho dos elementos da malha

p_L = ordem assintótica do erro (1ª ordem verdadeira)

$p_L, p_2, p_3, \ldots$ = ordens verdadeiras do erro

p_2 = 2ª ordem verdadeira do erro

p_3 = 3ª " " "

ϕ_h = solução numérica calculada na malha h

O erro verdadeiro também pode ser calculado por:

$$\boxed{E(\phi_h) = \Phi_{exato} - \phi_h} \qquad (2)$$

onde

Φ_{exato} = solução analítica ~~verdadeira~~ exata de ϕ

Erro estimado ou incerteza (U):

$$\boxed{U(\phi_h) = \Phi_{est} - \phi_h} \qquad (3)$$

onde

Φ_{est} = solução analítica estimada de Φ_{exato}

ORDEM EFETIVA ~~DO ERRO DO~~ DE $E(\phi_h)$

Considerando-se apenas um termo na eq. (1),

$$E(\phi_h) = C h^{p_{E,h}} \qquad (4)$$

onde

$$\left.\begin{array}{l} p_{E,h} = \text{ordem efetiva do erro verdadeiro} \\ C = \text{constante} \end{array}\right\} \text{Incógnitas} = 2$$

Escrevendo a Eq. (4) para duas malhas:

$$E(\phi_{h,1}) = C h_1^{p_{E,h}} \qquad (5)$$

$$E(\phi_{h,2}) = C h_2^{p_{E,h}} \qquad (6)$$

onde

$\phi_{h,1}$ = sol. numérica calculada na malha h_1 (fina)

$\phi_{h,2}$ = " " " " " h_2 (grossa)

De (6),

$$C = \frac{E(\phi_{h,2})}{h_2^{p_{E,h}}} \qquad (7)$$

Com (7) em (5),

$$E(\phi_{h,1}) = \frac{E(\phi_{h,2})}{h_2^{p_{E,h}}} h_1^{p_{E,h}} \quad \text{ou} \quad \frac{h_2^{p_{E,h}}}{h_1^{p_{E,h}}} = \frac{E(\phi_{h,2})}{E(\phi_{h,1})}$$

ou ainda

$$\left(\frac{h_2}{h_1}\right)^{p_{E,h}} = \frac{E(\phi_{h,2})}{E(\phi_{h,1})} \qquad (8)$$

Definindo a razão de refino (r) entre as malhas h_1 (fina) e h_2 (grossa) por

$$\boxed{r_{21} = \frac{h_2}{h_1}} \qquad (9)$$

A Eq. (8) pode ser reescrita por

$$\Lambda_{21}^{p_{E,h}} = \frac{E(\phi_{h,2})}{E(\phi_{h,1})}$$

ou

$$\log\left(\Lambda_{21}^{p_{E,h}}\right) = \log\left[\frac{E(\phi_{h,2})}{E(\phi_{h,1})}\right]$$

ou, ainda,

$$\boxed{p_{E,h} = \frac{\log\left[\frac{E(\phi_{h,2})}{E(\phi_{h,1})}\right]}{\log(\Lambda_{21})}} \tag{10}$$

$p_{E,h}$ existe para $\frac{E(\phi_{h,2})}{E(\phi_{h,1})} > 0$ (11)

Caso contrário, $p_{E,h}$ é indefinido, não existe.

ESTIMADOR DELTA (U_Δ)

$$\boxed{U_\Delta(\phi_{h,1}) = |\phi_{h,1} - \phi_{h,2}|} \tag{12}$$

ESTIMADOR DE RICHARDSON COM h_1, h_2 E p_L $\left(U_{Ri}^{12}\right)$

Aproximando a Eq. (1) por

$$U(\phi_h) = K\, h^{p_L} \qquad (13)$$

com a Eq. (3), obtém-se

$$\Phi_{est} = \phi_h + K\, h^{p_L} \qquad (14)$$

Escrevendo a Eq. (14) para as malhas h_1 (fina) e h_2 (grossa), tem-se

$$\Phi_{est}^{12} = \phi_{h,1} + K\, h_1^{p_L} \qquad (15)$$

$$\Phi_{est}^{12} = \phi_{h2} + K\, h_2^{p_L} \qquad (16)$$

Da Eq. (15),

$$K = \frac{\Phi_{est}^{12} - \phi_{h1}}{h_1^{p_L}} \qquad (17)$$

Com a Eq. (17) em (16),

$$\Phi_{est}^{12} = \phi_{h2} + \frac{\left(\Phi_{est}^{12} - \phi_{h1}\right)}{h_1^{p_L}}\, h_2^{p_L}$$

ou

$$\Phi_{est}^{12}\left(h_1^{p_L} - h_2^{p_L}\right) = \phi_{h2}\, h_1^{p_L} - \phi_{h_1}\, h_2^{p_L} \qquad \times(-1)$$

ou

$$\Phi_{est}^{12} = \frac{\phi_{h_1} h_2^{p_L} - \phi_{h2} h_1^{p_L}}{h_2^{p_L} - h_1^{p_L}} \qquad \div\, h_1^{p_L}$$

e com a Eq. (9)

$$\Phi_{est}^{12} = \frac{\phi_{h_1} r_{21}^{p_L} - \phi_{h2}}{r_{21}^{p_L} - 1}$$

ou

$$\Phi_{est}^{12} = \frac{\phi_{h_1}\left(r_{21}^{p_L} - 1\right) + \phi_{h_1} - \phi_{h2}}{r_{21}^{p_L} - 1}$$

que resulta em

$$\boxed{\Phi_{est,h_1}^{12} = \phi_{h_1} + \frac{(\phi_{h_1} - \phi_{h_2})}{(r_{21}^{p_L} - 1)}} \qquad (18)$$

Com a Eq. (18) em (3), finalmente

$$\boxed{U_{Ri}^{12}(\phi_{h_1}) = \frac{(\phi_{h_1} - \phi_{h_2})}{(r_{21}^{p_L} - 1)}} \qquad (19)$$

ESTIMADOR DE RICHARDSON COM h_2 E h_3 E p_L (U_{Ri}^{23})

Escrevendo a Eq. (14) para as malhas grossa (h_2) e supergrossa (h_3), tem-se

$$\Phi_{est}^{23} = \phi_{h_2} + K h_2^{p_L} \qquad (20)$$

$$\Phi_{est}^{23} = \phi_{h_3} + K h_3^{p_L} \qquad (21)$$

Da Eq. (20), $$K = \frac{\Phi_{est}^{23} - \phi_{h_2}}{h_2^{p_L}} \qquad (22)$$

Com a Eq. (22) em (21),

$$\Phi_{est}^{23} = \phi_{h_3} + \frac{(\Phi_{est}^{23} - \phi_{h_2})}{h_2^{p_L}} h_3^{p_L}$$

ou

$$\Phi_{est}^{23}(h_2^{p_L} - h_3^{p_L}) = \phi_{h_3} h_2^{p_L} - \phi_{h_2} h_3^{p_L} \qquad \times(-1)$$

ou

$$\Phi_{est}^{23} = \frac{\phi_{h_2} h_3^{p_L} - \phi_{h_3} h_2^{p_L}}{h_3^{p_L} - h_2^{p_L}} \qquad \div h_2^{p_L}$$

e definindo

$$\boxed{r_{32} = \frac{h_3}{h_2}} \qquad (23)$$

como a razão de refino entre as malhas grossa (h_2) e supergrossa (h_3), obtém-se

$$\Phi_{est}^{23} = \frac{\phi_{h2}\, r_{32}^{p_L} - \phi_{h3}}{r_{32}^{p_L} - 1}$$

ou

$$\Phi_{est}^{23} = \frac{\phi_{h2}\,(r_{32}^{p_L} - 1) + \phi_{h2} - \phi_{h3}}{r_{32}^{p_L} - 1}$$

que resulta em

$$\boxed{\Phi_{est,h1}^{23} = \phi_{h2} + \frac{(\phi_{h2} - \phi_{h3})}{(r_{32}^{p_L} - 1)}} \qquad (24)$$

Com a Eq. (24) em (3),

$$\boxed{U_{Ri}^{23}(\phi_{h1}) = \phi_{h2} - \phi_{h1} + \frac{(\phi_{h2} - \phi_{h3})}{(r_{32}^{p_L} - 1)}} \qquad (25)$$

ESTIMADOR DE RICHARDSON COM h_1 E h_3 E p_L (U_{Ri}^{13})

Escrevendo a eq. (14) para as malhas fina (h_1) e supergrossa (h_3), tem-se

$$\Phi_{est}^{13} = \phi_{h1} + K h_1^{p_L} \qquad (26)$$

$$\Phi_{est}^{13} = \phi_{h3} + K h_3^{p_L} \qquad (27)$$

Da Eq. (26),

$$K = \frac{\Phi_{est}^{13} - \phi_{h1}}{h_1^{p_L}} \qquad (28)$$

Com a Eq. (28) em (27),

$$\Phi_{est}^{13} = \phi_{h3} + \frac{(\Phi_{est}^{13} - \phi_{h1})}{h_1^{p_L}}\, h_3^{p_L}$$

ou

$$\Phi_{est}^{13}\left(h_1^{p_L}-h_3^{p_L}\right)=\phi_{h3}\,h_1^{p_L}-\phi_{h1}\,h_3^{p_L} \qquad \times(-1)$$

ou

$$\Phi_{est}^{13}=\frac{\phi_{h1}h_3^{p_L}-\phi_{h3}h_1^{p_L}}{h_3^{p_L}-h_1^{p_L}} \qquad \div\, h_1^{p_L}$$

ou

$$\Phi_{est}^{13}=\frac{\phi_{h1}\left(\frac{h_3}{h_1}\right)^{p_L}-\phi_{h3}}{\left(\frac{h_3}{h_1}\right)^{p_L}-1} \tag{29}$$

Mas $\quad \dfrac{h_3}{h_1}=\left(\dfrac{h_3}{h_2}\right)\cdot\left(\dfrac{h_2}{h_1}\right)$

que com as eqs. (9) e (23), resulta em

$$\frac{h_3}{h_1}=\Lambda_{32}\cdot\Lambda_{21} \tag{30}$$

Com a Eq. (30) em (29), chega-se a

$$\Phi_{est}^{13}=\frac{\phi_{h1}(\Lambda_{32}\Lambda_{21})^{p_L}-\phi_{h3}}{(\Lambda_{32}\Lambda_{21})^{p_L}-1}$$

ou

$$\Phi_{est}^{13}=\frac{\phi_{h1}\left[(\Lambda_{32}\Lambda_{21})^{p_L}-1\right]+\phi_{h1}-\phi_{h3}}{(\Lambda_{32}\Lambda_{21})^{p_L}-1}$$

que resulta em

$$\boxed{\Phi_{est,h1}^{13}=\phi_{h1}+\frac{(\phi_{h1}-\phi_{h3})}{\left[(\Lambda_{32}\Lambda_{21})^{p_L}-1\right]}} \tag{31}$$

Com a Eq. (31) em (3), finalmente

$$\boxed{U_{Ri}^{13}(\phi_{h1})=\frac{(\phi_{h1}-\phi_{h3})}{\left[(\Lambda_{32}\Lambda_{21})^{p_L}-1\right]}} \tag{32}$$

ESTIMADOR DE RICHARDSON COM h_1, h_2, h_3 E $p_{U,h}$ $(U_{Ri}^{p_{U,h}})$

De forma semelhante à Eq. (13), onde é necessário conhecer p_L, a Eq. (1) também pode ser aproximada por

$$U(\phi_h) = K h^{p_{U,h}} \qquad (33)$$

onde

$p_{U,h}$ = ordem aparente do erro estimado de ϕ_h

K = constante

Com a Eq. (3) em (33),

$$\Phi_{est} = \phi_h + K h^{p_{U,h}} \qquad (34)$$

Nesta equação, Φ_{est}, K e $p_{U,h}$ são incógnitas. Assim, são necessárias três soluções numéricas (ϕ_{h1}, ϕ_{h2} e ϕ_{h3}), obtidas em três malhas diferentes (h_1, h_2 e h_3) para determinar estas incógnitas, isto é,

$$\Phi_{est}^{p_{U,h}} = \phi_{h1} + K h_1^{p_{U,h}} \qquad (35)$$

$$\Phi_{est}^{p_{U,h}} = \phi_{h2} + K h_2^{p_{U,h}} \qquad (36)$$

$$\Phi_{est}^{p_{U,h}} = \phi_{h3} + K h_3^{p_{U,h}} \qquad (37)$$

Igualando as Eqs. (35) e (36),

$$\phi_{h1} + K h_1^{p_{U,h}} = \phi_{h2} + K h_2^{p_{U,h}} \qquad (38)$$

Igualando as Eqs. (36) e (37),

$$\phi_{h2} + K h_2^{p_{U,h}} = \phi_{h3} + K h_3^{p_{U,h}} \qquad (39)$$

Da Eq. (38),

$$\frac{\phi_{h1} - \phi_{h2}}{h_2^{p_{U,h}} - h_1^{p_{U,h}}} = K \qquad (40)$$

Da Eq. (39),

$$\frac{\phi_{h2}-\phi_{h3}}{h_3^{p_{U,h}}-h_2^{p_{U,h}}}=K \qquad (41)$$

Igualando as Eqs. (40) e (41)

$$\frac{\phi_{h1}-\phi_{h2}}{h_2^{p_{U,h}}-h_1^{p_{U,h}}}=\frac{\phi_{h2}-\phi_{h3}}{h_3^{p_{U,h}}-h_2^{p_{U,h}}}$$

ou

$$\frac{\phi_{h2}-\phi_{h3}}{\phi_{h1}-\phi_{h2}}=\frac{h_3^{p_{U,h}}-h_2^{p_{U,h}}}{h_2^{p_{U,h}}-h_1^{p_{U,h}}} \qquad (42)$$

Definindo a taxa de convergência (ψ_h) de ϕ_h por

$$\boxed{\psi_h=\frac{\phi_{h2}-\phi_{h3}}{\phi_{h1}-\phi_{h2}}} \qquad (43)$$

Dividindo a Eq. (42) por $h_2^{p_{U,h}}$ e com a Eq. (43), tem-se

$$\psi_h=\frac{\dfrac{h_3^{p_{U,h}}-h_2^{p_{U,h}}}{h_2^{p_{U,h}}}}{\dfrac{h_2^{p_{U,h}}-h_1^{p_{U,h}}}{h_2^{p_{U,h}}}}$$

ou

$$\psi_h=\frac{\left(\dfrac{h_3}{h_2}\right)^{p_{U,h}}-1}{1-\left(\dfrac{h_1}{h_2}\right)^{p_{U,h}}} \qquad (44)$$

Com as definições de r_{21}, Eq. (9), e r_{32}, Eq. (23), a Eq. (44) se reduz a

$$\psi_h=\frac{r_{32}^{p_{U,h}}-1}{1-\dfrac{1}{r_{21}^{p_{U,h}}}}$$

ou

$$\psi_h = \frac{\left(\Lambda_{32}^{p_{v,h}} - 1\right)}{\frac{\left(\Lambda_{21}^{p_{v,h}} - 1\right)}{\Lambda_{21}^{p_{v,h}}}}$$

ou ainda

$$\psi_h = \Lambda_{21}^{p_{v,h}} \frac{\left(\Lambda_{32}^{p_{v,h}} - 1\right)}{\left(\Lambda_{21}^{p_{v,h}} - 1\right)} \tag{45}$$

ou

$$\Lambda_{21}^{p_{v,h}} = \psi_h \frac{\left(\Lambda_{21}^{p_{v,h}} - 1\right)}{\left(\Lambda_{32}^{p_{v,h}} - 1\right)}$$

Aplicando-se o logaritmo decimal nos dois membros,

$$\log\left(\Lambda_{21}^{p_{v,h}}\right) = \log\left[\psi_h \frac{\left(\Lambda_{21}^{p_{v,h}} - 1\right)}{\left(\Lambda_{32}^{p_{v,h}} - 1\right)}\right]$$

que resulta em

$$p_{v,h} \log\left(\Lambda_{21}\right) = \log\left[\psi_h \frac{\left(\Lambda_{21}^{p_{v,h}} - 1\right)}{\left(\Lambda_{32}^{p_{v,h}} - 1\right)}\right]$$

ou

$$\boxed{p_{v,h} = \frac{\log\left[\psi_h \frac{\left(\Lambda_{21}^{p_{v,h}} - 1\right)}{\left(\Lambda_{32}^{p_{v,h}} - 1\right)}\right]}{\log\left(\Lambda_{21}\right)}} \quad \Lambda_{32} \neq \Lambda_{21} \tag{46}$$

Eq. Transcendental

No caso particular de $\Lambda_{32} = \Lambda_{21}$, a Eq. (46) se reduz a

$$\boxed{p_{v,h} = \frac{\log\left(\psi_h\right)}{\log\left(\Lambda_{21}\right)}} \quad \Lambda_{32} = \Lambda_{21} \tag{47}$$

Com a Eq. (40) em (35),

$$\Phi_{est}^{pu,h} = \phi_{h1} + \frac{(\phi_{h1} - \phi_{h2})}{(h_2^{pu,h} - h_1^{pu,h})} h_1^{pu,h}$$

ou

$$\Phi_{est}^{pu,h} = \phi_{h1} + \frac{(\phi_{h1} - \phi_{h2})}{\left[\left(\frac{h_2}{h_1}\right)^{pu,h} - \left(\frac{h_1}{h_1}\right)^{pu,h}\right]}$$

que, com a Eq. (9), resulta em

$$\boxed{\Phi_{est,h1}^{pu,h} = \phi_{h1} + \frac{(\phi_{h1} - \phi_{h2})}{(r_{21}^{pu,h} - 1)}} \qquad (48)$$

Com a Eq. (48) em (3), obtém-se finalmente

$$\boxed{U_{Ri}^{pu,h}(\phi_{h1}) = \frac{(\phi_{h1} - \phi_{h2})}{(r_{21}^{pu,h} - 1)}} \qquad (49)$$

ERROS VERDADEIROS DOS Φ_{est} : com os Φ_{est} na Eq. (2)

$$E(\Phi_{est,h1}^{12}) = \Phi_{exato} - \Phi_{est,h1}^{12} \qquad (50)$$

$$E(\Phi_{est,h1}^{23}) = \Phi_{exato} - \Phi_{est,h1}^{23} \qquad (51)$$

$$E(\Phi_{est,h1}^{13}) = \Phi_{exato} - \Phi_{est,h1}^{13} \qquad (52)$$

$$E(\Phi_{est,h1}^{pu,h}) = \Phi_{exato} - \Phi_{est,h1}^{pu,h} \qquad (53)$$

ORDEM EFETIVA DE $E(\Phi_{est}^{p_U,h})$

Seguindo as deduções das páginas 2 e 3, pode-se obter

$$\boxed{p_{E,\infty} = \frac{\log\left[\dfrac{E(\Phi_{est,h2}^{p_U,h})}{E(\Phi_{est,h1}^{p_U,h})}\right]}{\log(r_{21})}} \qquad (54)$$

onde $E(\Phi_{est,h}^{p_U,h})$ é dado pela Eq. (53).

ORDEM APARENTE DE $\Phi_{est}^{p_U,h}$

Seguindo as deduções das páginas 8 a 11, obtém-se

$$\boxed{p_{U,\infty} = \frac{\log\left[\psi_\infty \dfrac{(r_{21}^{p_{U,\infty}} - 1)}{(r_{32}^{p_{U,\infty}} - 1)}\right]}{\log(r_{21})}} \qquad r_{32} \neq r_{21} \qquad (55)$$

onde a taxa de convergência de $\Phi_{est}^{p_U,h}$ é dada por

$$\boxed{\psi_\infty = \frac{(\Phi_{est,h2}^{p_U,h} - \Phi_{est,h3}^{p_U,h})}{(\Phi_{est,h1}^{p_U,h} - \Phi_{est,h2}^{p_U,h})}} \qquad (56)$$

No caso particular de $r_{32} = r_{21}$, a Eq (55) se reduz a

$$\boxed{p_{U,\infty} = \frac{\log(\psi_\infty)}{\log(r_{21})}} \qquad r_{32} = r_{21} \qquad (57)$$

Também pode-se obter

$$\boxed{\Phi_{est,h1}^{pU,\infty} = \Phi_{est,h1}^{pU,h} + \frac{\left(\Phi_{est,h1}^{pU,h} - \Phi_{est,h2}^{pU,h}\right)}{\left(r_{21}^{pU,\infty} - 1\right)}} \qquad (58)$$

ORDEM EFETIVA DE $E(\Phi_{est}^{pU,\infty})$

Seguindo as deduções das páginas 2 e 3, pode-se obter

$$\boxed{p_{E,b\infty} = \frac{\log\left[\dfrac{E(\Phi_{est,h2}^{pU,\infty})}{E(\Phi_{est,h1}^{pU,\infty})}\right]}{\log(r_{21})}} \qquad (59)$$

onde

$$E(\Phi_{est,h}^{pU,\infty}) = \Phi_{exato} - \Phi_{est,h}^{pU,\infty} \qquad (60)$$

ORDEM APARENTE DE $\Phi_{est}^{pU,\infty}$

Seguindo as deduções das páginas 8 a 11, obtém-se

$$\boxed{p_{U,b\infty} = \frac{\log\left[\psi_{b\infty}\dfrac{(r_{21}^{p_{U,b\infty}} - 1)}{(r_{32}^{p_{U,b\infty}} - 1)}\right]}{\log(r_{21})}} \qquad r_{32} \neq r_{21} \qquad (61)$$

onde

$$\boxed{\psi_{b\infty} = \frac{\left(\Phi_{est,h2}^{pU,\infty} - \Phi_{est,h3}^{pU,\infty}\right)}{\left(\Phi_{est,h1}^{pU,\infty} - \Phi_{est,h1}^{pU,\infty}\right)}} \qquad (62)$$

Se r constante, então a Eq. (61) se reduz a

$$\boxed{p_{U,b\infty} = \frac{\log(\psi_{b\infty})}{\log(r_{21})}} \qquad r_{32} = r_{21} \qquad (63)$$