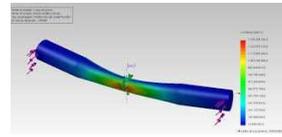
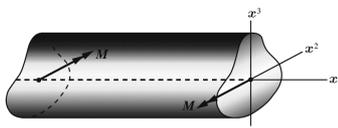


IX. FORMULAÇÃO EM FLEXÃO

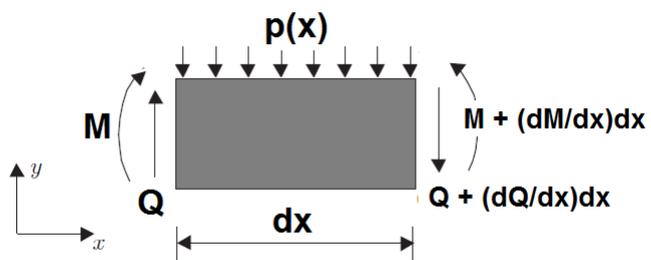
Prof. Dr. Julio Almeida

Universidade Federal do Paraná
Programa de Pós Graduação em Engenharia Mecânica
PGMEC



1

VIGA DE EULER-BERNOULLI



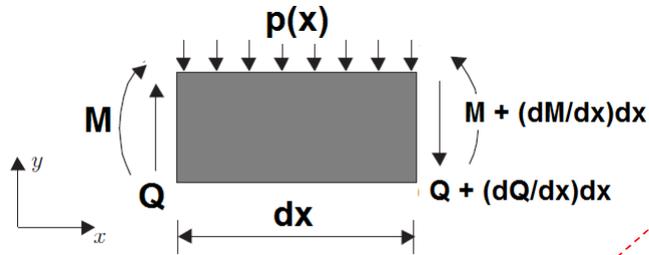
$\Sigma F = 0 :$

$$Q - \left(Q + \frac{dQ}{dx} dx \right) - p(x) dx = 0$$

$$\frac{dQ}{dx} + p(x) = 0$$

2

VIGA DE EULER-BERNOULLI



$\Sigma M = 0 :$ $M - (M + \frac{dM}{dx} dx) + Q dx - \frac{p(x)}{2} (dx)^2 = 0$

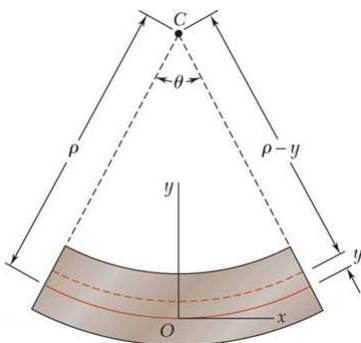
$$\frac{dM}{dx} - Q = 0$$

logo: $\frac{d^2 M}{dx^2} + p(x) = 0$

3

VIGA DE EULER-BERNOULLI

- da Mecânica dos Sólidos convencional, tem-se:

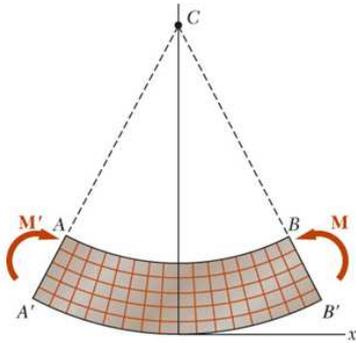


$$\frac{1}{\rho} = \frac{d^2 y / dx^2}{[1 + (dy / dx)^2]^{3/2}} \cong -\frac{d^2 y}{dx^2}$$

4

VIGA DE EULER-BERNOULLI

- da Mecânica dos Sólidos convencional, tem-se:

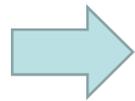


$$M = -EI_{LN} \frac{d^2 y}{dx^2}$$

5

VIGA DE EULER-BERNOULLI

....



$$EI_{LN} \frac{d^4 y}{dx^4} - p(x) = 0$$

A viga de Euler-Bernoulli tem a premissa de não levar em consideração as deformações por corte.

6

VIGA DE EULER-BERNOULLI

Condições de contorno:

a) apoios simples (simplesmente apoiados):



$$y = 0; \quad M = 0 \Rightarrow \frac{d^2 y}{dx^2} = 0$$

7

VIGA DE EULER-BERNOULLI

Condições de contorno:

b) engastamentos



$$y = 0; \quad \frac{dy}{dx} = 0$$

8

VIGA DE EULER-BERNOULLI

Condições de contorno:

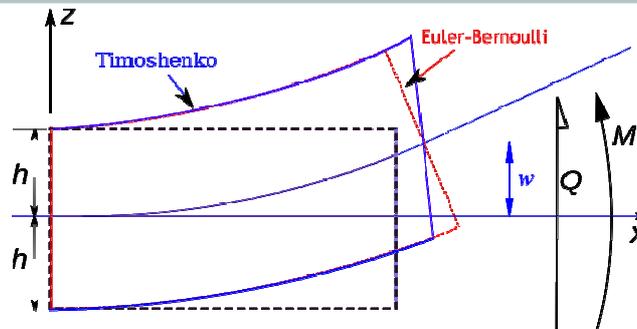
c) apoios livres (deslocamentos e giros sem restrições):

$$Q = 0 \Rightarrow \frac{d^3 y}{dx^3} = 0; \quad M = 0 \Rightarrow \frac{d^2 y}{dx^2} = 0$$

9

VIGA DE TIMOSHENKO

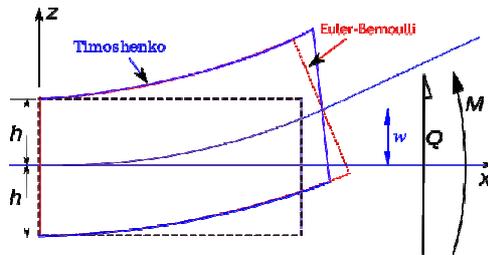
Supõem-se agora que as secções transversais originariamente normais ao eixo neutro permanecem planas, porém não mais normais ao eixo neutro após a deformação.



10

VIGA DE TIMOSHENKO

$$u_x \cong -y\psi(x) = -y(\alpha - \delta_{xz})$$



$\psi(x)$ – ângulo que girou a secção transversal

11

VIGA DE TIMOSHENKO

Esforços:

$$M = \int_A \sigma_x y dA = -EI_{LN} \frac{d\psi}{dx}$$

$$Q = \frac{\mu A}{\chi} \left(-\psi + \frac{dy}{dx} \right)$$

χ – fator de forma = $\chi = \frac{A}{J_{LN}^2} \int_A \left(\frac{Sy}{b} \right)^2 dA$

12

VIGA DE TIMOSHENKO

Tensões:

$$\sigma_x = -Ey \frac{d\psi}{dx} + \nu(\sigma_y + \sigma_z)$$

$$\tau_{xz} = \mu \delta_{xz} = \frac{\chi Q}{A} = \mu \left(-\psi + \frac{dy}{dx} \right)$$

$$\tau_{xy} = \tau_{yz} = 0$$

13

VIGA DE TIMOSHENKO

Resultando, após substituições, em:

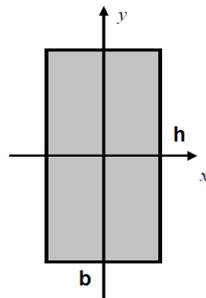
$$\frac{d}{dx} \left[\frac{\mu A}{\chi} \left(-\psi + \frac{dy}{dx} \right) \right] + p(x) = 0$$

$$\frac{d}{dx} \left[-EI_{LN} \frac{d\psi}{dx} \right] + \frac{\mu A}{\chi} \left(\frac{dy}{dx} - \psi \right) = 0$$

14

EXEMPLO 01

Determinar o fator de forma para o caso de uma secção transversal retangular ($b \times h$), conforme figura, supondo cargas transversais atuantes na vertical.



15

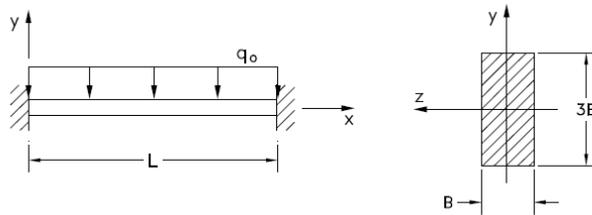
EXEMPLO 02

Considere uma viga de *Timoshenko* engastada e sujeita a uma carga P na sua extremidade livre. Determine o valor da deformação máxima correspondente. Supor um coeficiente de *Poisson* de 0,3 e o fator de forma de uma secção transversal retangular.



EXEMPLO 03

Uma viga bi-engastada, conforme figura, deve suportar uma carga uniformemente distribuída q_0 ao longo de um vão L .



17

EXEMPLO 03 - continuação

Pede-se determinar: a) as equações correspondentes ao esforço cortante e momento fletor; b) as equações correspondentes a deflexão angular (rotação) e deflexão linear (flecha); c) a reação nos apoios supondo $L = 5 \text{ m}$ e $q_0 = 10000 \text{ N/m}$. Supor: $EI_{LN} = \text{cte}$.

18

BIBLIOGRAFIA DE REFERÊNCIA

Awruch, A. M., Morsch, I. B., *Teoria da Elasticidade Aplicada à Mecânica Estrutural*, UFRGS Editora (2009).

Beer, F. P., Johnston, E.R., *Resistência dos Materiais – 4ªEd.*, McGrawHill (2006).

Fung, Y.C., Tong, P., *Classical and Computational Solid Mechanics*, World Scientific (2001).

<https://commons.wikimedia.org/w/index.php?curid=23130123>