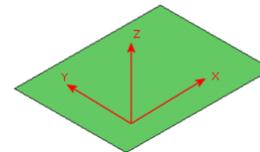
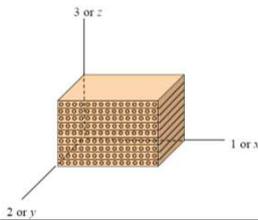


VI. RELAÇÕES CONSTITUTIVAS

Prof. Dr. Julio Almeida

Universidade Federal do Paraná
Programa de Pós Graduação em Engenharia Mecânica

PGMEC



1

COMPORTAMENTO DOS MATERIAIS

Relações que caracterizam as propriedades físicas dos materiais são designadas relações ou equações constitutivas.

$$\begin{pmatrix} \sigma_x & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{yx} & \sigma_y & \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} & \sigma_{zy} & \sigma_z \end{pmatrix} = f \left(\begin{pmatrix} \epsilon_x & \epsilon_{xy} & \epsilon_{xz} \\ \epsilon_{yx} & \epsilon_y & \epsilon_{yz} \\ \epsilon_{zx} & \epsilon_{zy} & \epsilon_z \end{pmatrix} \right)$$

$$f = ?$$

2

COMPORTAMENTO DOS MATERIAIS

Devido a grande variabilidade de materiais e tipos de carregamentos, o estudo e desenvolvimento das equações constitutivas tem sido um dos mais interessantes e desafiadores campos da mecânica.

Muitas leis constitutivas tem sido desenvolvidas através de relações empíricas baseadas em evidências experimentais.

3

ENERGIA DE DEFORMAÇÃO

Existe uma função energia de deformação elástica, w , tal que:

$$\sigma_{ij} = \frac{\partial w_{(\varepsilon)}}{\partial \varepsilon_{ij}}$$

cuja integração resulta:

$$\int_{\varepsilon_1}^{\varepsilon_2} \sigma d\varepsilon = \int_{\varepsilon_1}^{\varepsilon_2} \partial w_{(\varepsilon)} = w_{(\varepsilon_2)} - w_{(\varepsilon_1)}$$

4

ENERGIA DE DEFORMAÇÃO

para problemas uniaxiais:

....

para problemas triaxiais:

....

5

ENERGIA DE DEFORMAÇÃO

Para um caso tridimensional, a energia de deformação permite definir o chamado tensor das constantes elásticas (com 81 componentes) na forma:

$$C = \frac{\partial \sigma}{\partial \varepsilon} = \frac{\partial^2 w}{\partial \varepsilon^2} \Rightarrow C_{ijkl} = \frac{\partial^2 w}{\partial \varepsilon_{ij} \partial \varepsilon_{kl}}$$

6

MATERIAIS ELÁSTICOS LINEARES

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl} \epsilon_{kl}$$

$$\begin{array}{ccc} \sigma_{ij} = C_{ijkl} \epsilon_{kl} & \leftarrow & \\ \sigma_{ij} = \sigma_{ji} & \leftarrow & C_{ijkl} = C_{jikl} \\ \sigma_{ji} = C_{jikl} \epsilon_{kl} & \leftarrow & \end{array}$$

7

MATERIAIS ELÁSTICOS LINEARES

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl} \epsilon_{kl}$$

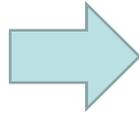
$$\begin{array}{ccc} \sigma_{ij} = C_{ijkl} \epsilon_{kl} & \leftarrow & \\ \epsilon_{ij} = \epsilon_{ji} & \leftarrow & C_{ijkl} = C_{ijlk} \\ \sigma_{ij} = C_{ijlk} \epsilon_{lk} & \leftarrow & \end{array}$$

8

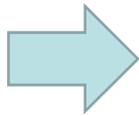
MATERIAIS ELÁSTICOS LINEARES

$$C_{ijkl} = C_{ijlk}$$

$$C_{ijkl} = C_{jikl}$$



36 componentes independentes



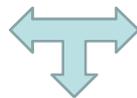
$$\begin{bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{23} \\ \sigma_{13} \\ \sigma_{12} \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & C_{14} & C_{15} & C_{16} \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} & C_{24} & C_{25} & C_{26} \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} & C_{34} & C_{35} & C_{36} \\ C_{41} & C_{42} & C_{43} & C_{44} & C_{45} & C_{46} \\ C_{51} & C_{52} & C_{53} & C_{54} & C_{55} & C_{56} \\ C_{61} & C_{62} & C_{63} & C_{64} & C_{65} & C_{66} \end{pmatrix} \begin{bmatrix} \epsilon_{11} \\ \epsilon_{22} \\ \epsilon_{33} \\ \epsilon_{23} \\ \epsilon_{13} \\ \epsilon_{12} \end{bmatrix}$$

9

MATERIAIS ANISOTRÓPICOS

$$\sigma_{ij} = \frac{\partial w(\epsilon)}{\partial \epsilon_{ij}}$$

$$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial \epsilon_{kl}} = \frac{\partial^2 w}{\partial \epsilon_{kl} \partial \epsilon_{ij}} = C_{ijkl}$$



$$\frac{\partial \sigma_{kl}}{\partial \epsilon_{ij}} = \frac{\partial^2 w}{\partial \epsilon_{ij} \partial \epsilon_{kl}} = C_{klij}$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial \epsilon_{kl} \partial \epsilon_{ij}} = \frac{\partial^2 w}{\partial \epsilon_{ij} \partial \epsilon_{kl}}$$

$$C_{ijkl} = C_{klij}$$



21 componentes independentes

10

MATERIAIS ANISOTRÓPICOS

$$[C] = \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & C_{14} & C_{15} & C_{16} \\ & C_{22} & C_{23} & C_{24} & C_{25} & C_{26} \\ & & C_{33} & C_{34} & C_{35} & C_{36} \\ & & & C_{44} & C_{45} & C_{46} \\ & & & & C_{55} & C_{56} \\ & & & & & C_{66} \end{pmatrix}$$

sim

11

MATERIAIS ANISOTRÓPICOS

Alguns minerais cristalinos, madeira e compósitos de fibras reforçadas são exemplos de materiais anisotrópicos, dado o fato de apresentarem diferentes módulos elásticos em diferentes direções.

12

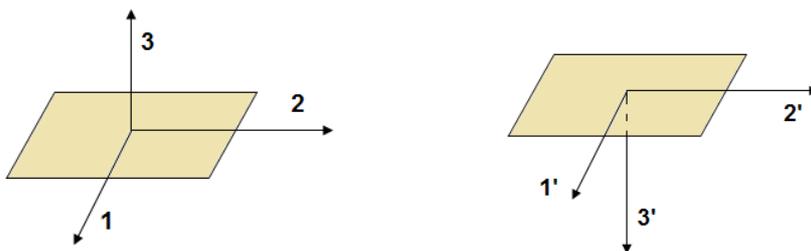
SIMETRIA MATERIAL

Quando um material apresenta o mesmo comportamento mecânico em certas direções, diz-se que existe simetria material nas mesmas.

Um material anisotrópico não apresenta simetria material.

13

SIMETRIA MATERIAL 1-2



um material apresenta um plano de simetria quando suas constantes não se alteram com a inversão do eixo perpendicular ao plano em análise.

$$C_{ijkl} = C_{i'j'k'l'}$$

14

SIMETRIA MATERIAL 1-2

$[\sigma'] = [Q][\sigma][Q]^T$

$$[Q] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{bmatrix} \sigma_{11}' & \sigma_{12}' & \sigma_{13}' \\ \sigma_{21}' & \sigma_{22}' & \sigma_{23}' \\ \sigma_{31}' & \sigma_{32}' & \sigma_{33}' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & -\sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & -\sigma_{23} \\ -\sigma_{31} & -\sigma_{32} & \sigma_{33} \end{bmatrix}$$

15

SIMETRIA MATERIAL 1-2

....



$C_{14} = C_{15} = 0$

resultando em 13 componentes independentes:

$$[C] = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & 0 & 0 & C_{16} \\ C_{12} & C_{22} & C_{23} & 0 & 0 & C_{26} \\ C_{13} & C_{23} & C_{33} & 0 & 0 & C_{36} \\ 0 & 0 & 0 & C_{44} & C_{45} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{45} & C_{55} & 0 \\ C_{16} & C_{21} & C_{31} & 0 & 0 & C_{66} \end{bmatrix}$$

16

SIMETRIA MATERIAL 1-2

Materiais que se enquadram nesta situação (tensor das constantes elásticas com 13 componentes independentes) são designados como materiais monotrópicos ou monocíclicos.

Alguns tipos de madeiras, compósitos e gorduras são exemplos deste tipo de material.

17

MATERIAIS ORTOTRÓPICOS

Materiais que apresentam três planos de simetria (1-2; 2-3; 1-3) mutuamente perpendiculares entre si.

Compósitos com fibra de vidro ou fibra de carbono são exemplos desta situação.

18

MATERIAIS ORTOTRÓPICOS

Tem-se agora 9 componentes independentes, ou seja:

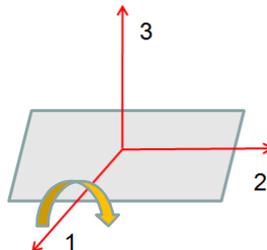
$$[C] = \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{22} & C_{23} & 0 & 0 & 0 \\ C_{13} & C_{23} & C_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{66} \end{pmatrix}$$

19

MATERIAIS TRANSVERSALMENTE ISOTRÓPICOS

Tratam-se dos materiais que apresentam simetria rotacional em relação a um dos eixos coordenados (compósitos fibrosos laminados).

Rotação do plano 2-3 – cinco componentes independentes.



20

MATERIAIS TRANSVERSALMENTE ISOTRÓPICOS

Tem-se agora 5 componentes independentes, ou seja:

$$[C] = \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{12} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{22} & C_{23} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{23} & C_{22} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{55} \end{pmatrix}$$



$$C_{44} = C_{22} - C_{23}$$

21

MATERIAIS ISOTRÓPICOS

Um material é dito isotrópico quando, em cada ponto, suas propriedades mecânicas não mudam com a direção, ou seja, não existe diferença nos módulos elásticos do material em relação a orientação.

22

MATERIAIS ISOTRÓPICOS

A principal propriedade dos materiais isotrópicos é que o tensor elasticidade será o mesmo sob qualquer rotação do sistema de eixos coordenados.

O tensor elasticidade, agora com propriedades mecânicas independentes das direções espaciais, torna-se função apenas de duas componentes independentes.

23

MATERIAIS ISOTRÓPICOS

Teorema: materiais isotrópicos apresentam eixos principais de deformação coincidentes com os eixos principais de tensão.

24

LEI DE HOOKE GENERALIZADA

→ materiais linearmente isotrópicos – duas componentes independentes

$$\sigma_{ij} = \lambda \varepsilon_{kk} \delta_{ij} + 2\mu \varepsilon_{ij}$$

λ → constante de Lamé

μ → módulo de cisalhamento ou de rigidez

25

LEI DE HOOKE GENERALIZADA

$$[C] = \begin{pmatrix} \lambda + 2\mu & \lambda & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & \lambda + 2\mu & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & \lambda & \lambda + 2\mu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2\mu & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2\mu & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2\mu \end{pmatrix}$$

26

LEI DE HOOKE GENERALIZADA

em forma escalar:

$$\left\{ \begin{array}{l} \sigma_x = \lambda(\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z) + 2\mu\varepsilon_x \\ \sigma_y = \lambda(\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z) + 2\mu\varepsilon_y \\ \sigma_z = \lambda(\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z) + 2\mu\varepsilon_z \\ \tau_{xy} = 2\mu\varepsilon_{xy} \\ \tau_{yz} = 2\mu\varepsilon_{yz} \\ \tau_{zx} = 2\mu\varepsilon_{zx} \end{array} \right.$$

27

LEI DE HOOKE GENERALIZADA

forma alternativa:

$$\sigma_{ij} = \frac{E}{1+\nu} \left(\varepsilon_{ij} + \frac{\nu}{1-2\nu} \delta_{ij} \varepsilon_{kk} \right)$$

E → módulo de elasticidade longitudinal

 ν → coeficiente de Poisson

28

MÓDULOS ELÁSTICOS

Tipo de material	Módulos elásticos	Orientação das amostras	
Isotrópico	E, G, ν	-	
Transversalmente isotrópico	$E_1, E_2 = E_3,$ $G_{12} = G_{13}, G_{23},$ $\nu_{12} = \nu_{13}, \nu_{23}$	1	
		2 ou 3	
Ortotrópico	$E_1, E_2, E_3,$ $G_{12}, G_{13}, G_{23},$ $\nu_{12}, \nu_{21},$ $\nu_{13}, \nu_{31},$ ν_{23}, ν_{32}	1	
		2	
		3	

29

MÓDULOS ELÁSTICOS - VALORES

	$E (GPa)$	ν	$\mu (GPa)$	$\lambda (GPa)$	$k (GPa)$	$\alpha (10^{-6}/^{\circ}C)$
Aluminum	68.9	0.34	25.7	54.6	71.8	25.5
Concrete	27.6	0.20	11.5	7.7	15.3	11
Cooper	89.6	0.34	33.4	71	93.3	18
Glass	68.9	0.25	27.6	27.6	45.9	8.8
Nylon	28.3	0.40	10.1	4.04	47.2	102
Rubber	0.0019	0.499	0.654×10^{-3}	0.326	0.326	200
Steel	207	0.29	80.2	111	164	13.5

30

MÓDULOS ELÁSTICOS - RELAÇÕES

	E	ν	k	μ	λ
E, ν	E	ν	$\frac{E}{3(1-2\nu)}$	$\frac{E}{2(1+\nu)}$	$\frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)}$
E, k	E	$\frac{3k-E}{6k}$	k	$\frac{3kE}{9k-E}$	$\frac{3k(3k-E)}{9k-E}$
E, μ	E	$\frac{E-2\mu}{2\mu}$	$\frac{\mu E}{3(3\mu-E)}$	μ	$\frac{\mu(E-2\mu)}{3\mu-E}$
E, λ	E	$\frac{2\lambda}{E+\lambda+R}$	$\frac{E+3\lambda+R}{6}$	$\frac{E-3\lambda+R}{4}$	λ
ν, k	$3k(1-2\nu)$	ν	k	$\frac{3k(1-2\nu)}{2(1+\nu)}$	$\frac{3k\nu}{1+\nu}$
ν, μ	$2\mu(1+\nu)$	ν	$\frac{2\mu(1+\nu)}{3(1-2\nu)}$	μ	$\frac{2\mu\nu}{1-2\nu}$
ν, λ	$\frac{\lambda(1+\nu)(1-2\nu)}{\nu}$	ν	$\frac{\lambda(1+\nu)}{3\nu}$	$\frac{\lambda(1-2\nu)}{2\nu}$	λ
k, μ	$\frac{9k\mu}{6k+\mu}$	$\frac{3k-2\mu}{6k+2\mu}$	k	μ	$k - \frac{2}{3}\mu$
k, λ	$\frac{9k(k-\lambda)}{3k-\lambda}$	$\frac{\lambda}{3k-\lambda}$	k	$\frac{3}{2}(k-\lambda)$	λ
μ, λ	$\frac{\mu(3\lambda+2\mu)}{\lambda+\mu}$	$\frac{\lambda}{2(\lambda+\mu)}$	$\frac{3\lambda+2\mu}{3}$	μ	λ

31

EXEMPLO 01

O tensor de deformações em um ponto de um sólido elástico é dado por:

$$\varepsilon_{ij} = 10^{-4} \begin{vmatrix} 1,0 & -0,5 & 0,2 \\ -0,5 & 0,8 & 0,3 \\ 0,2 & 0,3 & -0,6 \end{vmatrix}$$

Calcule as componentes de tensão neste mesmo ponto. Dados: $E = 2,6 \cdot 10^7 \text{ kN/m}^2$; $\nu = 0,3$

32

LEI HOOKE GENERALIZADA – EM DEFORMAÇÃO

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2\mu} \left(\sigma_{ij} - \frac{\lambda}{3\lambda + 2\mu} \sigma_{kk} \delta_{ij} \right)$$

ou alternativamente:

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1+\nu}{E} \sigma_{ij} - \frac{\nu}{E} \sigma_{kk} \delta_{ij}$$

35

LEI HOOKE GENERALIZADA – EM DEFORMAÇÃO

forma escalar:

$$\left\{ \begin{array}{l} \varepsilon_x = \frac{1}{E} [\sigma_x - \nu(\sigma_y + \sigma_z)] \\ \varepsilon_y = \frac{1}{E} [\sigma_y - \nu(\sigma_x + \sigma_z)] \\ \varepsilon_z = \frac{1}{E} [\sigma_z - \nu(\sigma_x + \sigma_y)] \\ \varepsilon_{xy} = \frac{1+\nu}{E} \tau_{xy} = \frac{1}{2\mu} \tau_{xy} \\ \varepsilon_{yz} = \frac{1+\nu}{E} \tau_{yz} = \frac{1}{2\mu} \tau_{yz} \\ \varepsilon_{zx} = \frac{1+\nu}{E} \tau_{zx} = \frac{1}{2\mu} \tau_{zx} \end{array} \right.$$

36

TENSORES DESVIATÓRIOS

$$(\sigma_{ij})_D = \sigma_{ij} - \frac{1}{3} \sigma_{kk} \delta_{ij}$$

$$(\varepsilon_{ij})_D = \varepsilon_{ij} - \frac{1}{3} \varepsilon_{kk} \delta_{ij}$$



$$(\sigma_{ij})_D = 2\mu(\varepsilon_{ij})_D$$

37

EPT x EPD

EPT:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ 2\varepsilon_{xy} \end{Bmatrix}$$

EPD:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1-\nu & \nu & 0 \\ \nu & 1-\nu & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ 2\varepsilon_{xy} \end{Bmatrix}$$

38

EXEMPLO 03

Os deslocamentos em um material elástico são dados por:

$$u = -\frac{M(1-\nu^2)}{EI}xy \quad v = \frac{M(1+\nu)\nu}{2EI}y^2 + \frac{M(1+\nu^2)}{2EI}\left(x^2 - \frac{L^2}{4}\right) \quad w = 0$$

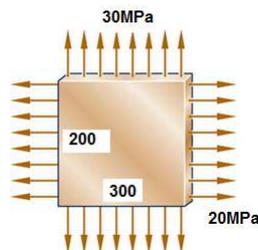
sendo: M, E, I, L – parâmetros constantes.

Determine as correspondentes deformações e tensões, bem como, identifique o tipo de sollicitação que gerou tais deslocamentos.

39

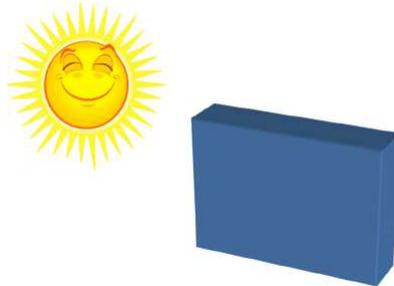
EXEMPLO 04

Uma chapa retangular com 4mm de espessura é submetida ao campo de tensões indicado. Assumindo que esses campos são uniformes, determine as mudanças de dimensão na placa. $E = 207\text{GPa}$, $\nu = 0,29$.



40

RELAÇÕES CONSTITUTIVAS TERMOELÁSTICAS



41

RELAÇÕES CONSTITUTIVAS TERMOELÁSTICAS

Variações de temperatura produzem deformações longitudinais em sólidos elásticos. Assim, no contexto das pequenas deformações, a deformação total pode ser decomposta na forma:

$$e_{ij} = e_{ij}^{(M)} + e_{ij}^{(T)}$$

$$e_{ij}^{(T)} = \alpha_{ij}(T - T_0) = \alpha(T - T_0)\delta_{ij}$$

α_{ij} = tensor coeficiente de expansão térmica

42

RELAÇÕES CONSTITUTIVAS TERMOELÁSTICAS

$$e_{ij} = \frac{1+\nu}{E} \sigma_{ij} - \frac{\nu}{E} \sigma_{kk} \delta_{ij}$$

$$e_{ij}^{(T)} = \alpha(T - T_0) \delta_{ij}$$



$$e_{ij} = \frac{1+\nu}{E} \sigma_{ij} - \frac{\nu}{E} \sigma_{kk} \delta_{ij} + \alpha(T - T_0) \delta_{ij}$$

43

RELAÇÕES CONSTITUTIVAS TERMOELÁSTICAS

se escrita em termos da tensão - equação constitutiva termoelástica de Duhamel-Neumann:

$$\sigma_{ij} = \lambda \varepsilon_{kk} \delta_{ij} + 2\mu e_{ij} - (3\lambda + 2\mu) \alpha (T - T_0) \delta_{ij}$$

44

EXEMPLO 05

Uma barra biengastada é submetida a uma variação de temperatura. Determine a tensão e as deformações correspondentes.



45

BIBLIOGRAFIA DE REFERÊNCIA

Boresi, A. P. & Chong, K. P., *Elasticity in Engineering Mechanics*, Prentice Hall, Inc. (2000).

Saad, M. H., *Elasticity – Theory, Applications and Numerics*, Elsevier (2005).

Berrocal, L.O., *Elasticidad*, McGrawHill (1998).

Otani, L.B. & Pereira, A.H.A., *Caracterização dos módulos elásticos de compósitos utilizando a técnica de excitação por impulso*, ATCP Engenharia Física (2104).

46