

Definição das variáveis principais consideradas no Programa Richardson 4.0

1) Ordens verdadeiras

`real*16,dimension(:),allocatable` :: pV ! ordens verdadeiras do erro verdadeiro

`character*5,dimension(:),allocatable` :: pVt ! pV em formato texto

Eh = erro de discretização da variável de interesse (qualquer) denotada por Th .

$$Eh = c_0 h^{p_0} + c_1 h^{p_1} + c_2 h^{p_2} + c_3 h^{p_3} + \dots$$

$1 \leq p_0 < p_1 < p_2 < p_3 \dots$ são as ordens verdadeiras; p_0 é a ordem assintótica.

2) Ordem aparente (p_U) e razão de convergência de Th

`real*16,dimension(:),allocatable` :: pU_h ! ordem aparente do erro estimado de Th

`real*16,dimension(:),allocatable` :: pU_h1 ! ordem aparente equivalente do erro estimado de Th

`real*16,dimension(:),allocatable` :: psi_v ! Vetor razão de convergência psi para Th

p_U diz respeito à inclinação local do gráfico da estimativa de Eh , isto é, $Uh \times h$. A partir dos resultados obtidos nas malhas uniformes com espaçamentos entre os pontos nodais h_g , h_{g-1} e h_{g-2} o cálculo de p_U é obtido considerando-se a expressão:

$$pU_h = p_{U,g} = \frac{\log|\psi|}{\log(r)}, \psi = \frac{Th_{g-1} - Th_{g-2}}{Th_g - Th_{g-1}} \text{ onde } r = h_g / h_{g-1} / h_{g-2}, g \geq 3.$$

psi_v = ψ é denominado razão de convergência de Th .

pU_h1 = p_U^* ; a razão de convergência equivalente diz respeito a

$$p_{U,g}^* = \frac{\log|\psi|}{\log(r)}.$$

3) Estimador GCI (Roache)

`real*16,dimension(:),allocatable` :: U_GCI ! Estimador GCI (Roache)

O estimador GCI (*Grid Convergence Index*) (ROACHE, 1998) considera a seguinte expressão:

$$U_{GCI}(Th_g) = F_s \frac{|Th_g - Th_{g-1}|}{(r^{p^*} - 1)}, F_s = 1,25 \text{ e } p^* = \min\{p_0, p_U\} \text{ se } g \geq 3 \text{ malhas, ou } p^* = p_0 \text{ quando}$$

p_U não puder ser calculada; para $g = 2$, admite-se $F_s = 3$ e $p^* = p_0$ (ROACHE, 2011).

4) Solução extrapolada e estimador Richardson

`real*16,dimension(:),allocatable` :: U_Ri_p0 ! Estimador Richardson com base na ordem assintótica (p_0)

`real*16,dimension(:),allocatable` :: U_Ri_pU ! Estimador Richardson com base na ordem aparente (p_U)

`real*16,dimension(:),allocatable` :: T_inf_p0 ! Solução extrapolada com p_0

`real*16,dimension(:),allocatable` :: T_inf_pU ! Solução extrapolada com p_U

`real*16,dimension(:),allocatable` :: Ti_pU1 ! Th extrapolado com p_U equivalente

$$U_Ri_p0 = U_{Ri,p_0} = U_{Ri,p_0}(Th_g) = \frac{(Th_g - Th_{g-1})}{(r^{p_0} - 1)}, r = h_g / h_{g-1}, g \geq 2.$$

$$U_Ri_pU = U_{Ri,p_U} = U_{Ri,p_U}(Th_g) = \frac{(Th_g - Th_{g-1})}{(r^{p_U} - 1)}, r = h_g / h_{g-1} / h_{g-2}, g \geq 3.$$

$$T_{\text{inf}_p0} = Th_{\infty,p0} = Th_{\infty,p0}(Th_g) = Th_g + \frac{(Th_g - Th_{g-1})}{(r^{p_0} - 1)}, r = h_g / h_{g-1}, g \geq 2.$$

$$T_{\text{inf}_pU} = Th_{\infty,pU} = Th_{\infty,pU}(Th_g) = Th_g + \frac{(Th_g - Th_{g-1})}{(r^{p_U} - 1)}, r = h_g / h_{g-1} / h_{g-2}, g \geq 3.$$

$$Ti_{pU1} = Th_{\infty,pU^*} = Th_{\infty,pU^*}(Th_g) = Th_g + \frac{(Th_g - Th_{g-1})}{(r^{p_{U^*}} - 1)}, r = h_g / h_{g-1} / h_{g-2}, g \geq 3.$$

5) Solução convergente e estimador convergente

`real*16,dimension(:),allocatable :: T_c` ! Solução numérica convergente
`real*16,dimension(:),allocatable :: U_c` ! Estimador convergente

Th_{∞,p_0} e Th_{∞,p_U} constituem uma envolvente da solução analítica de Th , de modo que esse valor (desconhecido) pertence a $[Th_{\infty,p_0}, Th_{\infty,p_U}]$ se p_U for subconvergente, ou ao intervalo $[Th_{\infty,p_U}, Th_{\infty,p_0}]$ se p_U superconvergente. Com base no conceito de envolvente são obtidas as expressões para solução numérica convergente, representada por $Th_c = T_c$, onde

$$Th_c = \frac{Th_{\infty,p_0} + Th_{\infty,p_U}}{2}, g \geq 3; \text{ e sua respectiva incerteza representada por } U_c = U_c,$$

$$U_c = \frac{|U_{Ri,p_0} - U_{Ri,p_U}|}{2}, g \geq 3.$$

6) Ordem aparente equivalente da Solução convergente

`real*16,dimension(:),allocatable :: pU_c1` ! ordem aparente equivalente do erro estimado para solução convergente

$$pU_{c1} = \frac{\log \left| \frac{Th_{c,g-1} - Th_{c,g-2}}{Th_{c,g} - Th_{c,g-1}} \right|}{\log(r)}, r = h_g / h_{g-1} / h_{g-2}, g \geq 5.$$

7) Solução extrapolada com pU equivalente

`real*16,dimension(:),allocatable :: Ti_pU1` ! Th extrapolado com as malhas 1 a 3 e pU_h equivalente

$$Ti_{pU1} = Th_{\infty,pU^*} = Th_{\infty,pU^*}(Th_g) = Th_g + \frac{(Th_g - Th_{g-1})}{(r^{p_{U^*}} - 1)}, r = h_g / h_{g-1} / h_{g-2}, g \geq 3.$$

8) Ordem aparente equivalente do erro estimado de Th_{∞,pU^*}

`real*16,dimension(:),allocatable :: pU_i1` ! ordem aparente equivalente do erro estimado de Ti_{pU^*}

$$pU_{i1} = \frac{\log \left| \frac{Th_{\infty,pU^*,g-1} - Th_{\infty,pU^*,g-2}}{Th_{\infty,pU^*,g} - Th_{\infty,pU^*,g-1}} \right|}{\log(r)}, \text{ onde } r = h_g / h_{g-1} / h_{g-2}, g \geq 5.$$

9) Solução biextrapolada com pU equivalente

`real*16,dimension(:),allocatable :: Tbi_pU1` ! Th biextrapolado com malhas 1 a 5 e pU_i equivalente

$$Tbi_{pU1} = (Th_{\infty,pU^*})_g + \frac{((Th_{\infty,pU^*})_g - (Th_{\infty,pU^*})_{g-1})}{(r^{p_{U_i1}} - 1)}, h_g / h_{g-1} / h_{g-2}, g \geq 5.$$

10) Ordem aparente equivalente do erro estimado de Tbi_pU1

`real*16,dimension(:),allocatable :: pU_bil ! ordem aparente equivalente do erro estimado de Tbi_pU`

$$pU_bil = \frac{\log \left| \frac{(Tbi_pU1)_{g-1} - (Tbi_pU1)_{g-2}}{(Tbi_pU1)_g - (Tbi_pU1)_{g-1}} \right|}{\log(r)}, \text{ onde } r = h_g / h_{g-1} / h_{g-2}, g \geq 7.$$

11) Solução numérica com MER

`real*16,dimension(:,:),allocatable :: Tm_12 ! Th multiextrapolado com as malhas 1 e 2 e pV`

`real*16,dimension(:),allocatable :: T_MER ! Th multiextrapolado (último nível de extrapolação em cada malha)`

Em uma malha uniforme com espaçamento h_g entre os pontos nodais, onde g indica o nível de malha, com m aplicações da extrapolação de Richardson tem-se:

$$Tm_12 = Th_{g,m} = Th_{g,m-1} + \frac{Th_{g,m-1} - Th_{g-1,m-1}}{r^{p_{m-1}} - 1}.$$

Para $m=1$, tem-se o primeiro nível de extrapolação e considera-se p_0 . Para os demais níveis (variação de m), p_{m-1} corresponde aos próximos valores das ordens verdadeiras. Essa equação é válida para $g = 2, \dots, G$ e $m = 1, \dots, g-1$. Em qualquer malha h_g , $Th_{g,0}$ representa a solução numérica (Th) sem o emprego de extrapolação. O emprego de MER, sobre Th , para obtenção de Tm_12 é detalhado abaixo.

- 1) Obter soluções numéricas para variável de interesse Th em G malhas distintas: $Th_1, Th_2, Th_3, \dots, Th_G$.
- 2) Fazer: $Th_{1,0} = Th_1, Th_{2,0} = Th_2, Th_{2,0} = Th_2, \dots, Th_{G,0} = Th_G$.
- 3) Fornecer os valores de p_0, p_1, \dots, p_m .
- 4) Para $m = 1, \dots, G-1$

Para $g = m + 1, \dots, G$

$$Th_{g,m} = Th_{g,m-1} + \frac{Th_{g,m-1} - Th_{g-1,m-1}}{r^{p_{m-1}} - 1}.$$

A solução numérica com MER para variável Th diz respeito à solução $Th_{g,m}$ em diversos níveis de malhas e de extrapolação. Isto é, a solução com MER envolve níveis de malhas e de extrapolação distintos. Ao se considerar, apenas, o nível máximo de extrapolação ($m = g - 1$) em cada malha (g) para $g = 2, \dots, G$ malhas distintas, tem-se a seguinte solução (denotada por Tm e representada no código por T_MER): $Th_{2,1}, Th_{3,2}, \dots, Th_{g,g-1}, \dots, Th_{G,G-1}$. A tabela abaixo traz uma representação esquemática de $Tm = T_MER$.

$m = 0$	$m = 1$	$m = 2$...	$m = G - 2$	$m = G - 1$
$\phi_{1,0} = \phi_1$					
$\phi_{2,0} = \phi_2$	$\phi_{2,1}$				
$\phi_{3,0} = \phi_3$	$\phi_{3,1}$	$\phi_{3,2}$			
...
$\phi_{G-1,0} = \phi_{G-1}$	$\phi_{G-1,1}$	$\phi_{G-1,2}$...	$\phi_{G-1,G-2}$	
$\phi_{G,0} = \phi_G$	$\phi_{G,1}$	$\phi_{G,2}$...	$\phi_{G,G-2}$	$\phi_{G,G-1}$

12) Ordem aparente equivalente do erro estimado de $Tm = T_{MER}$.

`real*16,dimension(:),allocatable :: pU_MER ! Ordem aparente de Th multiextrapolado (último nível de extrapolação em cada malha)`

$$pU_{MER} = \frac{\log \left| \frac{Th_{g-1,m-1} - Th_{g-2,m-2}}{Th_{g,m} - Th_{g-1,m-1}} \right|}{\log(r)}, \text{ onde } r = h_g / h_{g-1} / h_{g-2}, g \geq 3.$$

Onde se considera, apenas, as soluções: $Th_{1,0} = Th_0, Th_{2,1}, Th_{3,2}, \dots, Th_{g,m}, \dots, Th_{g=G,m=G-1}$.

13) Estimador para MER com base na razão de convergência interníveis média, $(U_{Ri,m\Psi_{MER}})$.

`real*16,dimension(:),allocatable :: U_Ri_mpsi_MER ! Estimador Richardson com psi médio de MER interníveis (psi atribuído à malha intermediária do trio)`

Admite-se, aqui, o emprego da razão de convergência interníveis média de Tm , como:

$$(\Psi_{MER})_{g+1} = (m\Psi_{MER})_g = \frac{Th_{g,m} - Th_{g-1,m-1}}{Th_{g+1,m+1} - Th_{g,m}}, U_{Ri,m\Psi_{MER}} = U_{Ri,m\Psi_{MER}}(Th_{g,m}) = \frac{Th_{g,m} - Th_{g-1,m-1}}{(m\Psi_{MER})_g - 1};$$

para $Th_{2,1}, Th_{3,2}, \dots, Th_{g,g-1}, \dots, Th_{G-1,m=G-2}$.

E para $g = G, m = G - 1$ considera-se $\Psi = (\Psi_{MER})_g^2 / (\Psi_{MER})_{g-1}$, isto é:

$$U_{Ri,mpsi_MER} = U_{Ri,m\Psi_{MER}}(Th_{g,m}) = \frac{Th_{g,m} - Th_{g-1,m-1}}{\Psi - 1}, g = G, m = G - 1.$$

Desse modo, $U_{Ri,mpsi_MER} = U_{Ri,m\Psi_{MER}}(Th_{g,m})$ indica a estimativa de Eh associado à Tm , para $g = 2, \dots, G$.

14) Estimador Multicoeficiente (com base em MER) (U_{mc})

`real*16,dimension(:),allocatable :: U_mc ! Estimador multicoeficiente, com base em MER`

O estimador Multicoeficiente considera que a estimativa para Eh é composta por “ $m+1$ ” coeficientes, isto é,

$$U_{mc} = c_0 h^{p_0} + c_1 h^{p_1} + c_2 h^{p_2} + \dots + c_m h^{p_m},$$

onde $c_0, c_1, c_2, \dots, c_m$ são os $m+1$ coeficientes da incerteza, e $p_0, p_1, p_2, \dots, p_m$ são as $m+1$ primeiras ordens verdadeiras de Eh . Uma alternativa para o emprego desse estimador consiste em se adotar um processo recursivo para obtenção de $c_0, c_1, c_2, \dots, c_m$ considerando-se o maior número possível de extrapolações em cada malha específica. Isto é, em cada malha g , com $g = 2, \dots, G$, considera-se o número máximo de termos possível na expressão da estimativa de Eh . Por exemplo: para $g = 2$ tem-se a estimativa de Eh com apenas um termo, $c_0 h^{p_0}$ (estimativa monocoeficiente); para $g = 3$ tem-se a estimativa de Eh com dois termos, $c_0 h^{p_0} + c_1 h^{p_1}$ (estimativa bicoeficiente); para $g = 4$ tem-se a estimativa de Eh com três termos, $c_0 h^{p_0} + c_1 h^{p_1} + c_2 h^{p_2}$ (estimativa tricoeficiente); e assim por diante.

Com relação à recursividade, considera-se a obtenção de Tm conforme descrito anteriormente. Então, ao se buscar a estimativa para Eh inerente ao cálculo de Th em uma malha uniforme (g) com espaçamento h_g , considerando-se o conceito do estimador U_{mc} , pode-se calcular a diferença entre a solução analítica estimada com o número máximo de extrapolações permitidas (Tm) e a solução numérica sem extrapolação, nesta mesma malha (Th_g).

Isto é, sobre U_{mc} , pode-se fazer:

$$U_{mc} = U_{mc}(Th) = Tm - Th,$$

ou ainda,

$$U_{mc}(Th_g) = Th_{g,m} - Th_g, g \geq 2.$$

Para Tm : $Th_{2,1}, Th_{3,2}, \dots, Th_{g,g-1}, \dots, Th_{G,G-1}$.