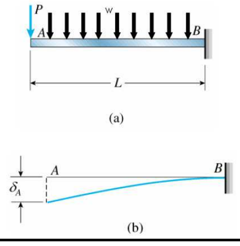
VII. PRINCÍPIOS DE ENERGIA

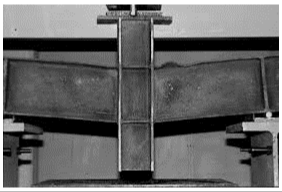
Prof. Dr. Julio Almeida

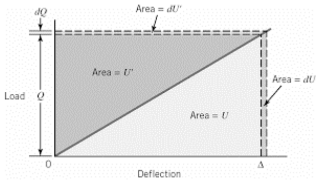
Universidade Federal do Paraná

Programa de Pós Graduação em Engenharia Mecânica

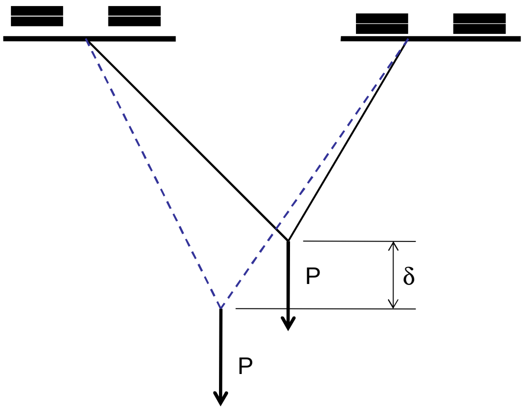
PGMEC







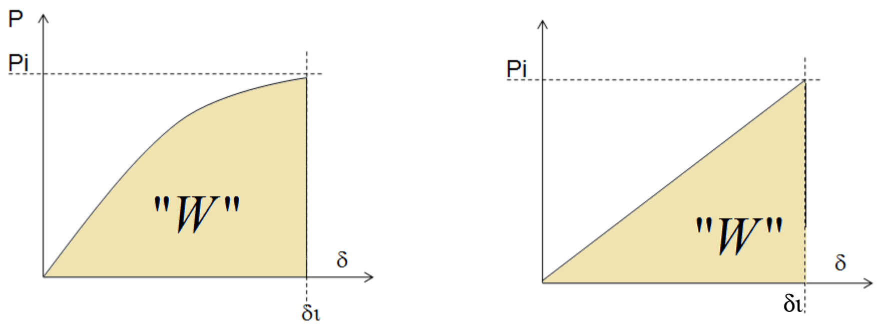
TRABALHO - W



$$W = \int_0^{\delta i} \vec{P} . d\vec{\delta}$$

ELASTICIDADE LINEAR CLÁSSICA

TRABALHO - W

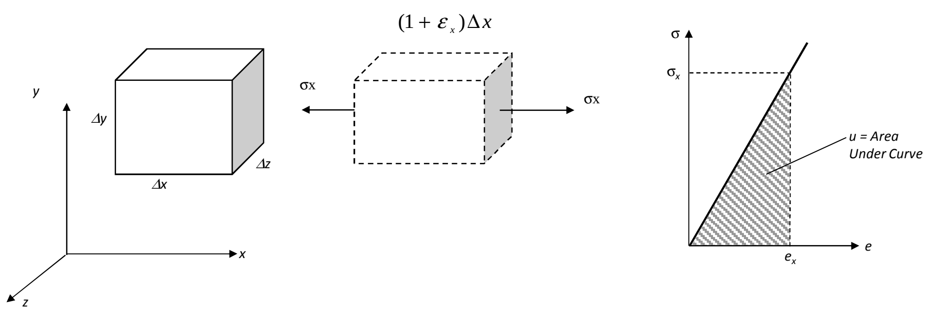


3

ELASTICIDADE LINEAR CLÁSSICA

ENERGIA DE DEFORMAÇÃO

a) caso uniaxial em tensão normal



....

4

ENERGIA DE DEFORMAÇÃO

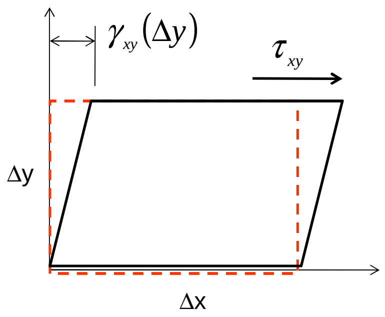
b) caso triaxial em tensão normal

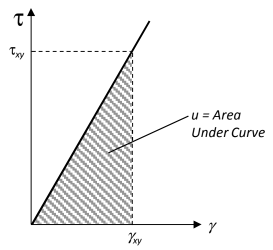
$$u = \frac{1}{2}\sigma_x \varepsilon_x + \frac{1}{2}\sigma_y \varepsilon_y + \frac{1}{2}\sigma_z \varepsilon_z$$

$$u = \frac{1}{2E}\left[\sigma_x^{\;2} + \sigma_y^{\;2} + \sigma_z^{\;2} - 2\upsilon\left(\sigma_x\sigma_y + \sigma_y\sigma_z + \sigma_z\sigma_x\right)\right]$$

ENERGIA DE DEFORMAÇÃO

c) caso uniaxial em tensão tangencial





....

ENERGIA DE DEFORMAÇÃO

d) caso triaxial em tensão tangencial

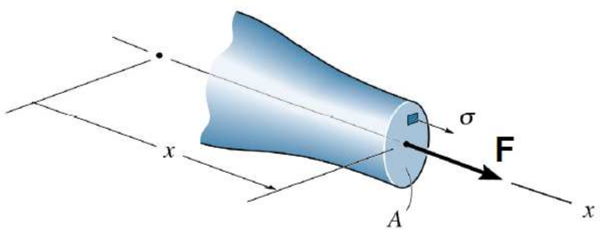
$$u = \frac{1}{2}\left(\sigma_x \varepsilon_x + \sigma_y \varepsilon_y + \sigma_z \varepsilon_z + \tau_{xy}\gamma_{xy} + \tau_{yz}\gamma_{yz} + \tau_{xz}\gamma_{xz}\right)$$

$$u = \frac{1}{2}\sigma_{ij}\varepsilon_{ij} \Rightarrow u = \frac{1+\upsilon}{2E}\sigma_{ij}\sigma_{ij} - \frac{\upsilon}{2E}\sigma_{jj}\sigma_{kk}$$

$$u = \frac{1+\upsilon}{2E}\left[\sigma_x{}^2 + \sigma_y{}^2 + \sigma_z{}^2 + 2\tau_{xy}{}^2 + 2\tau_{yz}{}^2 + 2\tau_{xz}{}^2\right] - \frac{\upsilon}{2E}\left[\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z\right]^2$$

ENERGIA DEFORMAÇÃO – CASOS PARTICULARES

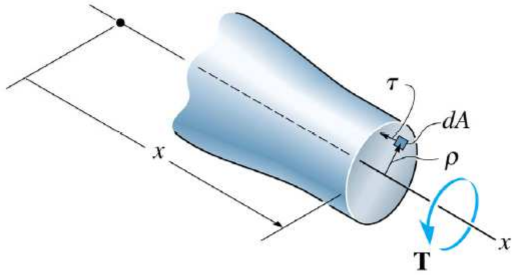
a) carga axial



....

ENERGIA DEFORMAÇÃO – CASOS PARTICULARES

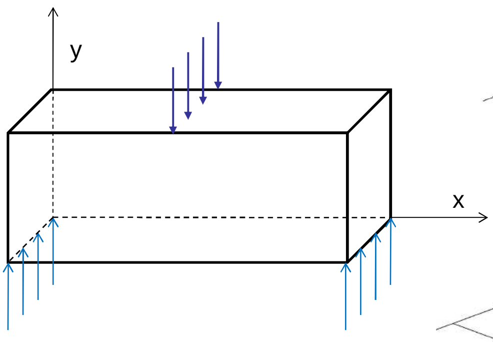
b) carga torsional (secção circular maciça)

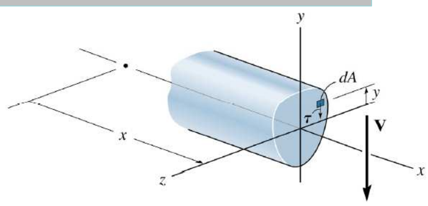


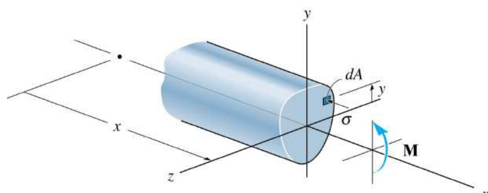
....

ENERGIA DEFORMAÇÃO – CASOS PARTICULARES

c) carga transversal numa viga







....

ENERGIA DEFORMAÇÃO – CASOS PARTICULARES

c) carga transversal numa viga

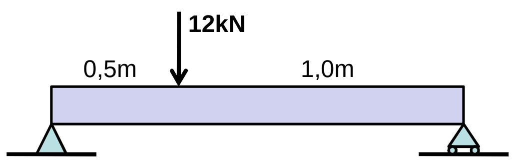
K = 1,2 – secção retangular

K = 1,11 – secção circular maciça

K $\cong$ 1,0 – secção tipo viga I

EXEMPLO 01

Determine a energia de deformação total para a viga ilustrada com carregamento indicado. Secção transversal retangular (b x h) de 25 x 50 (mm), E = 205GPa e *Poisson* = 0,3.



DERIVADAS DAS ENERGIAS DE DEFORMAÇÃO

$$\frac{\partial u_{(e)}}{\partial \varepsilon_x} = \frac{\partial}{\partial \varepsilon_x}\left(\frac{E\varepsilon_x^{\,2}}{2}\right) = E\varepsilon_x = \sigma_x$$

$$\frac{\partial u_{(\sigma)}}{\partial \sigma_x} = \frac{\partial}{\partial \sigma_x}\left(\frac{\sigma_x^{\,2}}{2E}\right) = \frac{\sigma_x}{E} = \varepsilon_x$$

generalizando: $\sigma_{ij} = \dfrac{\partial u_{(e)}}{\partial \varepsilon_{ij}}$

ENERGIA DEFORMAÇÃO – PARCELAS ESFÉRICA E DESVIATÓRIA

- **tensão esférica : mudança de volume**
- **tensão desviatória : mudança de forma**

....

1º TEOREMA DE CASTIGLIANO

Suponha uma série de forças P_i aplicadas sobre uma estrutura. Cada ponto de aplicação gera uma deflexão δ_i. Matematicamente:

$$W = \sum \int P_i (d\delta_i)$$

ou

$$U = \sum \int P_i (d\delta_i)$$

1º TEOREMA DE CASTIGLIANO

Um trabalho diferencial adicional causará uma infinitesimal mudança na energia do sistema. Assim:

$$\Delta W = P_i \Delta\delta_i + \int \Delta P_i (d\delta_i) = \Delta U$$

$$P_i = \frac{\Delta U}{\Delta\delta_i} \Rightarrow \Delta\delta_i \to 0 \Rightarrow \boxed{P_i = \frac{\partial U}{\partial \delta_i}}$$

1º TEOREMA DE CASTIGLIANO

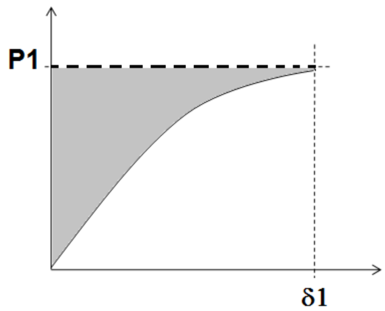
$$P_i = \frac{\partial U}{\partial \delta_i}$$

Limitação – é função da geometria da deformação

Vantagem – válido para problemas <u>não-lineares</u>, desde que a energia do sistema se mantenha constante

ELASTICIDADE LINEAR CLÁSSICA

TEOREMA DA ENERGIA COMPLEMENTAR



$$W_C = \int_0^{Pi} \delta dP$$

pela conservação da energia:

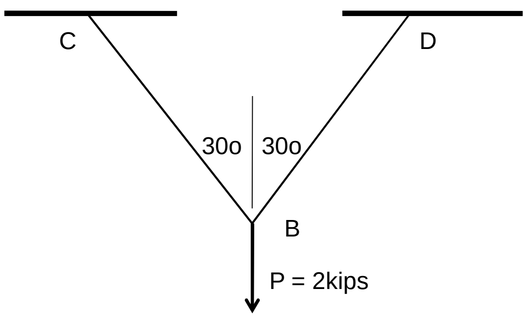
$$\Phi = \int_0^{Pi} \delta dP$$

Logo: $\delta_i = \dfrac{\partial \Phi}{\partial P_i}$ **e** $\theta_i = \dfrac{\partial \Phi}{\partial M_i}$

EXEMPLO 02

Dois cabos, feitos de material não-linear, cuja relação constitutiva é: $\sigma = E\varepsilon - K\varepsilon^2$, suportam o carregamento indicado. Para uma secção transversal de 0,2 in^2 e comprimento de 5 ft, E = 30 Mpsi e K = 10 Gpsi, determine a deflexão vertical do ponto B quando a carga P é aplicada.

EXEMPLO 02 - continuação



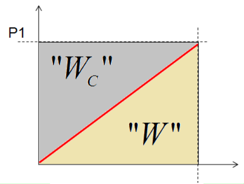
2º TEOREMA DE CASTIGLIANO

Caso o material de um corpo solicitado por forças seja elástico linear e os deslocamentos correspondentes sejam pequenos, a derivada parcial da energia de deformação em relação a qualquer força fornece o deslocamento correspondente a essa mesma força.

$$\delta_i = \frac{\partial U}{\partial P_i} \quad \textbf{e} \quad \theta_i = \frac{\partial U}{\partial M_i}$$

2º TEOREMA DE CASTIGLIANO

Notar ainda que, caso a relação P-δ seja linear, a energia complementar é equivalente à energia de deformação. Assim:

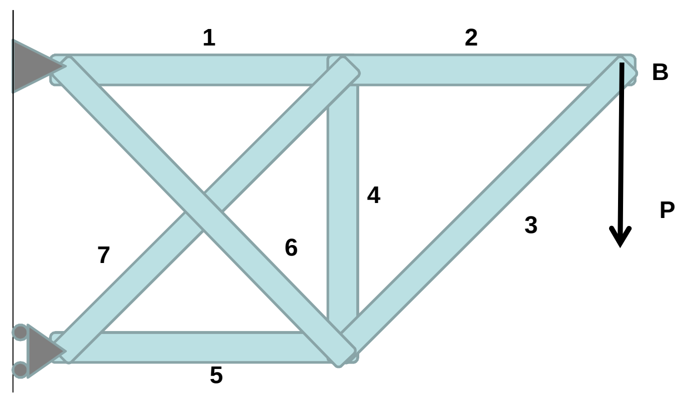


$$\delta_i = \frac{\partial U}{\partial P_i} \quad \textbf{e} \quad \theta_i = \frac{\partial U}{\partial M_i}$$

EXEMPLO 03

Para a estrutura ilustrada, use o teorema de *Castigliano* para determinar a deflexão vertical do ponto B. Todas as barras tem secção transversal A, comprimento L (barras 1, 2, 4 e 5) e comprimento 1,414L (barras 3, 6 e 7).

EXEMPLO 03 - continuação



PRINCÍPIO DOS TRABALHOS VIRTUAIS

Trabalho virtual - trabalho realizado por forças reais que se movem através de deslocamentos virtuais, ou como o trabalho realizado por forças virtuais que se movem através de deslocamentos reais.

Importante observar que o referido princípio é independente de qualquer lei constitutiva do material.

25

PRINCÍPIO DOS TRABALHOS VIRTUAIS

Método baseado diretamente no teorema da energia complementar.

$$W_C = \int_0^{Pi} \delta dP = \Phi$$

$$\Delta W_C = \delta_i \Delta P_i = \Delta\Phi$$

$\Delta P_i =$ **força imaginária (virtual)**

$$\delta_{W_C} = \delta_i \delta_{P_i} = \delta_\Phi$$

26

PRINCÍPIO DOS TRABALHOS VIRTUAIS

generalizando:

$$\delta W_{ext} = \int_S \left(F_{Sx}\delta u_x + F_{Sy}\delta u_y + F_{Sz}\delta u_z\right)dS + \int_V \left(F_{Cx}\delta u_x + F_{Cy}\delta u_y + F_{Cz}\delta u_z\right)dV$$

⇩

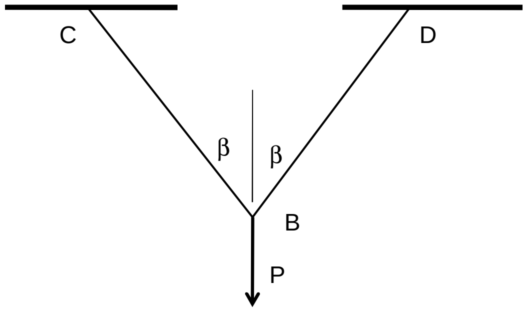
$$\delta W_{ext} = \int_S \left[\left(\sigma_x l_x + \tau_{xy} l_y + \tau_{xz} l_z\right)\delta u_x + \left(\tau_{yx} l_x + \sigma_y l_y + \tau_{yz} l_z\right)\delta u_y + \left(\tau_{zx} l_x + \tau_{zy} l_y + \sigma_z l_z\right)\delta u_z\right] dS + \ldots$$

$$- \int_V \left[\left(\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z}\right)\delta u_x + \left(\frac{\partial \tau_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z}\right)\delta u_y + \left(\frac{\partial \tau_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z}\right)\delta u_z\right] dV$$

EXEMPLO 04

Determine, pelo princípio dos trabalhos virtuais, a deflexão vertical do ponto B da estrutura ilustrada. Barras BC e BD tem igual comprimento, área de secção transversal e módulo de elasticidade longitudinal.

EXEMPLO 04 - continuação



TRABALHOS VIRTUAIS – CASOS PARTICULARES

a) Carga axial

$$\delta_\phi = \delta_F \frac{FL}{AE}$$

b) Carga torsional

$$\delta_{\phi T} = 2(1+\upsilon)\delta_T \frac{TL}{J_p E}$$

c) Carga em flexão

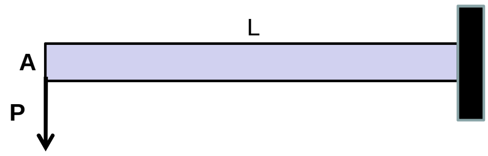
$$\delta_{\phi B} = \int_0^L \delta_{Mz} \frac{M_z}{EI_z} dx \quad ; \delta_{\phi B} = \int_0^L \delta_{Mz} d\theta$$

d) Carga cisalhante transversal

$$\delta_{\phi V} = 2K \int_0^L (1+\upsilon)\delta_V \frac{V}{EA} dx$$

EXEMPLO 05

Para a viga ilustrada em figura determine, mediante o princípio dos trabalhos virtuais, a deflexão e a rotação do ponto A. Supor apenas os efeitos de flexão.



BIBLIOGRAFIA DE REFERÊNCIA

Boresi, A. P. & Chong, K. P., *Elasticity in Engineering Mechanics*, Prentice Hall, Inc. (2000).

Saad, M. H., *Elasticity – Theory, Applications and Numerics*, Elsevier (2005).

Berrocal, L.O., *Elasticidad*, McGrawHill (1998).

Awruch, A.M. & Morsch, I.B., *Teoria da Elasticidade Aplicada à Mecânica Estrutural*, Editora UFRGS (2009).