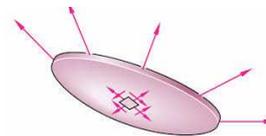
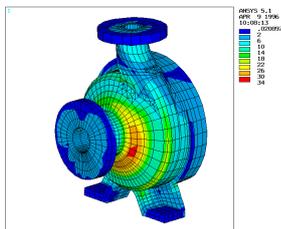


V. DINÂMICA DO SÓLIDO DEFORMÁVEL – TENSÕES E EQUILÍBRIO

Prof. Dr. Julio Almeida

Universidade Federal do Paraná
Programa de Pós Graduação em Engenharia Mecânica



1

TENSÃO E EQUILÍBRIO

Quando uma estrutura é submetida à cargas externas, forças internas são induzidas no interior do elemento em análise. Tais forças são, ainda, distribuídas continuamente ao longo de todo o sólido.

2

TENSÃO E EQUILÍBRIO

Existem duas categorias de forças internas na mecânica do contínuo: forças de corpo (eletromagnéticas, gravitacionais) e forças de superfície (forças de contato).

3

FORÇAS DE CORPO

Forças proporcionais à massa do corpo e normalmente definidas como forças por unidade de volume, podendo ser descritas matematicamente por:

$$\vec{F}_R = \int_V \vec{F}(x) dV$$

4

FORÇAS DE SUPERFÍCIE

Forças por unidade de área, sendo que a resultante das mesmas ao longo de uma superfície S é função do chamado vetor tração ($T^n(x)$).

$$\vec{F}_S = \int_S \vec{T}^n(x) dS$$

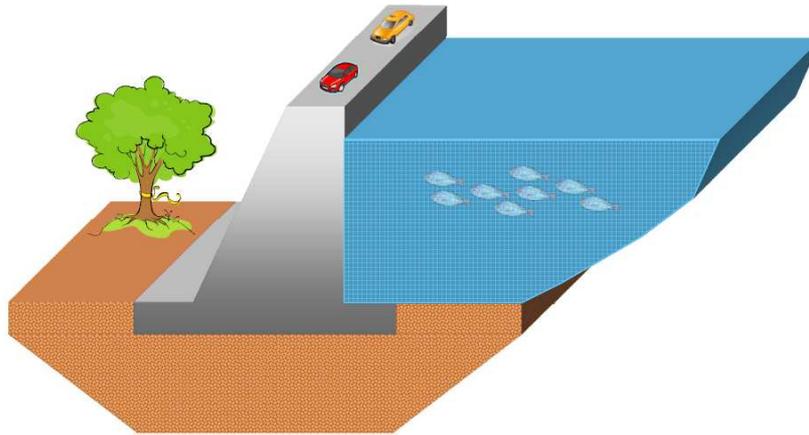
5

VETOR TRAÇÃO



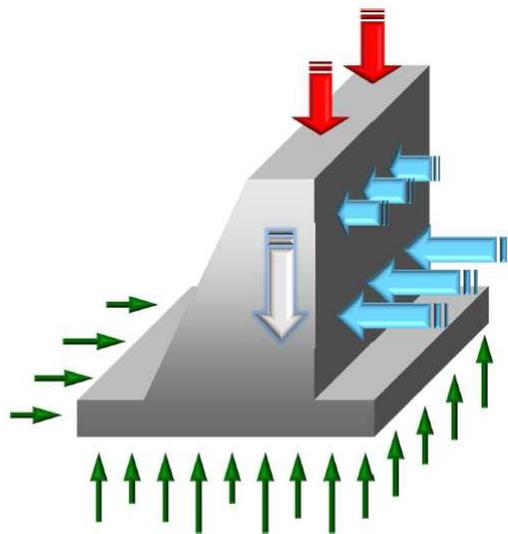
6

VETOR TRAÇÃO



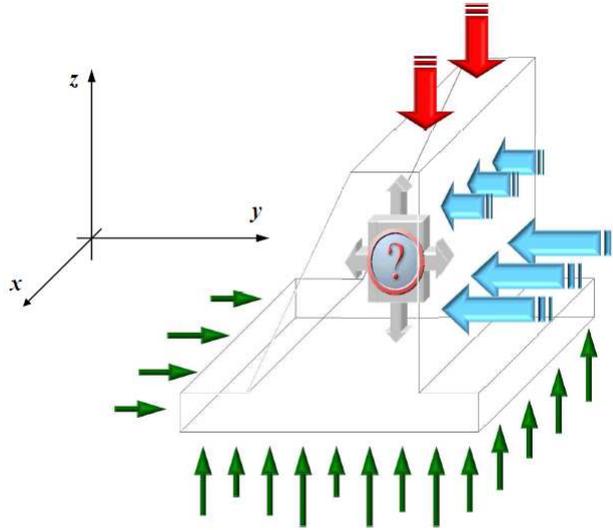
7

VETOR TRAÇÃO



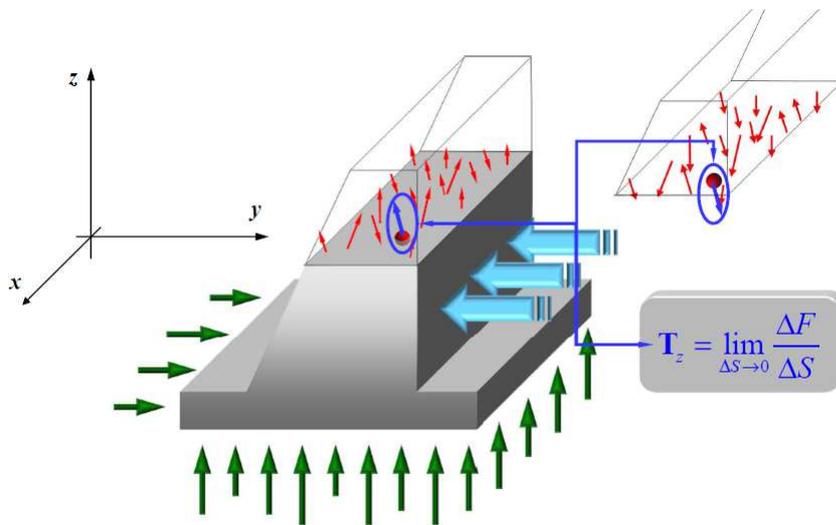
8

VETOR TRAÇÃO



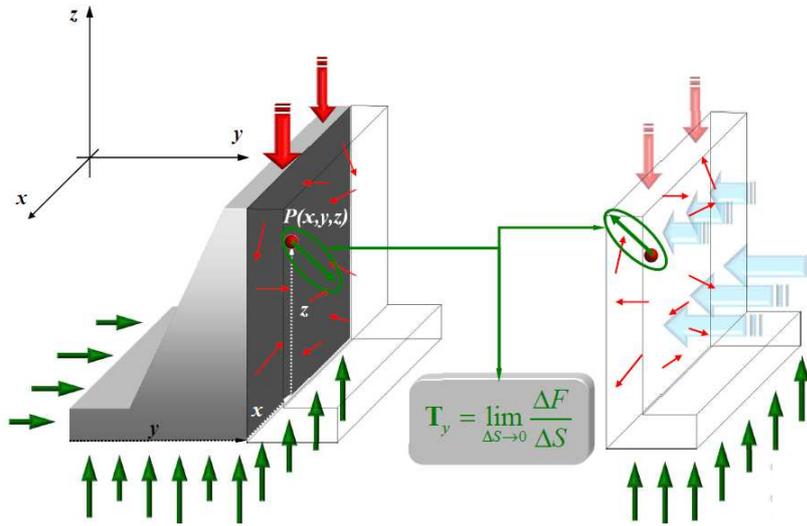
9

VETOR TRAÇÃO



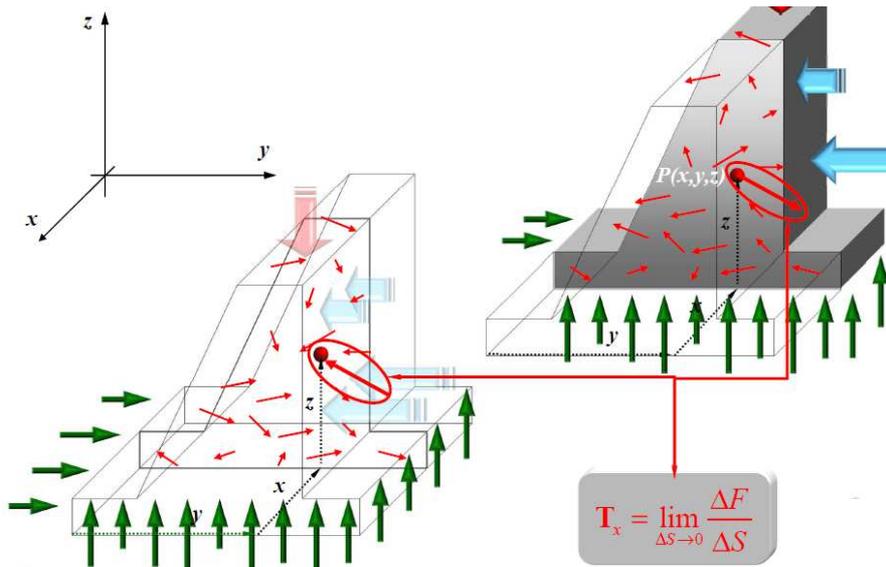
10

VETOR TRAÇÃO



11

VETOR TRAÇÃO



12

VETOR TRAÇÃO

Resumindo:

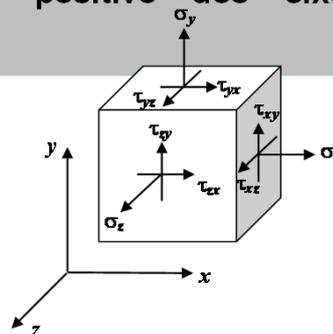
$$\vec{T}^n_{(x,n)} = \lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{\Delta F}{\Delta A}$$

notar que o vetor tração depende da localização espacial e do vetor unitário normal à superfície em estudo!!

13

VETOR TRAÇÃO – CASO PARTICULAR

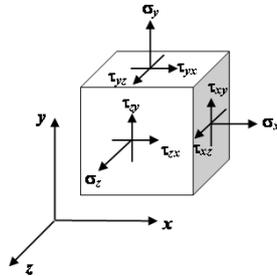
Supondo agora o caso especial no qual ΔA coincida com cada um dos três planos coordenados e tenha os vetores unitários normais direcionados no sentido positivo dos eixos coordenados, na forma:



....

14

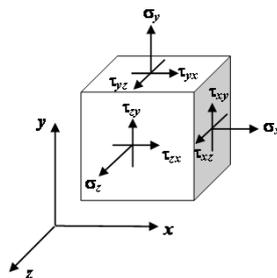
VETOR TRAÇÃO – CASO PARTICULAR



as componentes normais necessitam apenas de um único subscrito, sempre normal à superfície em análise;

15

VETOR TRAÇÃO – CASO PARTICULAR

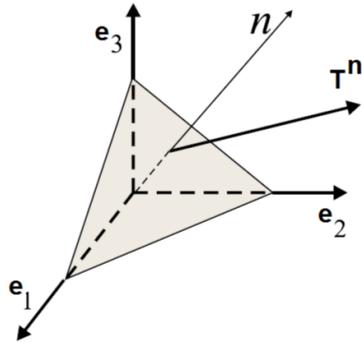


as componentes tangenciais necessitam de dois subscritos, sendo que o primeiro representa o plano de ação e o segundo representa a direção da tensão.

16

TENSOR TENSÃO DE CAUCHY

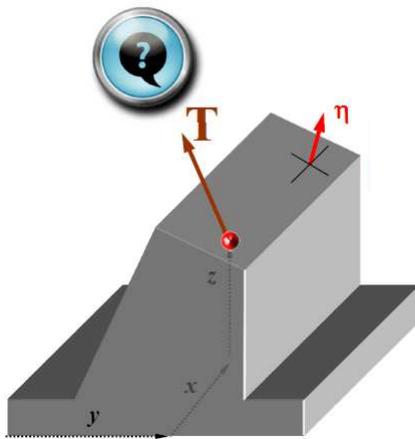
Supondo agora um tetraedro infinitesimal (tetraedro de Cauchy) na forma:



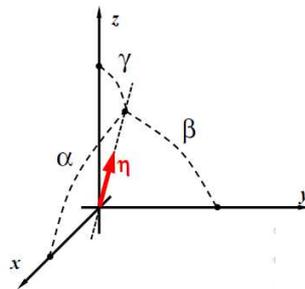
....

17

TENSOR TENSÃO DE CAUCHY



$$\vec{n} = \begin{pmatrix} l \\ m \\ n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \alpha \\ \cos \beta \\ \cos \gamma \end{pmatrix}$$



18

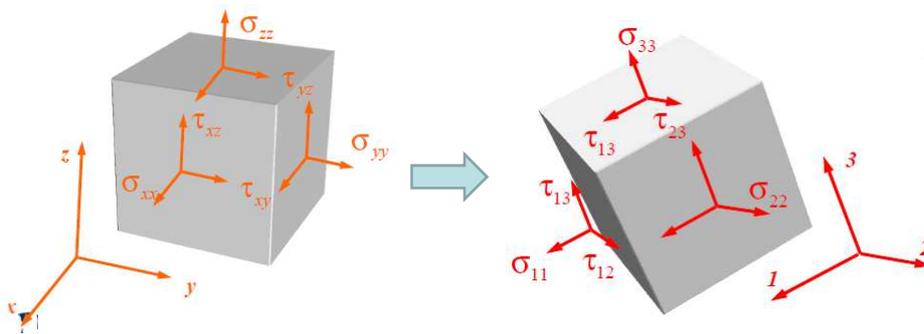
CAUCHY x PIOLA-KIRCHOFF

Cauchy: tensor tensão e vetor tração podem ser aplicados de forma indiferente à configuração original ou à configuração deformada do elemento (teoria das pequenas deformações).

Piola-Kirchoff: para a teoria das grandes deformações, a configuração original do elemento é frequentemente utilizada na formulação do problema.

19

TRANSFORMAÇÃO DE TENSÃO



20

TRANSFORMAÇÃO DE TENSÃO

Por se tratar de um tensor de segunda ordem, valem as mesmas regras anteriormente estabelecidas para a transformação de eixos.

Assim:

$$\sigma'_{ij} = Q_{ip} Q_{jq} \sigma_{pq}$$

$$\Rightarrow Q_{ij} = \cos(x'_i, x_j) \quad Q_{ij} = \begin{vmatrix} l_1 & m_1 & n_1 \\ l_2 & m_2 & n_2 \\ l_3 & m_3 & n_3 \end{vmatrix}$$

21

TRANSFORMAÇÃO DE TENSÃO

$$\sigma'_{ij} = Q_{ip} Q_{jq} \sigma_{pq}$$

$$\begin{vmatrix} \sigma'_{11} & \sigma'_{12} & \sigma'_{13} \\ \sigma'_{21} & \sigma'_{22} & \sigma'_{23} \\ \sigma'_{31} & \sigma'_{32} & \sigma'_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} l_1 & m_1 & n_1 \\ l_2 & m_2 & n_2 \\ l_3 & m_3 & n_3 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} l_1 & m_1 & n_1 \\ l_2 & m_2 & n_2 \\ l_3 & m_3 & n_3 \end{vmatrix}^T$$

22

TRANSFORMAÇÃO DE TENSÃO

cujo desenvolvimento resulta em:

$$\sigma_x' = \sigma_x l_1^2 + \sigma_y m_1^2 + \sigma_z n_1^2 + 2(\tau_{xy} l_1 m_1 + \tau_{yz} m_1 n_1 + \tau_{zx} n_1 l_1)$$

$$\sigma_y' = \sigma_x l_2^2 + \sigma_y m_2^2 + \sigma_z n_2^2 + 2(\tau_{xy} l_2 m_2 + \tau_{yz} m_2 n_2 + \tau_{zx} n_2 l_2)$$

$$\sigma_z' = \sigma_x l_3^2 + \sigma_y m_3^2 + \sigma_z n_3^2 + 2(\tau_{xy} l_3 m_3 + \tau_{yz} m_3 n_3 + \tau_{zx} n_3 l_3)$$

$$\tau_{xy}' = \sigma_x l_1 l_2 + \sigma_y m_1 m_2 + \sigma_z n_1 n_2 + \tau_{xy} (l_1 m_2 + m_1 l_2) + \tau_{yz} (m_1 n_2 + n_1 m_2) + \tau_{zx} (n_1 l_2 + l_1 n_2)$$

$$\tau_{yz}' = \sigma_x l_2 l_3 + \sigma_y m_2 m_3 + \sigma_z n_2 n_3 + \tau_{xy} (l_2 m_3 + m_2 l_3) + \tau_{yz} (m_2 n_3 + n_2 m_3) + \tau_{zx} (n_2 l_3 + l_2 n_3)$$

$$\tau_{zx}' = \sigma_x l_3 l_1 + \sigma_y m_3 m_1 + \sigma_z n_3 n_1 + \tau_{xy} (l_3 m_1 + m_3 l_1) + \tau_{yz} (m_3 n_1 + n_3 m_1) + \tau_{zx} (n_3 l_1 + l_3 n_1)$$

23

TRANSFORMAÇÃO DE TENSÃO

Particularizando para o caso 2D:

$$Q_{ij} = \begin{vmatrix} l_1 & m_1 & n_1 \\ l_2 & m_2 & n_2 \\ l_3 & m_3 & n_3 \end{vmatrix} \quad \Rightarrow \quad Q_{ij} = \begin{vmatrix} \cos \theta & \sin \theta & 0 \\ -\sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

24

TRANSFORMAÇÃO DE TENSÃO

cujo desenvolvimento resulta em:

$$\sigma'_x = \sigma_x \cos^2 \theta + \sigma_y \sin^2 \theta + 2\tau_{xy} \sin \theta \cos \theta$$

$$\sigma'_y = \sigma_x \sin^2 \theta + \sigma_y \cos^2 \theta - 2\tau_{xy} \sin \theta \cos \theta$$

$$\tau'_{xy} = -\sigma_x \sin \theta \cos \theta + \sigma_y \sin \theta \cos \theta + \tau_{xy} (\cos^2 \theta - \sin^2 \theta)$$

25

TRANSFORMAÇÃO DE TENSÃO

ou ainda:

$$\sigma'_x = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cos 2\theta + \tau_{xy} \sin 2\theta$$

$$\sigma'_y = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} - \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cos 2\theta - \tau_{xy} \sin 2\theta$$

$$\tau'_{xy} = \frac{\sigma_y - \sigma_x}{2} \sin 2\theta + \tau_{xy} \cos 2\theta$$

26

EXEMPLO 01

Dado o tensor de tensão $[\sigma]$ atuante num ponto P, determinar o vetor tensão passando por P e simultaneamente paralelo ao plano ABC, sendo A (4,0,0), B(0,2,0) e C(0,0,6).

$$[\sigma] = \begin{vmatrix} 7 & -5 & 0 \\ -5 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix}$$

27

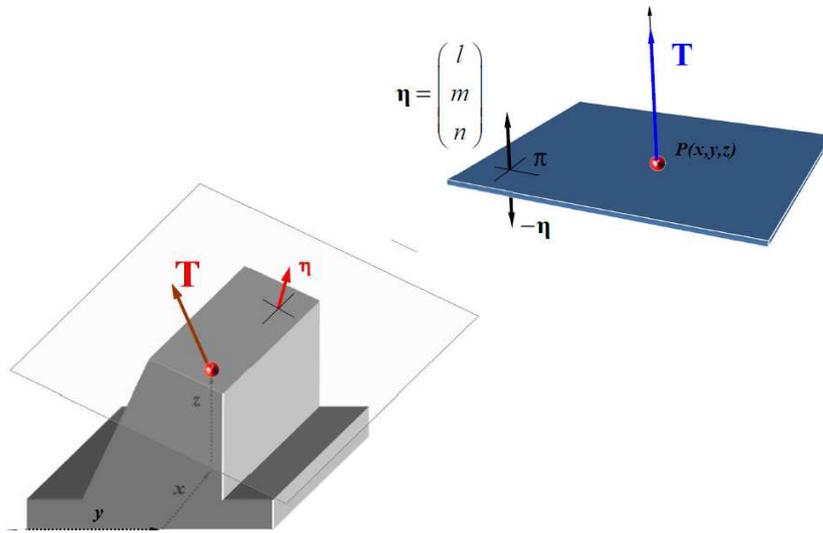
TENSÕES PRINCIPAIS

Num estado geral de esforços, o vetor tração que atua sobre uma superfície de normal n , depende do valor do módulo e da direção deste vetor.

Quando a direção do vetor tração coincidir com a direção deste vetor normal n , não existirão componentes de corte e se define um plano principal cuja a direção do vetor n é designada como direção principal.

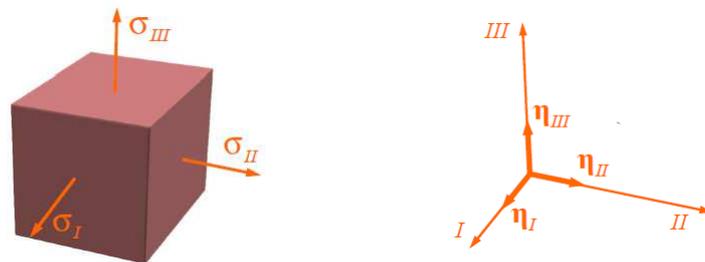
28

TENSÕES PRINCIPAIS



29

TENSÕES PRINCIPAIS



30

TENSÕES PRINCIPAIS

Adaptando-se a equação característica anteriormente definida:

$$\det[\sigma_{ij} - \sigma\delta_{ij}] = -\sigma^3 + I_1\sigma^2 - I_2\sigma + I_3 = 0$$

e a nomenclatura dos invariantes:

$$I_1 = \sigma_{ii} = \text{tr}[\sigma] = \sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33}$$

$$I_2 = \frac{1}{2}(\sigma_{ii}\sigma_{jj} - \sigma_{ij}\sigma_{ji}) = \begin{vmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{13} \\ \sigma_{31} & \sigma_{33} \end{vmatrix}$$

$$I_3 = \det[\sigma_{ij}]$$

31

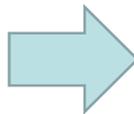
SOLUÇÃO DA EQUAÇÃO CARACTERÍSTICA

$$-\sigma^3 + I_1\sigma^2 - I_2\sigma + I_3 = 0$$

- válido para tensores simétricos

$$R = \frac{I_1^2 - 3I_2}{3}$$

$$Q = \frac{I_1I_2}{3} - I_3 - \frac{2I_1^3}{27}$$



$$S = \sqrt{\frac{R}{3}}$$

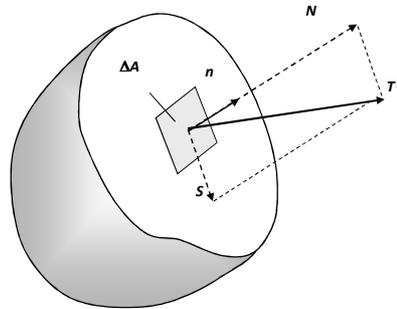
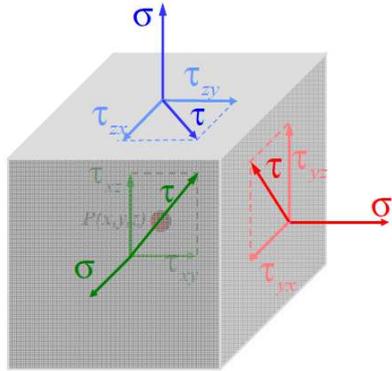
$$T = \sqrt{\frac{R^3}{27}}$$

$$\alpha = \arccos\left(\frac{-Q}{2T}\right)$$

....

32

DECOMPOSIÇÃO DO VETOR TRAÇÃO



N = componente normal
S = componente tangencial

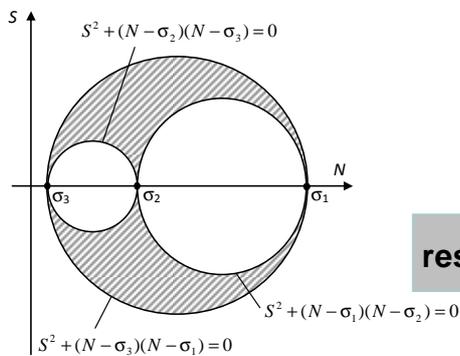
....

DECOMPOSIÇÃO DO VETOR TRAÇÃO

$$S^2 + (N - \sigma_2)(N - \sigma_3) \geq 0$$

$$S^2 + (N - \sigma_3)(N - \sigma_1) \geq 0$$

$$S^2 + (N - \sigma_1)(N - \sigma_2) \geq 0$$



$$\text{com: } S_{\max} = \frac{|\sigma_1 - \sigma_3|}{2}$$

resultados obtidos por Otto Mohr

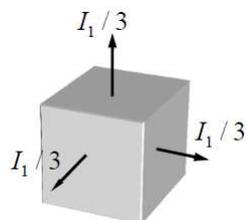
TENSÕES ESFÉRICA E DESVIATÓRIA

O tensor esférico ou hidrostático corresponde ao caso em que cada tensão normal é igual a $(-p)$ e as tensões tangenciais correspondentes são nulas. Esse tensor produz assim apenas mudança de volume, sem mudança de forma, no corpo em análise.

$$\sigma_{hid} = \sigma_{med} = -p = \frac{1}{3} \sigma_{ii} = \frac{I_1}{3}$$

35

TENSÕES ESFÉRICA E DESVIATÓRIA



$$[\sigma_{hid}] = \begin{vmatrix} \frac{I_1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{I_1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{I_1}{3} \end{vmatrix}$$

36

TENSÕES ESFÉRICA E DESVIATÓRIA

O tensor desviatório é aquele responsável pela mudança de forma, além de ser também o responsável pela plastificação do material.

$$\sigma_D = \sigma_{ij} - \sigma_{hid}$$

$$\sigma_D = \begin{bmatrix} \sigma_{11} - \frac{I_1}{3} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} - \frac{I_1}{3} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} - \frac{I_1}{3} \end{bmatrix}$$

37

TENSÕES ESFÉRICA E DESVIATÓRIA

Conclusões:

- a) em um sólido elástico isotrópico, um estado de esforços com componente hidrostática nula caracterizará apenas distorção;
- b) um estado hidrostático puro de esforço não produz distorção, mas apenas uma mudança nas dimensões do sólido.

38

INVARIANTES DO TENSOR DESVIADOR DE TENSÕES

$$\sigma_D = \sigma_{ij} - \sigma_{hid}$$

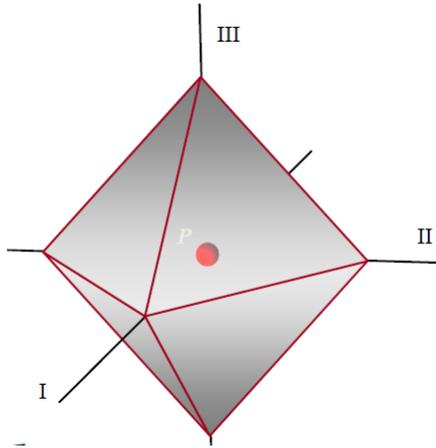
....

INVARIANTES DO TENSOR HIDROSTÁTICO

$$\sigma_D = \sigma_{ij} - \sigma_{hid}$$

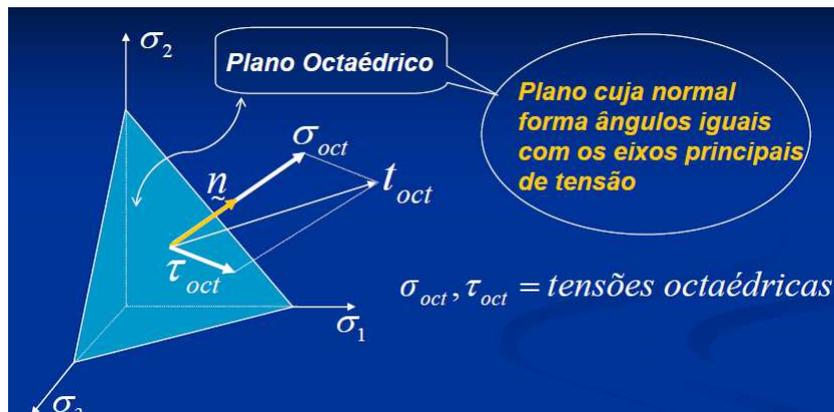
....

PLANO OCTAÉDRICO E TENSÕES OCTAÉDRICAS



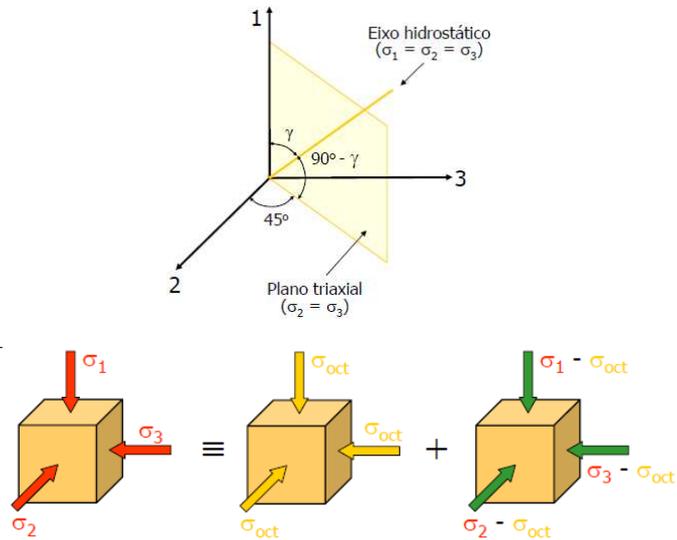
41

PLANO OCTAÉDRICO E TENSÕES OCTAÉDRICAS



42

PLANO OCTAÉDRICO E TENSÕES OCTAÉDRICAS



43

INVARIANTES DE DEFORMAÇÃO

$$n_i = \pm \frac{(1,1,1)}{\sqrt{3}} \Rightarrow \alpha \cong 54,4^\circ$$

....

44

TENSÃO EQUIVALENTE DE MISES

A tensão tangencial octaédrica é diretamente relacionada com a energia de distorção de deformação, critério convencionalmente utilizado como teoria de falha para materiais dúcteis.

45

TENSÃO EQUIVALENTE DE MISES

Tal critério de falha é também conhecido como critério de *Mises*, cuja tensão efetiva vale:

$$\sigma' = \sigma_e = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_1 - \sigma_3)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2}$$

- no limite (ponto de falha de Mises):

$$\sigma' = \sigma_e = \frac{1}{\sqrt{2}} (3\tau_{oct}) = \frac{3}{\sqrt{2}} \tau_{oct}$$

46

EXEMPLO 02

Dado o tensor de tensões num ponto genérico, determinar as tensões principais e suas correspondentes direções.

$$[\sigma] = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \end{vmatrix}$$

47

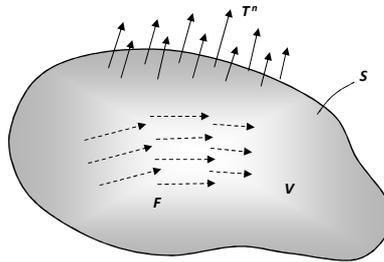
EXEMPLO 02 - continuação

Verificar, ao final, que a transformação do tensor tensões original resulta nas tensões principais mediante a matriz de transformação dos cossenos diretores principais.

48

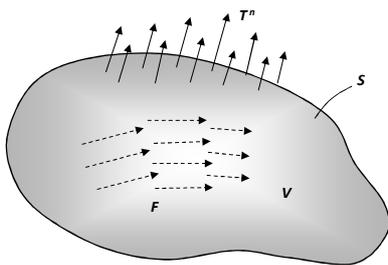
EQUAÇÕES DE EQUILÍBRIO

Considere determinada região de um sólido elástico com uma distribuição geral de forças de superfície e forças de corpo na forma:



49

EQUAÇÕES DE EQUILÍBRIO



$$\int_S T_i^n dS + \int_V F_i dV = 0$$

$$\int_S \sigma_{ji} n_j dS + \int_V F_i dV = 0$$

Pelo Teorema de Gauss:

$$\int_V (\sigma_{ji,j} + F_i) dV = 0$$

$$\sigma_{ji,j} + F_i = 0$$

50

EQUAÇÕES DE EQUILÍBRIO

$$\sigma_{ji,j} + F_i = 0$$

- em equações escalares:

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} + F_x = 0$$

$$\frac{\partial \tau_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} + F_y = 0$$

$$\frac{\partial \tau_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + F_z = 0$$

51

EQUAÇÕES DE EQUILÍBRIO

- em coordenadas cilíndricas:

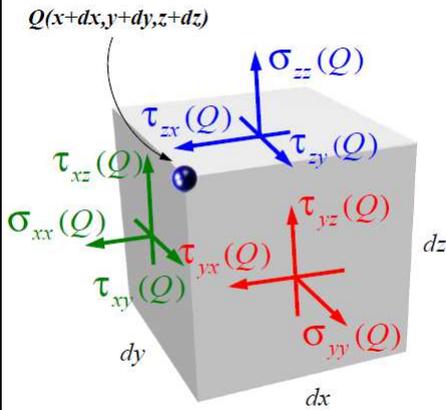
$$\frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{\partial \tau_{r\theta}}{r\partial\theta} + \frac{\partial \tau_{rz}}{\partial z} + \frac{(\sigma_r - \sigma_\theta)}{r} + F_r = 0$$

$$\frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial r} + \frac{\partial \sigma_\theta}{r\partial\theta} + \frac{\partial \tau_{z\theta}}{\partial z} + \frac{2\tau_{r\theta}}{r} + F_\theta = 0$$

$$\frac{\partial \tau_{rz}}{\partial r} + \frac{\partial \tau_{z\theta}}{r\partial\theta} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + \frac{2\tau_{rz}}{r} + F_z = 0$$

52

SIMETRIA DAS TENSÕES TANGENCIAIS



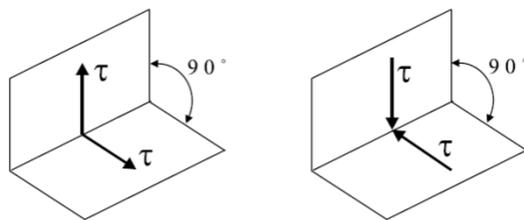
$$\sum M_x = 0 \Rightarrow \tau_{yz} = \tau_{zy}$$

$$\sum M_y = 0 \Rightarrow \tau_{xz} = \tau_{zx}$$

$$\sum M_z = 0 \Rightarrow \tau_{xy} = \tau_{yx}$$

SIMETRIA DAS TENSÕES TANGENCIAIS

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$$



EXEMPLO 03

As tensões principais em um ponto P pertencente a um sólido elástico, referidos a um sistema cartesiano ortogonal $Oxyz$, são:

$$\vec{\sigma}_1 = \frac{50}{3}(2\vec{i} + 2\vec{j} + \vec{k})$$

$$\vec{\sigma}_2 = \frac{30}{3}(2\vec{i} - \vec{j} - 2\vec{k}) \quad (MPa)$$

$$\vec{\sigma}_3 = -\frac{20}{3}(\vec{i} - 2\vec{j} + 2\vec{k})$$

55

EXEMPLO 03 - continuação

Calcular a tensão correspondente a um plano cuja normal exterior forma ângulos agudos iguais com os semi-eixos positivos do triedro $Oxyz$.

56

EXEMPLO 04

A matriz de tensões nos pontos de um sólido elástico vale:

$$[T] = \begin{bmatrix} 4x+3y & -6(x+y+z) & y+z \\ -6(x+y+z) & 10(y-z) & 3x \\ y+z & 3x & 5z \end{bmatrix}$$

com tensões em kgf/mm^2 e coordenadas em metros.

- Determinar as forças de volume (N/m^3) correspondentes
- Determinar, em forma matricial, as tensões esférica e desviadora no ponto $P(0,1,-1)$

57

EXEMPLO 05

Para o caso de cisalhamento puro, a matriz tensão é dada por:

$$\sigma_{ij} = \begin{bmatrix} 0 & \tau & 0 \\ \tau & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Determine as tensões e direções principais e defina as tensões normal e cisalhante no plano octaédrico.

58

BIBLIOGRAFIA DE REFERÊNCIA

Boresi, A. P. & Chong, K. P., *Elasticity in Engineering Mechanics*, Prentice Hall, Inc. (2000).

López, C., Sánchez, G., Rodríguez, P., OCW – Universidad de Málaga, Resistencia de Materiales, Málaga-Spain.

Parreira, A.B., *Teoria da Elasticidade*, Notas de Aula, USP - São Carlos.

Saad, M. H., *Elasticity – Theory, Applications and Numerics*, Elsevier (2005).