Capítulo 5.

TERMOELASTICIDADE LINEAR UNIDIMENSIONAL PERMANENTE

Neste capítulo, o modelo matemático é composto por duas equações diferenciais:

1ª) problema térmico; e

2ª) problema elástico.

Consideraremos:

- coordenadas cartesianas unidimensionais;
- regime permanente;
- condições de contorno do tipo Dirichlet; e
- malhas uniformes.

5.1 MODELO MATEMÁTICO

5.1.1 Problema Térmico

$$\frac{d^2T}{dX^2} + \frac{\dot{q}}{k} = 0 \qquad (5.1)$$

$$\left.\begin{array}{l} T(0) = T_0 \\ \\ T(L) = T_L \end{array}\right\} \quad \text{condições de contorno de Dirichlet} \qquad (5.2)$$

Este problema é um caso simplificado daquele apresentado na seção 3.1. Para isso, basta considerar que

$$S = -\frac{\dot{q}}{k} = \text{constante} \qquad (5.3)$$

onde

$\dot{q}$ = taxa de geração de calor por unidade de volume (W/m^3)

k = condutividade térmica do sólido (W/m.K)

L = comprimento do domínio de cálculo (m)

Este problema pode representar, por exemplo, a condução de calor numa barra metálica através da qual passa uma corrente elétrica que dissipa calor por efeito Joule.

5.1.2 Problema Elástico

Será considerado um estado unidimensional de tenções, isto é,

$$[\,\sigma\,] = [\,\sigma_x\,]$$

(5.4)

$$\sigma_y = \sigma_z = 0 \qquad (5.5)$$

onde σ_x, σ_y e σ_z são as tensões nas direções X, Y e Z, respectivamente. Neste caso, as deformações (ε) são dadas por

$$[\,\varepsilon\,] = [\,\varepsilon_x\,] \qquad (5.6)$$

$$\varepsilon_y = \varepsilon_z \neq 0 \qquad (5.7)$$

onde

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial X} \qquad (5.8)$$

$$\varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial Y} \qquad (5.9)$$

$$\varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial Z} \tag{5.10}$$

com u, v e w representando os deslocamentos nas direções X, Y e Z, respectivamente.

Para este problema unidimensional, as equações de equilíbrio estático se resumem a

$$\frac{d\sigma_x}{dX} = 0 \tag{5.11}$$

A partir da lei de Hooke para materiais isotrópicos homogêneos com efeito térmico, obtém-se

$$\sigma_x = E\,(\,\varepsilon_x - \alpha\theta\,) \tag{5.12}$$

onde

E = módulo de elasticidade, módulo elástico ou módulo de Young (N/m^2)

α = coeficiente de expansão térmica (K^{-1})

θ = excesso de temperatura em relação a um valor de referência (K)

$$\theta = T - T_0 \tag{5.13}$$

A partir da Eq. (5.11) pode-se obter a equação do deslocamento (u) na direção X:

$$\frac{d^2u}{dX^2} - \alpha\frac{d\theta}{dX} = 0 \tag{5.14}$$

O modelo matemático é fechado considerando-se as seguintes condições de contorno de Dirichlet:

$$u(0) = u(L) = 0 \tag{5.15}$$

O problema termoelástico consiste em resolver a Eq. (5.14). Mas como ela depende da temperatura, primeiro é necessário resolver a Eq. (5.1). Caso seja de interesse, posteriormente, pode-se obter a tensão (σ_x) e a deformação (ε_x) a partir das Eqs. (5.12) e (5.8). As equações da teoria da elasticidade linear tridimensional, com efeito térmico, podem ser obtidas no apêndice C do livro de Huebner *et al*. (2001).

5.1.3 Variáveis de Interesse

$$\left.\begin{array}{l} \bullet\ T\text{, a partir da Eq. (5.1)} \\ \\ \bullet\ u\text{, a partir da Eq. (5.14)} \end{array}\right\}\ \text{variáveis primárias}$$

$$\left.\begin{array}{l} \bullet\ \varepsilon_x\text{, a partir da Eq. (5.8)} \\ \bullet\ \sigma_x\text{, a partir da Eq. (5.12)} \\ \bullet\ F_0 \text{ e } F_L \end{array}\right\}\ \text{variáveis secundárias}$$

onde F_0 e F_L são as forças que atuam em $X = 0$ e $X = L$ na direção X, dadas por

$$F_0 \quad = \quad (\sigma_x)_0 \ A_x \tag{5.16}$$

$$F_L \quad = \quad (\sigma_x)_L \ A_x \tag{5.17}$$

onde A_x é a área da seção transversal à direção X do sólido.

5.2 SOLUÇÃO ANALÍTICA

Para $L = 1$, a solução analítica do problema térmico, Eqs. (5.1) e (5.2), resulta em

$$T \quad = \quad T_0 \quad + \quad (T_L - T_0)\, X \quad + \quad \frac{\dot{q}}{2k}(1 - X)\, X \tag{5.18}$$

ou, com a definição da Eq. (5.13),

$$\theta \;=\; (T_L - T_0)\, X \;+\; \frac{\dot{q}}{2k}(1-X)\, X \qquad (5.19)$$

Com a Eq. (5.19), a solução analítica do problema elástico, Eqs. (5.14) e (5.15), resulta em

$$u \;=\; \frac{\alpha\, X}{6}\left[\, 3\left(T_L - T_0 + \frac{\dot{q}}{2k} \right)(\, X - 1\,) \;-\; \frac{\dot{q}}{k}(\, X^2 - 1\,)\,\right] \qquad (5.20)$$

Com a Eq. (5.20) em (5.8),

$$\varepsilon_x \;=\; \frac{\alpha}{6}\left[\, 3\left(T_L - T_0 + \frac{\dot{q}}{2k} \right)(\, 2X - 1) \;-\; \frac{\dot{q}}{k}(\, 3X^2 - 1\,)\,\right] \qquad (5.21)$$

Com as Eqs. (5.19) e (5.21) em (5.12), obtém-se σ_x . E, com as Eqs. (5.16) e (5.17),

$$F_L \;=\; F_0 \;=\; \frac{E\alpha\, A_x}{6}\left[\, 3\;(T_0 - T_L) \;-\; \frac{\dot{q}}{2k}\,\right] \qquad (5.22)$$

5.3 SOLUÇÃO NUMÉRICA

A discretização do problema térmico, Eq. (5.1), pode ser vista na seção 3.1.4. Entretanto, deve-se considerar que

$$S_0 \;=\; -\frac{\dot{q}}{k}, \qquad S_1 \;=\; S_2 \;=\; 0 \qquad (5.23)$$

A discretização do problema elástico, Eq. (5.14), pode ser obtida com a substituição das aproximações numéricas dadas nas Eqs. (2.26), para *T*, e (2.35), para *u*. Isso resulta em

$$\frac{(u_W + u_E - 2u_P)}{h^2} \;-\; \alpha\,\frac{(T_E - T_W)}{2h} \;=\; 0 \qquad (5.24)$$

ou

$$2\,u_P \;=\; u_W \;+\; u_E \;-\frac{\alpha}{2}\,(T_E - T_W)\,h \tag{5.25}$$

ou, ainda,

$$a_P\,u_P \;=\; a_W\,u_W \;+\; a_E\,u_E \;+\; b_P \tag{5.26}$$

A Eq. (5.26) é válida para a variável u em cada nó P interno da malha, isto é, P = 2, 3, ..., N-1. Por comparação com a Eq. (5.25), nota-se que seus coeficientes e termos fontes são dados por

$$\left.\begin{aligned} &a_P \;=\; 2, \qquad a_W \;=\; a_E \;=\; 1, \qquad b_P \;=\; -\frac{\alpha}{2}\,(T_E - T_W)\,h \\ &W \;=\; P \;-\; 1, \qquad E \;=\; P \;+\; 1 \end{aligned}\right\} \tag{5.27}$$

E a Fig. 3.2 também se aplica aqui.

No caso dos dois contornos, isto é, P = 1 e P = N, para que sejam satisfeitas as condições de contorno da Eq. (5.15), deve-se usar

$$a_P \;=\; 1, \qquad a_W \;=\; a_E \;=\; b_P \;=\; 0 \tag{5.28}$$

Após a obtenção da solução numérica de u, a deformação (ε_x) pode ser obtida pela aproximação numérica da Eq. (5.8). No caso dos nós internos da malha (P = 2, 3, ..., N-1), pode-se usar a aproximação dada na Eq. (2.26), o que resulta em

$$(\varepsilon_x)_P \;=\; \frac{(u_E - u_W)}{2h} \qquad\qquad (P = 2, 3, ..., N\text{-}1) \tag{5.29}$$

Para manter a mesma ordem (2^a) de aproximação da Eq. (5.29), deve-se usar no contorno esquerdo a Eq. (2.29),

$$(\varepsilon_x)_1 \quad = \quad \frac{(4u_2 - 3u_1 - u_3)}{2h} \tag{5.30}$$

e no contorno direito, a Eq.(2.32), isto é,

$$(\varepsilon_x)_N \quad = \quad \frac{(3u_N + 2u_{N-2} - 4u_{N-1})}{2h} \tag{5.31}$$

A tensão pode ser obtida com a substituição da Eq. (5.13) em (5.12), e a discretização desta última, o que resulta em

$$(\sigma_x)_P \quad = \quad E\,[\,(\varepsilon_x)_P \quad - \quad \alpha\,(T_P - T_0)\,] \tag{5.32}$$

E as forças podem ser obtidas com a Eq. (5.32) nas Eqs. (5.16) e (5.17).

5.3.1 Algoritmo de Solução

Um possível algoritmo para resolver o problema termoelástico apresentado neste capítulo é o seguinte:

1) Ler os dados do problema: $T_0, T_L, \dot{q}, k, L, N, \alpha, E, A_x$.
2) Discretizar o domínio de cálculo, isto é obter h da Eq. (2.4).
3) Calcular os coeficientes (a_P, a_W, a_E) e os termos fontes (b_P), do sistema de equações do problema térmico, com as Eqs. (3.14), (3.19) e (3.20).
4) Resolver o problema térmico (T_P) com o método *TDMA*, descrito na seção 3.2.1.
5) Calcular os coeficientes (a_P, a_W, a_E) e os termos fontes (b_P), do sistema de equações do problema elástico, com as Eqs. (5.27) e (5.28).
6) Resolver o problema elástico (u_P) com o método *TDMA*.
7) Calcular as deformações (ε_x) com as Eqs. (5.29) a (5.31).
8) Calcular as tensões (σ_x) com a Eq. (5.32).
9) Calcular as forças nos contornos com as Eqs. (5.16) e (5.17).
10) Gravar os resultados de interesse.
11) Visualizar os campos de $T, u, \varepsilon_x, \sigma_x$ *versus X*.