

Capítulo 10.

DIFUSÃO E ERROS EM MALHAS NÃO-UNIFORMES

O objetivo deste capítulo é reescrever, para malhas não-uniformes exemplificadas na Fig. 10.1, as diversas aproximações numéricas apresentadas no Cap. 2. Além disso, aborda-se o problema da condução de calor 1D permanente, discretizado com malhas não-uniformes, e a estimativa de erros de discretização em malhas não-uniformes.

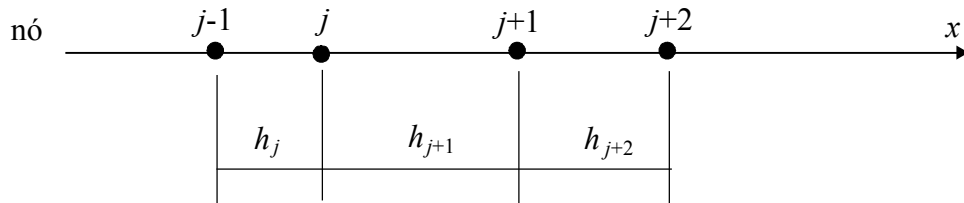


Figura 10.1 Malha unidimensional não-uniforme.

Expandindo-se a série de Taylor, Eq. (2.11), para os nós ‘j-1’, ‘j+1’ e ‘j+2’ da malha não-uniforme mostrada na Fig. 10.1, chega-se a

$$\Lambda_{j-1} = \Lambda_j - \Lambda_j^i h_j + \Lambda_j^{ii} \frac{h_j^2}{2} - \Lambda_j^{iii} \frac{h_j^3}{6} + \dots \quad (10.1)$$

$$\Lambda_{j+1} = \Lambda_j + \Lambda_j^i h_{j+1} + \Lambda_j^{ii} \frac{h_{j+1}^2}{2} + \Lambda_j^{iii} \frac{h_{j+1}^3}{6} + \dots \quad (10.2)$$

$$\Lambda_{j+2} = \Lambda_j + \Lambda_j^i (h_{j+1} + h_{j+2}) + \Lambda_j^{ii} \frac{(h_{j+1} + h_{j+2})^2}{2} + \Lambda_j^{iii} \frac{(h_{j+1} + h_{j+2})^3}{6} + \dots \quad (10.3)$$

onde j é o nó genérico sobre o qual se realizam as aproximações numéricas; os três pontos indicam uma série infinita; e os tamanhos (h) dos elementos da malha são dados por

$$h_j = x_j - x_{j-1} \quad (10.4)$$

$$h_{j+1} = x_{j+1} - x_j \quad (10.5)$$

$$h_{j+2} = x_{j+2} - x_{j+1} \quad (10.6)$$

As expressões para as aproximações numéricas apresentadas no Cap. 2, e para seus erros de truncamento (ε), são deduzidas nas seções 10.1 a 10.6, a seguir.

10.1 DERIVADA DE 1ª ORDEM COM 1 PONTO A MONTANTE (UDS)

Isolando-se Λ_j^i da Eq. (10.1), obtém-se uma expressão analítica exata para a derivada de 1ª ordem da variável dependente (Λ) no nó j , dada por

$$\Lambda_j^i = \frac{(\Lambda_j - \Lambda_{j-1})}{h_j} + \Lambda_j^{ii} \frac{h_j}{2} - \Lambda_j^{iii} \frac{h_j^2}{6} + \Lambda_j^{iv} \frac{h_j^3}{24} - \dots \quad (10.7)$$

onde Λ_j^{ii} , Λ_j^{iii} e Λ_j^{iv} são, respectivamente, as derivadas de 2ª, 3ª e 4ª ordens da variável dependente (Λ) no nó j , e h_j é definido na Eq. (10.4). A aproximação numérica da derivada de 1ª ordem com um ponto a montante resulta em

$$(\lambda_{UDS}^i)_j = \frac{(\lambda_j - \lambda_{j-1})}{h_j} \quad (10.8)$$

Seu erro de truncamento, $\varepsilon(\lambda_{UDS}^i)$, é dado por

$$\varepsilon(\lambda_{UDS}^i)_j = \frac{\Lambda_j^{ii}}{2} h_j - \frac{\Lambda_j^{iii}}{6} h_j^2 + \frac{\Lambda_j^{iv}}{24} h_j^3 - \dots \quad (10.9)$$

10.2 DERIVADA DE 1ª ORDEM COM DIFERENÇA CENTRAL (CDS)

Embora possa não ser estritamente correto, o termo “diferença central” é empregado aqui e na seção 10.5, mesmo em malhas não-uniformes, porque se usa um nó a montante e outro a jusante na obtenção da aproximação numérica do nó de interesse. Assim, subtraindo-se a Eq. (10.1) de (10.2) e isolando-se Λ_j^i do resultado, obtém-se uma expressão analítica exata para a derivada de 1ª ordem da variável dependente (Λ) no nó j , dada por

$$\Lambda_j^i = \frac{(\Lambda_{j+1} - \Lambda_{j-1})}{(h_j + h_{j+1})} + \frac{\Lambda_j^{ii}}{2}(h_j - h_{j+1}) - \frac{\Lambda_j^{iii}}{6} \frac{(h_j^3 + h_{j+1}^3)}{(h_j + h_{j+1})} + \dots \quad (10.10)$$

onde Λ_j^{ii} e Λ_j^{iii} são, respectivamente, as derivadas de 2ª e 3ª ordens da variável dependente (Λ) no nó j , e h_j e h_{j+1} são definidos nas Eqs. (10.4) e (10.5). A aproximação numérica da derivada de 1ª ordem com diferença central resulta em

$$(\lambda_{CDS}^i)_j = \frac{(\lambda_{j+1} - \lambda_{j-1})}{(h_j + h_{j+1})} \quad (10.11)$$

Seu erro de truncamento, $\varepsilon(\lambda_{CDS}^i)$, é dado por

$$\varepsilon(\lambda_{CDS}^i)_j = \frac{\Lambda_j^{ii}}{2}(h_j - h_{j+1}) - \frac{\Lambda_j^{iii}}{6} \frac{(h_j^3 + h_{j+1}^3)}{(h_j + h_{j+1})} + \dots \quad (10.12)$$

Não existe um único parâmetro de h para reduzir a Eq. (10.12) à Eq. (2.47). Mas mesmo assim, observa-se que as ordens verdadeiras de $\varepsilon(\lambda_{CDS}^i)$ são $p_V = 1, 2$, etc, e, portanto, a sua ordem assintótica é $p_L = 1$. Desta forma, o erro de truncamento da aproximação numérica λ_{CDS}^i é de 1ª ordem. Esse resultado difere daquele obtido com malhas uniformes, Eq. (2.27), cujo $p_L = 2$. A partir das Eqs. (10.1) e (10.2), mesmo para malhas não-uniformes, é possível obter uma aproximação numérica cujo $p_L = 2$. Mas, neste caso, além de λ_{j+1} e λ_{j-1} , o valor de λ_j também é envolvido na aproximação numérica. Em outras palavras, passa-se a ter uma aproximação numérica de três pontos (Hirsch, 1988) e não de dois, Eq. (10.11), que é o interesse aqui, por ser uma aproximação semelhante àquela usada em malhas uniformes.

10.3 DERIVADA DE 1ª ORDEM COM 1 PONTO A JUSANTE (DDS)

Isolando-se Λ_j^i da Eq. (10.2), obtém-se uma expressão analítica exata para a derivada de 1ª ordem da variável dependente (Λ) no nó j , dada por

$$\Lambda_j^i = \frac{(\Lambda_{j+1} - \Lambda_j)}{h_{j+1}} - \Lambda_j^{ii} \frac{h_{j+1}}{2} - \Lambda_j^{iii} \frac{h_{j+1}^2}{6} - \Lambda_j^{iv} \frac{h_{j+1}^3}{24} - \dots \quad (10.13)$$

onde Λ_j^{ii} , Λ_j^{iii} e Λ_j^{iv} são, respectivamente, as derivadas de 2ª, 3ª e 4ª ordens da variável dependente (Λ) no nó j . A aproximação numérica da derivada de 1ª ordem com um ponto a jusante resulta em

$$(\lambda_{DDS}^i)_j = \frac{(\lambda_{j+1} - \lambda_j)}{h_{j+1}} \quad (10.14)$$

Seu erro de truncamento, $\varepsilon(\lambda_{DDS}^i)$, é dado por

$$\varepsilon(\lambda_{DDS}^i)_j = -\frac{\Lambda_j^{ii}}{2} h_{j+1} - \frac{\Lambda_j^{iii}}{6} h_{j+1}^2 - \frac{\Lambda_j^{iv}}{24} h_{j+1}^3 - \dots \quad (10.15)$$

10.4 DERIVADA DE 1ª ORDEM COM 2 PONTOS A JUSANTE (DDS-2)

A partir das Eqs. (10.2) e (10.3), pode-se deduzir uma expressão analítica exata para a derivada de 1ª ordem da variável dependente (Λ) no nó j , dada por

$$\begin{aligned} \Lambda_j^i = & \frac{[(1+r_j)^2 \Lambda_{j+1} - (2+r_j)r_j \Lambda_j - \Lambda_{j+2}]}{r_j(1+r_j)h_{j+1}} + \Lambda_j^{iii} \frac{(1+r_j)}{6} h_{j+1}^2 \\ & + \Lambda_j^{iv} \frac{(1+r_j)(2+r_j)}{24} h_{j+1}^3 + \dots \end{aligned} \quad (10.16)$$

onde

$$r_j = \frac{h_{j+2}}{h_{j+1}} \quad (10.17)$$

e Λ_j^{iii} e Λ_j^{iv} são, respectivamente, as derivadas de 3ª e 4ª ordens da variável dependente (Λ) no nó j , e h_{j+1} e h_{j+2} são definidos nas Eqs. (10.5) e (10.6). A aproximação numérica da derivada de 1ª ordem com dois pontos a jusante resulta em

$$(\lambda_{DDS-2}^i)_j = \frac{[(1+r_j)^2 \lambda_{j+1} - (2+r_j)r_j \lambda_j - \lambda_{j+2}]}{r_j(1+r_j)h_{j+1}} \quad (10.18)$$

Seu erro de truncamento, $\varepsilon(\lambda_{DDS-2}^i)$, é dado por

$$\varepsilon(\lambda_{DDS-2}^i)_j = \Lambda_j^{iii} \frac{(1+r_j)}{6} h_{j+1}^2 + \Lambda_j^{iv} \frac{(1+r_j)(2+r_j)}{24} h_{j+1}^3 + \dots \quad (10.19)$$

Não existe um único parâmetro de h para reduzir a Eq. (10.19) à Eq. (2.47). Mas, mesmo assim, observa-se que as ordens verdadeiras de $\varepsilon(\lambda_{DDS-2}^i)$ são $p_V = 2, 3$, etc, e, portanto, a sua ordem assintótica é $p_L = 2$.

10.5 DERIVADA DE 2ª ORDEM COM DIFERENÇA CENTRAL (CDS)

Com a multiplicação da Eq. (10.1) por h_{j+1} e da Eq. (10.2) por h_j , com a adição dos resultados e o isolamento de Λ_j^{ii} , obtém-se uma expressão analítica exata para a derivada de 2ª ordem da variável dependente (Λ) no nó j , dada por

$$\Lambda_j^{ii} = 2 \frac{[h_{j+1}\Lambda_{j-1} + h_j\Lambda_{j+1} - (h_j + h_{j+1})\Lambda_j]}{(h_j + h_{j+1})h_j h_{j+1}} + \frac{\Lambda_j^{iii}}{3}(h_j - h_{j+1}) - \frac{\Lambda_j^{iv}}{12} \frac{(h_j^3 + h_{j+1}^3)}{(h_j + h_{j+1})} + \dots \quad (10.20)$$

onde Λ_j^{iii} e Λ_j^{iv} são, respectivamente, as derivadas de 3ª e 4ª ordens da variável dependente (Λ) no nó j . A aproximação numérica da derivada de 2ª ordem com diferença central resulta em

$$(\lambda_{CDS}^{ii})_j = 2 \frac{[h_{j+1}\lambda_{j-1} + h_j\lambda_{j+1} - (h_j + h_{j+1})\lambda_j]}{(h_j + h_{j+1})h_j h_{j+1}} \quad (10.21)$$

Seu erro de truncamento, $\varepsilon(\lambda_{CDS}^{ii})$, é dado por

$$\varepsilon(\lambda_{CDS}^i)_j = \frac{\Lambda_j^{iii}}{3}(h_j - h_{j+1}) - \frac{\Lambda_j^{iv}}{12} \frac{(h_j^3 + h_{j+1}^3)}{(h_j + h_{j+1})} + \dots \quad (10.22)$$

Não existe um único parâmetro de h para reduzir a Eq. (10.22) à Eq. (2.47). Mas mesmo assim, observa-se que as ordens verdadeiras de $\varepsilon(\lambda_{CDS}^i)$ são $p_V = 1, 2$, etc, e, portanto, a sua ordem assintótica é $p_L = 1$.

10.6 APROXIMAÇÃO PARA A VARIÁVEL GLOBAL

Define-se a solução analítica exata da média da variável dependente (Λ_m) ao longo do domínio de cálculo através da Eq. (2.2). A solução analítica exata da integração numérica da variável dependente (Λ), obtida pela regra do trapézio (Kreyszig, 1999) ao longo do domínio de cálculo, é dada por

$$\Lambda_m = \frac{1}{2L} \sum_{j=2}^N h_j (\Lambda_{j-1} + \Lambda_j) - \frac{1}{L} \sum_{j=2}^N \left(\Lambda_{j-1/2}^{ii} \frac{h_j^3}{12} + \Lambda_{j-1/2}^{iv} \frac{h_j^5}{480} + \Lambda_{j-1/2}^{vi} \frac{h_j^7}{53760} + \dots \right) \quad (10.23)$$

onde $\Lambda_{j-1/2}^{ii}$, $\Lambda_{j-1/2}^{iv}$ e $\Lambda_{j-1/2}^{vi}$ são, respectivamente, as derivadas de 2^a, 4^a e 6^a ordens da variável dependente (Λ) em ' $j-1/2$ ', isto é, na coordenada média entre os nós ' $j-1$ ' e j ; h_j é definido pela Eq. (10.4); N é o número total de nós da malha; sendo que o primeiro ($j = 1$) e o último nós ($j = N$) da malha estão sobre os contornos do domínio. A aproximação numérica da média da variável dependente resulta em

$$\lambda_m = \frac{1}{2L} \sum_{j=2}^N h_j (\lambda_{j-1} + \lambda_j) \quad (10.24)$$

Seu erro de truncamento, $\varepsilon(\lambda_m)$, é dado por

$$\varepsilon(\lambda_m) = -\frac{1}{L} \sum_{j=2}^N \left(\Lambda_{j-1/2}^{ii} \frac{h_j^3}{12} + \Lambda_{j-1/2}^{iv} \frac{h_j^5}{480} + \Lambda_{j-1/2}^{vi} \frac{h_j^7}{53760} + \dots \right) \quad (10.25)$$

Pode-se demonstrar que as ordens verdadeiras de $\varepsilon(\lambda_m)$ são $p_V = 2, 4, 6$ etc, e, portanto, a sua ordem assintótica é $p_L = 2$.

10.7 ORDENS VERDADEIRAS E ASSINTÓTICA

Foram apresentados seis tipos de aproximações numéricas (λ_{UDS}^i , λ_{CDS}^i , λ_{DDS}^i , λ_{DDS-2}^i , λ_{CDS}^{ii} e λ_m) para três variáveis diferentes: as derivadas de primeira e segunda ordem da variável dependente (Λ) nos modelos matemáticos, Λ^i e Λ^{ii} ; e a média da variável dependente ao longo do domínio de cálculo, Λ_m . Também foram apresentadas as expressões genéricas para o erro de truncamento (ε) destas seis aproximações numéricas, ou seja, as estimativas de erro *a priori*. Foram definidas e obtidas as ordens assintótica (p_L) e verdadeiras (p_V) dos erros de truncamento, resumidas na Tab. 10.1. As expressões das aproximações numéricas (λ_{UDS}^i , λ_{CDS}^i , λ_{DDS}^i , λ_{DDS-2}^i , λ_{CDS}^{ii} e λ_m) e de seus erros de truncamento (ε) se reduzem àquelas do Cap.2 se os tamanhos (h) dos elementos da malha forem constantes, como na Fig. 2.1.

Tabela 10.1 Ordens verdadeiras (p_V) e assintótica (p_L) do erro de truncamento

Φ	(ϕ)	(p_V)	(p_L)
derivada de 1ª ordem da variável dependente	λ_{UDS}^i	1, 2, 3, ...	1
	λ_{CDS}^i	1, 2, 3, ...	1
	λ_{DDS}^i	1, 2, 3, ...	1
	λ_{DDS-2}^i	2, 3, 4, ...	2
derivada de 2ª ordem da variável dependente	λ_{CDS}^{ii}	1, 2, 3, ...	1
média da variável dependente	λ_m	2, 4, 6, ...	2

10.8 CONDUÇÃO DE CALOR 1D PERMANENTE

Nesta seção aborda-se a solução numérica da condução de calor unidimensional, em regime permanente, cujo domínio de cálculo é discretizado com malha não-uniforme, Fig. 10.2. A condução de calor numa parede plana (Fig. 3.1) cuja condutividade de térmica (k) é função da temperatura, e existe geração de calor (S), pode ser modelada por (Incropera e DeWitt,1998)

$$\frac{d}{dx}\left(k\frac{dT}{dx}\right) + S = 0 \quad (10.26)$$

onde x representa a variável independente, isto é, a direção coordenada, e T , a variável dependente, a temperatura.

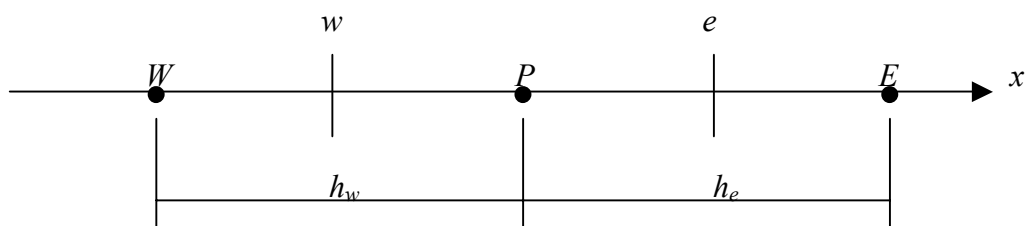


Figura 10.2 Nó genérico P e seus vizinhos W e E .

A Eq. (10.26) pode ser reescrita por

$$\frac{df}{dx} + S = 0 \quad (10.27)$$

onde

$$f = k\frac{dT}{dx} \quad (10.28)$$

Considerando-se apenas a Eq. (10.27), ela pode ser discretizada através da aproximação numérica dada na Eq. (10.11), ou seja, por diferença central. Mas, no caso da Eq. (10.27), em vez de se usar os valores de f nos nós W e E da Fig. 10.2, usa-se

$$\left(\frac{df}{dx}\right)_P = \frac{(f_e - f_w)}{\frac{h_w}{2} + \frac{h_e}{2}} = 2 \frac{(f_e - f_w)}{(h_w + h_e)} \quad (10.29)$$

onde

$$h_w = x_P - x_W \quad (10.30)$$

$$h_e = x_E - x_P \quad (10.31)$$

Aplicando-se diferença central novamente, obtém-se

$$f_w = \left(k \frac{dT}{dx}\right)_w = k_w \left(\frac{dT}{dx}\right)_w = k_w \frac{(T_P - T_W)}{h_w} \quad (10.32)$$

$$f_e = \left(k \frac{dT}{dx}\right)_e = k_e \left(\frac{dT}{dx}\right)_e = k_e \frac{(T_E - T_P)}{h_e} \quad (10.33)$$

Com as Eqs. (10.32) e (10.33) em (10.29), chega-se a

$$\left(\frac{df}{dx}\right)_P = 2 \frac{\left[k_e \frac{(T_E - T_P)}{h_e} - k_w \frac{(T_P - T_W)}{h_w} \right]}{(h_w + h_e)} \quad (10.34)$$

Considerando-se S variável e a substituição da Eq. (10.34) na Eq. (10.27), chega-se a

$$2 \frac{\left[k_e \frac{(T_E - T_P)}{h_e} - k_w \frac{(T_P - T_W)}{h_w} \right]}{(h_w + h_e)} + S_P = 0 \quad (10.35)$$

A Eq. (10.35) pode ser reescrita na forma

$$\left(\frac{k_w}{h_w} + \frac{k_e}{h_e}\right)T_P = \left(\frac{k_w}{h_w}\right)T_W + \left(\frac{k_e}{h_e}\right)T_E + S_P \frac{(h_w + h_e)}{2} \quad (10.36)$$

Comparando-se a Eq. (10.36) à Eq. (3.13), verifica-se que

$$a_P = \left(\frac{k_w}{h_w} + \frac{k_e}{h_e}\right); \quad a_W = \left(\frac{k_w}{h_w}\right); \quad a_E = \left(\frac{k_e}{h_e}\right); \quad b_P = S_P \frac{(h_w + h_e)}{2} \quad (10.37)$$

onde k_w e k_e podem ser obtidos com as Eqs. (6.37) e (6.38).

10.9 ESTIMATIVA DE ERRO DE DISCRETIZAÇÃO

Em princípio, a estimativa do erro de discretização de soluções numéricas obtidas com malhas não-uniformes pode seguir o que foi visto nas seções 4.1 (caso unidimensional) e 7.4 (caso multidimensional). Mas, deve-se usar o conceito de razão de refino de malha conforme discutido no artigo em anexo (Schneider e Marchi, 2004)

10.10 EXERCÍCIO

Exercício 10.1

Implemente um programa computacional para resolver analiticamente e numericamente o problema da condução de calor não-linear 1D permanente apresentado na seção 10.8, seguindo o algoritmo da seção 6.5.1.

Dados: Eq. (6.40) com $S = 0$, $n_{max} = 50$ e $N = 7$, onde

nó P	1	2	3	4	5	6	7
x_P	0	0,1	0,3	0,35	0,5	0,8	1

Resultados a apresentar:

- 1) Gráfico de T_P versus x_P com as soluções analítica e numérica
- 2) Tabela com x_P e T_P das soluções analítica e numérica
- 3) Soluções analítica e numérica da taxa de transferência de calor (q)
- 4) Siga o procedimento recomendado na seção 4.2.5 e apresente um gráfico semi-log, semelhante à Fig. 4.5, com a razão L^n/L^0 ao longo das iterações.