TMEC001 - CÁLCULO NUMÉRICO

CAPÍTULO 01 – MODELAGEM COMPUTACIONAL E MATEMÁTICA E ANÁLISE DE ERROS

Prof. Felipe R. Loyola

Disciplina: Cálculo Numérico

1º Semestre de 2020

1.4 – Erros de Truncamento e Séries de Taylor

1.4.1 – A Série de Taylor

- O Teorema de Taylor e sua fórmula associada, a série de Taylor, são de grande valia no estudo de métodos numéricos. Em essência, a série de Taylor fornece um meio para prever o valor da função em um ponto em termos da função e suas derivadas em outro ponto

1.4.1 – A Série de Taylor

- Se a função *f* e suas *n+1* primeiras derivadas forem contínuas em um intervalo contendo a e *x*, então o valor da função em *x* é dado por:

$$f(x) = f(a) + f'^{(a)}(x-a) + \frac{f''^{(a)}}{2!}(x-a)^2 + \frac{f'''(a)}{3!}(x-a)^3 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + R_n \qquad (57)$$

sendo o resto definido por:

$$R_n = \int_a^x \frac{(x-n)^t}{n!} f^{(n+1)}(t)dt \qquad (58)$$

1.4.1 – A Série de Taylor

- Onde *t* é uma variável muda. A equação (57) é chamada de série de Taylor ou fórmula de Taylor. Se o resto for omitido, o lado direito da equação (57) é a aproximação em polinômio de Taylor *f(x)*. Em essência, o teorema afirma que qualquer função contínua e diferenciável pode ser aproximada por um polinômio. A equação (58) é apenas uma das maneiras, chamada de forma integral, nas quais o resto pode ser expresso. Uma formulação alternativa pode ser deduzida com base no teorema do valor médio para a integral (Teorema 1.11)

Empregando-se o Teorema 1.11 à equação (58), tem-se:

$$g(t) = f^{(n+1)}(t) \text{ e } g(t) = f^{(n+1)}(t) \qquad (59)$$

1.4.1 – A Série de Taylor

quando t varia de a a x, h(t) é continua e não muda de sinal. Portanto, se $f^{(n+1)}(t)$ for continua, então o teorema do valor médio para integrais é válido e

$$R_n = \int_a^x \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x+a)^{n+1} \tag{60}$$

essa equação é conhecida como a forma derivada ou de Lagrange do resto.

- Em geral, é conveniente simplificar a série de Taylor definindo um tamanho de passo $h = x_{i+1}$- $x_i (= \mathrm{x} - \mathrm{a})$, assim:

$$f(x_{i+1}) = f(x_i) + f'^{(x_i)}h + \frac{f''(x_i)h^2}{2!} + \frac{f'''(x_i)h^3}{3!} + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_i)h^n}{n!} + R_n \tag{61}$$

onde o resto agora é:

$$R_n = \frac{f^{(n+1)}(\xi)h^{n+1}}{(n+1)!} \tag{62}$$

1.4.1 – A Série de Taylor

- Os erros de truncamento são aqueles que resultam do uso de uma aproximação no lugar de um procedimento matemático exato. No caso da utilização da série de Taylor, observa-se que existe o controle sobre o termo h da equação. Em outras palavras, é possível escolher quão longe de x se quer calcular f(x) e controlar o número de termos incluídos na expansão. Consequentemente, a equação (62) em geral é expressa como:

$$R_n = O(h^{n+1}) \tag{63}$$

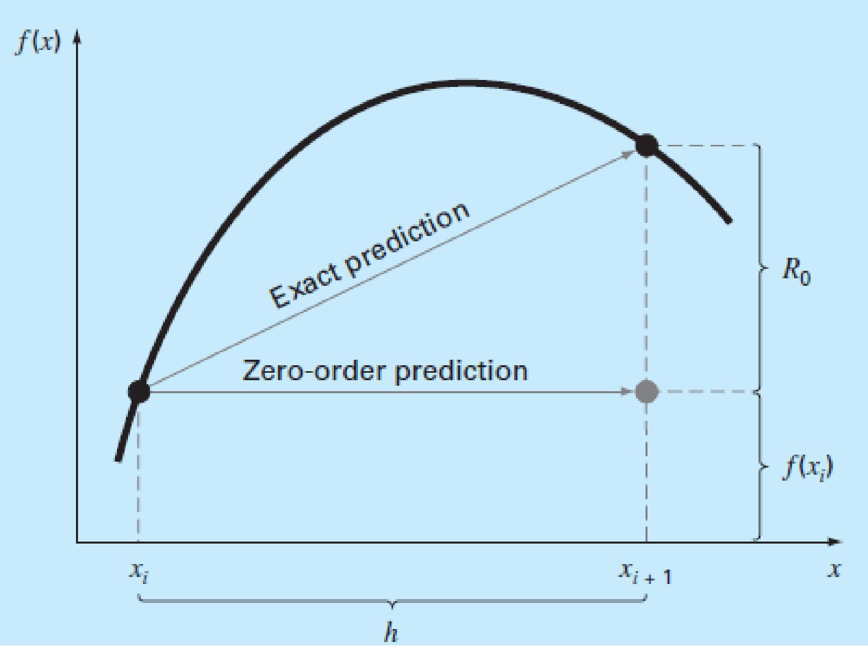

Figura 1.25

1.4.1 – A Série de Taylor

onde a nomenclatura $O(h^{n+1})$ significa que o erro de truncamento é da ordem de h^{n+1}, ou seja, o erro é proporcional ao tamanho do passo h elevado a *(n+1)-ésima* potência. Embora essa aproximação não tenha nenhuma implicação no valor da derivada que multiplica h^{n+1}, ela é extremamente útil para julgar o erro comparativo de métodos numéricos baseados em expansões em séries de Taylor. Por exemplo, se o erro for *O(h)*, dividir o tamanho do passa por dois fará com que o erro seja dividido por dois. Por outro lado, se o erro for da ordem de $O(h^2)$, dividir o tamanho do passo por dois fará com que o erro seja dividido por quatro.

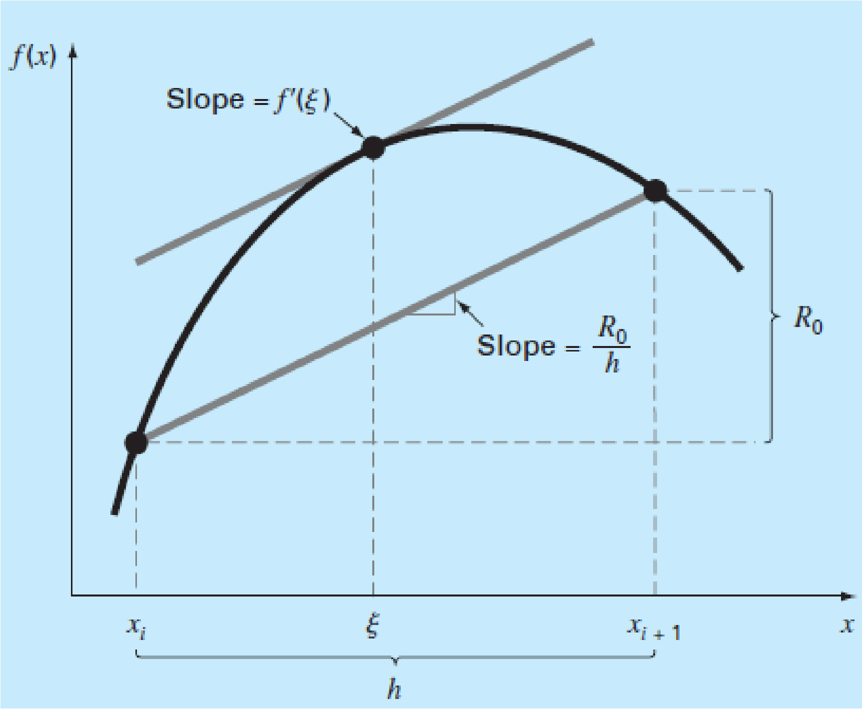

Figura 1.26

1.4.1 – A Série de Taylor

Teorema de Leibniz:

Seja uma série infinita $c_1 - c_2 + c_3 - c_4 + ...$

1. Estritamente alternada
2. Cada termo é menor, em módulo, do que o termo precedente
3. O limite dos termos é zero

Então a série possui soma infinita

Quando a função em questão possui um ponto singular, então existe uma região de convergência infinita;

1.4.1 – A Série de Taylor

<u>Exemplo</u>: As funções: $\sin x$, $\cos x$, e^x não possuem pontos singulares em $x \in \mathbb{R}$, mas $\ln x$ possui uma singularidade em $x = 0$. Utilizando uma série de Taylor em torno de $x_0 = 1$. Determine a região de convergência da séria, isto é, a região em que a série pode ser utilizada para calcular $\ln x$. Além disso, $\ln x \notin \mathbb{R}$ para $x < 0$.

<u>Solução</u>: Série de Taylor para $\ln x$:

$$\ln x = (x-1) - \frac{(x-1)^2}{2} + \frac{(x-1)^3}{3} + \frac{(x-1)^4}{4} + \frac{(x-1)^5}{5} + \cdots$$

Observa-se que para $x = 4$, por exemplo:

$$\ln 4 = (4-1) - \frac{(4-1)^2}{2} + \frac{(4-1)^3}{3} + \frac{(4-1)^4}{4} + \frac{(4-1)^5}{5} + \cdots$$

Portanto, soma não é finita, isto é, a série diverge e não poderá ser utilizada para avaliar $\ln 4$. Verifica-se que a série é estritamente alternada $\forall x \in \mathbb{R}$, porém cada termo geral c_n somente será menor, em módulo, do que o termo precedente se e somente se $x \leq 2$. Note que para $x = 2 + \delta$, onde $\delta > 0, \delta \in \mathbb{R}$.

$$\frac{|c_{n+1}|}{|c_n|} = \frac{\dfrac{(1+\delta)^{n+1}}{n+1}}{\dfrac{(1+\delta)^n}{n}} = (1+\delta)\frac{n}{n+1}$$

1.4.1 – A Série de Taylor

Portanto, $\lim_{n\to\infty}(1+\delta)\frac{n}{n+1}$. Assim, o teorema de Leibniz, não é satisfeito e a série não converge para uma série finita. Desta maneira, esta série só pode ser utilizada para calcular o $\ln x$, quando $0 < x \leq 2$, que é a região de convergência da mesma.

Observa-se que, tendo avaliado o $\ln 2$ com esta série, pode-se utilizar uma outra série de Taylor, obtida em torno de $x_0 = 2$, para calcular o $\ln x$ para $2 < x \leq 3$ e assim sucessivamente.

1.4.2 – Ordens de Convergência

<u>Sequências Convergentes</u>:

- Para encontrar a resposta aproximada de um problema por um procedimento numérico, um programa de computador deve gerar uma sequência de números $x_1, x_2, x_3, \cdots$ que se aproximem da resposta correta. Pode-se pensar, por exemplo, na raiz de uma equação não-linear, no valor numérico da derivada ou integral definida de uma função complicada.

- Matematicamente, deseja-se que

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x \tag{64}$$

onde a sequência $\{x_n\}$ converge para o número real x, se dado por $\varepsilon > 0, \exists n_0 \in Z^+$ tal que $|x - x_n| < \varepsilon, n \geq n_0$.

1.4.2 – Ordens de Convergência

Exemplo: A equação $e = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ define o número irracional e (constante de Euler). Se for utilizada a sequência $x_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ em um computador, $x_1 = 2$. Prosseguindo os cálculos, verifica-se para $n = 1000, x_{1000} = 2{,}716924$. Observa-se que, quando comparado ao valor exato $e = 2{,}7182818\ldots$, ainda se verifica que $|x - x_{1000}| \approx 0{,}00136 > 10^{-3}$. Portanto, este é um exemplo de sequência que converge lentamente para a resposta do problema.

1.4.2 – Ordens de Convergência

Exemplo: Considerando a sequência:

$$\begin{cases} x_1 = 2 \\ x_{n+1} = \dfrac{1}{2} x_n + \dfrac{1}{x_n}; (n \geq 1) \end{cases}$$

Verifica-se que ao realizar os cálculos em um computador, $x_1 = 2$ e $x_4 = 1{,}414216$. Portanto, a resposta aproximada calculada por esta sequência se aproxima rapidamente do valor exato da resposta esperada, isto é, $\sqrt{2} = 1{,}4142356\ldots$

1.4.2 – Ordens de Convergência

Grande "O" e pequeno "o":

- Uma técnica bastante comum de verificar a rapidez com que uma sequência converge para um determinado valor é conhecida como metodologia do grande "O" e do pequeno "o". Trata-se de uma técnica que permite avaliar a taxa de convergência de uma sequência qualquer a partir da comparação direta com outra sequência cuja taxa de convergência é conhecida, isto é, outra sequência de características semelhantes à sequência sob análise.

- Sejam $\{x_n\}$ e $\{\alpha_n\}$ duas sequências diferentes, de características matemáticas semelhantes, onde se conhece a taxa de convergência de $\{\alpha_n\}$. Para avaliar a taxa de convergência de $\{x_n\}$, consideram-se duas possibilidades>

- i) $x_n = \mathrm{O}(\alpha_n)$, se houver constantes c_1 e c_2 tal que $|x_n| \leq c_1 \leq |\alpha_n|$ quando $n \geq c_2$. Então, se $\alpha_n \neq 0$, para todo *n*, então $\left|\frac{x_n}{\alpha_n}\right|$ permanece limitada quando $n \to \infty$. (65)

- ii)$x_n = \mathrm{o}(\alpha_n)$, significa que $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{x_n}{\alpha_n}\right) = 0$ (66)

1.4.2 – Ordens de Convergência

- O entendimento dessas duas definições fica claro observando a situação de $x_n \to 0$ e $\alpha_n \to 0$. Observa-se que não há perda de generalidade nesta análise, uma vez que a situação genérica $x_n \to L_1$ e $\alpha_n \to L_2$, onde L_1 e L_2 são duas constantes quais que e reduzida ao caso anterior criando duas novas sequências $y_n = x_n - L_1$ e $\beta_n = \alpha_n - L_2$. Verifica-se que $y_n \to 0$ e $\beta_n \to 0$, onde, também se conhece a taxa de convergência β_n, uma vez que, a taxa de convergência de α_n é conhecida a priori. Portanto, pelas equações (65) e (66), pode-se afirmar que:
- a) se $x_n = O(\alpha_n) \Rightarrow x_n$ converge para zero pelo menos tão rapidamente quanto α_n, e
- b) se $x_n = \mathrm{o}(\alpha_n) \Rightarrow x_n$ converge para zero mais rapidamente do que α_n.

1.4.2 – Ordens de Convergência

Exemplo: Considere as sequências a seguir e determine se elas possuem uma convergência lenta ou rápida através da comparação com a sequência $\frac{1}{n}$, que tem uma taxa de convergência reconhecidamente lenta.

i. $\frac{n+1}{n^2}$

Solução: Compara-se com a sequência $\frac{1}{n}$ fazendo:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{n+1}{n^2}}{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{n} = 1 \neq 0$$

Portanto,

$$\frac{n+1}{n^2} = 0\left(\frac{1}{n}\right)$$

Isto é, lenta

1.4.2 – Ordens de Convergência

ii. $\dfrac{1}{n \ln n}$

Solução: $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\frac{1}{n \ln n}}{\frac{1}{n}} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{\ln n} = 0$

Portanto, $\dfrac{1}{n \ln n} = \mathrm{o}\left(\dfrac{1}{n}\right)$. Isto é, rápida.

iii. $\dfrac{8}{n} + 4^{-n}$

Solução: $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\frac{8}{n}+4^{-n}}{\frac{1}{n}} = \lim\limits_{n\to\infty} 8 + \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n4^{n}} = 8 \neq 0$

Portanto, $\dfrac{8}{n} + 4^{-n} = O\left(\dfrac{1}{n}\right)$, isto é, lenta.

1.4.2 – Ordens de Convergência

- O conteúdo dessa seção demonstrou a necessidade de se avaliar a rapidez ou a taxa de convergência de um procedimento numérico iterativo no computador. Propõe-se, portanto, uma classificação geral para as ordens de convergência de procedimentos numéricos iterativos com base no erro absoluto da solução procurada para o problema.
- Seja $\{x_n\}$ uma sequência de números reais tendendo a $x*$ (solução exata). Apresenta-se a seguinte classificação de ordens de convergência:

1.4.2 – Ordens de Convergência

i. A taxa de convergência é pelo menos linear se houver uma constante $c < 1$ e um inteiro N, tal que:

$$|x_{n+1} - x^*| \leq c|x_n - x^*|, (n \geq N) \tag{67}$$

ii. A taxa de convergência é pelo menos superlinear se $\exists \varepsilon_n \to 0$ e um inteiro N, tal que:

$$|x_{n+1} - x^*| \leq \varepsilon_n |x_n - x^*|, (n \geq N) \tag{68}$$

iii. A taxa de convergência é pelo menos quadrática se $\exists \mathbb{C}$ (não necessariamente menor do que 1) e um inteiro N, tal que:

$$|x_{n+1} - x^*| \leq \mathbb{C}|x_n - x^*|, (n \geq N) \tag{69}$$

iv. A taxa de convergência é pelo menos ordem α, se $\exists \mathbb{C}$, α e um inteiro N, tal que:

$$|x_{n+1} - x^*| \leq \mathbb{C}|x_n - x^*|^{\alpha}, (n \geq N) \tag{70}$$

1.4.2 – Ordens de Convergência

- **Definição 4.1**: Suponha que $E_0 > 0$ indique um erro inicial e E_n represente a magnitude do erro após n operações sucessivas. Se $E_n \approx CnE_0$, onde C é uma constante independente de *n*, então o crescimento do erro é chamado de linear. Se $E_n \approx C^n E_0$ para qualquer $C > 1$, então o crescimento do erro é chamado de exponencial.

O crescimento linear do erro normalmente é inevitável, e quando C e E_0 são pequenos, os resultados são geralmente aceitos. O crescimento exponencial do erro deve ser evitado, uma vez que o termo C^n torna-se muito grande mesmo para valores relativamente pequenos de n. Isso leva a imprecisões inaceitáveis, a despeito do tamanho de E_0. Como consequência, um algoritmo que apresente um crescimento linear do erro é estável, enquanto um algoritmo cujo erro cresça exponencialmente é instável

1.4.2 – Ordens de Convergência

- **Exemplo**: A equação recorrente $p_n = \frac{10}{3} p_{n-1} - p_{n-2}$, para $n = 2,3, \dots$ tem a solução:

$$p_n = c_1 \left(\frac{1}{3}\right)^n + c_2 3^n$$

para quaisquer constantes c_1 e c_2, na medida que

$$\frac{10}{3} p_{n-1} - p_{n-2} = \frac{10}{3}\left[c_1 \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} + c_2 3^{n-1}\right] - \left[c_1 \left(\frac{1}{3}\right)^{n-2} + c_2 3^{n-2}\right]$$

$$= c_1 \left(\frac{1}{3}\right)^{n-2} \left[\frac{10}{3}\frac{1}{3} - 1\right] + c_2 3^{n-2}\left[\frac{10}{3} 3 - 1\right] = c_1 \left(\frac{1}{3}\right)^{n-2} \left(\frac{1}{9}\right) + c_2 3^{n-2}(9)$$

$$= c_1 \left(\frac{1}{3}\right)^n \left(\frac{1}{9}\right) + c_2 3^n = p_n$$

1.4.2 – Ordens de Convergência

Se $p_0 = 1$ e $p_1 = \frac{1}{3}$, tem-se que $c_1 = 1$ e $c_2 = 0$, e assim $p_n = \left(\frac{1}{3}\right)^n$ para qualquer n. Suponde que para calcular a sequência dada por essa equação sejam utilizados valores numéricos com aproximação de cinco dígitos. Então $\hat{p}_0 = 1{,}00000$ e $\hat{p}_1 = 0{,}33333$, o que significa modificar as constantes para $\hat{c}_1 = 1{,}00000$ e $\hat{c}_2 = 0{,}12500 \times 10^{-5}$. A sequência $\{\hat{p}_n\}_{n=0}^{\infty}$ gerada é dada, então por:

$$\hat{p}_n = 1{,}00000\left(\frac{1}{3}\right)^n - 0{,}12500 \times 10^{-5}(3)^n$$

E o erro de arredondamento,

$$p_n - \hat{p}_n = 0{,}12500 \times 10^{-5}(3)^n$$

Cresce exponencialmente com n. Tal fato se reflete na grande imprecisão observada já nos cálculos dos primeiros termos, conforme se pode visualizar a seguir.

1.4.2 – Ordens de Convergência

n	$\hat{p}_n$ calculado	p_n correto	Erro relativo
0	$0{,}100000 \times 10^1$	$0{,}100000 \times 10^1$	
1	$0{,}33333 \times 10^0$	$0{,}33333 \times 10^0$	
2	$0{,}11110 \times 10^0$	$0{,}11111 \times 10^0$	9×10^{-5}
3	$0{,}37000 \times 10^{-1}$	$0{,}37037 \times 10^{-1}$	1×10^{-3}
4	$0{,}12230 \times 10^{-1}$	$0{,}12346 \times 10^{-1}$	9×10^{-3}
5	$0{,}37660 \times 10^{-2}$	$0{,}41152 \times 10^{-2}$	8×10^{-2}
6	$0{,}32300 \times 10^{-3}$	$0{,}13717 \times 10^{-2}$	8×10^{-1}
7	$-0{,}26893 \times 10^{-2}$	$0{,}45725 \times 10^{-3}$	7×10^0
8	$-0{,}92872 \times 10^{-2}$	$0{,}15242 \times 10^{-3}$	6×10^1

1.4.2 – Ordens de Convergência

Por outro lado, a equação recorrente $p_n = 2p_{n-1} - p_{n-2}$, para $n = 2,3, \ldots$ tem a solução $p_n = c_1 + c_2 n$ para quaisquer constantes c_1 e c_2, pois:

$$2p_{n-1} - p_{n-2} = 2[c_1 + c_2 n] - [c_1 + c_2 n] = c_1(2-1) + c_2(2n-2-2+2) = c_1 + c_2 n = p_n$$

se $p_0 = 1$ e $p_1 = \frac{1}{3}$, as constantes nessa equação $c_1 = 1$ e $c_2 = -\frac{2}{3}$, e então $p_n = 1 - \frac{2}{3}n$. Os cálculos com arredondamento para cinco dígitos, nesse caso utilizam $\hat{p}_0 = 1{,}00000$ e $\hat{p}_1 = 0{,}33333$. Consequentemente as constantes c_1 e c_2 serão $\hat{c}_1 = 1{,}00000$ e $\hat{c}_2 = -0{,}66667$, com arredondamento para cinco dígitos. Assim sendo:

$$\hat{p}_n = 1{,}00000 - 0{,}66667n$$

E o erro de arredondamento,

$$p_n - \hat{p}_n = \left(0{,}66667 - \frac{2}{3}\right)n$$

que cresce linearmente com n. Tal fato tem reflexos na estabilidade verificada a seguir.

1.4.2 – Ordens de Convergência

n	$\hat{p}_n$ calculado	p_n correto	Erro relativo
0	$0{,}100000 \times 10^1$	$0{,}100000 \times 10^1$	
1	$0{,}33333 \times 10^0$	$0{,}33333 \times 10^0$	
2	$-0{,}33330 \times 10^0$	$-0{,}33333 \times 10^0$	9×10^{-5}
3	$-0{,}10000 \times 10^1$	$-0{,}10000 \times 10^1$	0
4	$-0{,}16667 \times 10^1$	$-0{,}16667 \times 10^1$	0
5	$-0{,}23334 \times 10^1$	$-0{,}23333 \times 10^1$	4×10^{-5}
6	$-0{,}30000 \times 10^1$	$-0{,}30000 \times 10^1$	0
7	$-0{,}36667 \times 10^1$	$-0{,}36667 \times 10^1$	0
8	$-0{,}43334 \times 10^1$	$-0{,}43333 \times 10^1$	2×10^{-5}

1.4.2 – Ordens de Convergência

- **Definição 4.2**: Suponha $\{\beta_n\}_{n=1}^{\infty}$ uma sequência que sabidamente converge para zero $\{\alpha_n\}_{n=1}^{\infty}$, uma sequência que sabidamente converge para um número α. Se existe uma constante positiva *K*, tal que:

$$|\alpha_n - \alpha| \leq K \leq |\beta_n|$$

para um valor de grande de n. Então diz-se que $\{\alpha_n\}_{n=1}^{\infty}$ converge para α com uma taxa de convergência assim: $\alpha_n = \alpha + O(\beta_n)$.

Embora a definição permita comparar $\{\alpha_n\}_{n=1}^{\infty}$ com uma sequência arbitrária $\{\beta_n\}_{n=1}^{\infty}$, em quase todos os casos utiliza-se:

$$\beta_n = \frac{1}{n^p} \tag{71}$$

para um número qualquer $p > 0$. Geralmente se está interessado no maior valor de p para o qual $\alpha_n = \alpha + O\left(\frac{1}{n^p}\right)$.

1.4.2 – Ordens de Convergência

- **Exemplo**: Suponha que, para $n \geq 1$,

$$\alpha_n = \frac{n+1}{n^2} \text{ e } \hat{\alpha}_n = \frac{n+3}{n^3}$$

ainda que tanto o $\lim_{n\to\infty} \alpha_n = 0$ quanto o $\lim_{n\to\infty} \hat{\alpha}_n = 0$, a sequencia $\{\hat{\alpha}_n\}$ converge para esse limite muito mais rapidamente do que a sequência $\{\alpha_n\}$, quando utilizada uma aproximação por arredondamento para cinco dígitos, conforme mostrado a seguir:

n	1	2	3	4	5	6	7
α_n	2,0000	0,75000	0,44444	0,31250	0,24000	0,19444	0,16327
$\hat{\alpha}_n$	4,0000	0,62500	0,22222	0,10938	0,064000	0,041667	0,029155

1.4.2 – Ordens de Convergência

se for feito $\beta_n = \frac{1}{n}$ e $\hat{\beta}_n = \frac{1}{n^2}$, vê-se que:

$$|\alpha_n - 0| = \frac{n+1}{n^2} \leq \frac{n+n}{n^2} = 2\frac{1}{n} = 2\beta_n$$

$$|\hat{\alpha}_n - 0| = \frac{n+3}{n^3} \leq \frac{n+3n}{n^3} = 4\frac{1}{n^2} = 4\hat{\beta}_n$$

e portanto

$\alpha_n = 0 + O\left(\frac{1}{n}\right)$ e $\hat{\alpha}_n = 0 + O\left(\frac{1}{n^2}\right)$

A taxa de convergência de $\{\alpha_n\}$ para zero é similar à convergência de $\left\{\frac{1}{n}\right\}$ também para zero, enquanto $\{\hat{\alpha}_n\}$ converge para zero a uma taxa similar àquela da sequência $\left\{\frac{1}{n^2}\right\}$, a qual converge para zero com muito mais rapidez.

1.4.2 – Ordens de Convergência

- **Definição 4.3**: Suponha que $\lim_{h \to 0} G(h) = 0$ e $\lim_{h \to 0} F(h) = L$, se existe uma constante K positiva para a qual $|F(h) - L| \leq K|G(h)|$, para h suficientemente pequeno, pode-se então escrever $F(h) = L + O\big(G(h)\big)$.

As funções utilizadas para comparação geralmente tem a forma $G(h) = h^p$, com $p > 0$. Está-se, assim, interessado no maior valor de p para o qual $F(h) = L + O(h^p)$.

1.4.2 – Ordens de Convergência

- **Exemplo**: O polinômio de Taylor de 3º grau do cosseno pode ser escrito como:

$$\cos h = 1 - \frac{1}{2}h^2 + \frac{1}{24}h^4 \cos\tilde{\xi}(h)$$

para valores de $\tilde{\xi}(h)$ entre zero e h. Consequentemente

$$\cos h + \frac{1}{2}h^2 = 1 + \frac{1}{24}h^4 \cos\tilde{\xi}(h)$$

esse resultado implica

$$\cos h + \frac{1}{2}h^2 = 1 + O(h^4)$$

já que $\left|\cos h + \frac{1}{2}h^2 - 1\right| = \left|\frac{1}{24}\cos\tilde{\xi}(h)\right| h^4 \leq \frac{1}{24}h^4$. A implicação é que quando $h \to 0, \cos h + \frac{1}{2}h^2$ converge para seu limite 1, pelo menos tão rapidamente quanto h^4 converge para 0.

1.4.3 – Propagação de Erros

- **Funções de uma única variável:**
- Suponha que se tenha uma função $f(x)$ que dependa de uma única variável independente de x e que $\tilde{x}$ seja uma aproximação de x. Gostar-se-ia, então, estimar o efeito da discrepância entre x e $\tilde{x}$ no valor da função, isto é, gostar-se-ia estimar:

$$\Delta f(\tilde{x}) = |f(x) - f(\tilde{x})| \tag{72}$$

1.4.3 – Propagação de Erros

- O problema de calcular $\Delta f(\tilde{x})$ é que $f(x)$ é desconhecida, já que x é desconhecido. Pode-se superar essa dificuldade, no entanto, se $\tilde{x}$ estiver próximo de x e $f(\tilde{x})$ for contínua e diferenciável. Se tais condições forem válidas, a série de Taylor pode ser usada para calcular $f(x)$ próximo de $f(\tilde{x})$ como em

$$f(x) = f(\tilde{x}) + f'(\tilde{x})(x - \tilde{x}) + \frac{f''(\tilde{x})}{2!}(x - \tilde{x})^2 + \cdots \tag{73}$$

- Desprezando-se os termos de grau maior ou igual a dois e reorganizando, obtém-se:

$$f(x) - f(\tilde{x}) \approx f'(\tilde{x})(x - \tilde{x})$$

ou

$$\Delta f(\tilde{x}) = |f'(\tilde{x})|(x - \tilde{x}) \tag{74}$$

1.4.3 – Propagação de Erros

onde $\Delta f(\tilde{x}) = |f(x) - f(\tilde{x})|$ representa uma estimativa do erro da função e $\Delta x = |(x - \tilde{x})|$ representa uma estimativa do erro de x. A equação (74) fornece recursos para aproximar o erro em $f(x)$ dadas a derivada da função e uma estimativa do erro da variável independente.

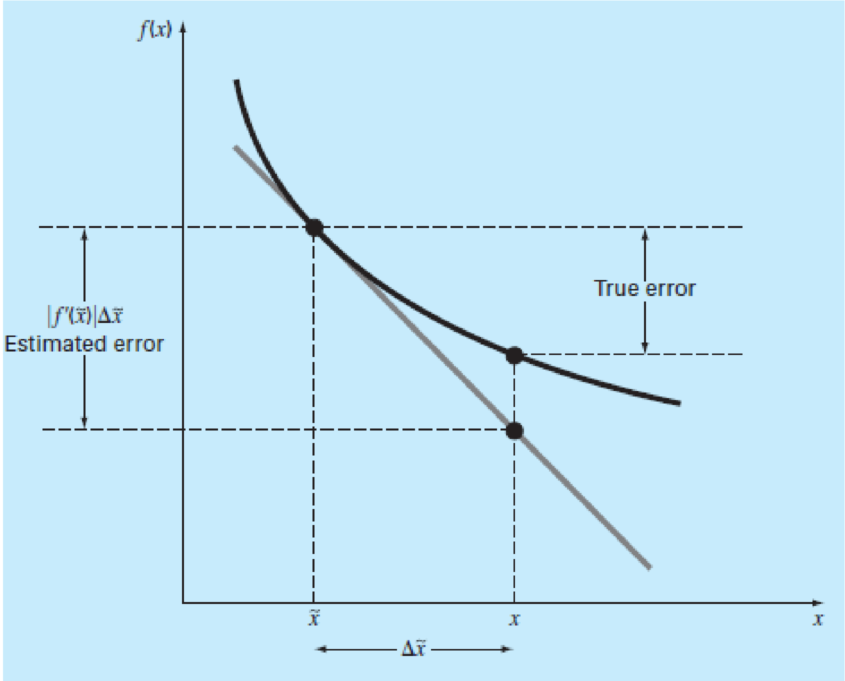

Figura 1.27

1.4.3 – Propagação de Erros

- **Funções de mais de uma variável:**

- A abordagem precedente pode ser generalizada para funções que dependem de mais de uma variável independente. Consegue-se isso com a versão para diversas variáveis da série de Taylor. Por exemplo, caso se tenha uma função de duas variáveis independentes u e v, a série de Taylor pode ser escrita como

$$f(u_{i+1}, v_{i+1})$$

$$= f(u_i, v_i) + \frac{\partial f}{\partial u}(u_{i+1}, u_i) + \frac{\partial f}{\partial v}(v_{i+1}, v_i) \tag{75}$$

$$+ \frac{1}{2!}\left[\frac{\partial^2 f}{\partial u^2}(u_{i+1} - u_i)^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v}(u_{i+1}, u_i)(v_{i+1}, v_i) + \frac{\partial^2 f}{\partial v^2}(v_{i+1} - v_i)^2\right]$$

1.4.3 – Propagação de Erros

onde todas as derivadas parciais são avaliadas no ponto i. Se todos os termos de segunda ordem e de ordem mais alta forem desconsiderados, a equação (75) pode ser reescrita como

$$\Delta f(\tilde{u}, \tilde{v}) = \left|\frac{\partial f}{\partial u}\right| \Delta\tilde{u} + \left|\frac{\partial f}{\partial v}\right| \Delta\tilde{v} \tag{76}$$

onde $\Delta\tilde{u}$ e $\Delta\tilde{v}$ são estimativas dos erros em u e v, respectivamente

Para n variáveis independentes $\tilde{x}_1,\ \tilde{x}_2, \dots, \tilde{x}_n$ tendo erros $\Delta\tilde{x}_1,\ \Delta\tilde{x}_2, \dots, \Delta\tilde{x}_n$ vale a seguinte relação geral:

$$\Delta f(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \dots, \tilde{x}_n) = \left|\frac{\partial f}{\partial x_1}\right| \Delta\tilde{x}_1 + \left|\frac{\partial f}{\partial x_2}\right| \Delta\tilde{x}_2 + \cdots + \left|\frac{\partial f}{\partial x_n}\right| \Delta\tilde{x}_n \tag{77}$$

1.4.3 – Propagação de Erros

A equação (77) pode ser usada para definir relações de propagação de erros para operações matemáticas comuns:

Operação		
Adição	$\Delta(\tilde{u}+\tilde{v})$	$\Delta\tilde{u}+\Delta\tilde{v}$
Subtração	$\Delta(\tilde{u}-\tilde{v})$	$\Delta\tilde{u}-\Delta\tilde{v}$
Multiplicação	$\Delta(\tilde{u}\times\tilde{v})$	$\lvert\tilde{u}\rvert\Delta\tilde{v}+\lvert\tilde{v}\rvert\Delta\tilde{u}$
Divisão	$\Delta\left(\frac{\tilde{u}}{\tilde{v}}\right)$	$\frac{\lvert\tilde{u}\rvert\Delta\tilde{v}-\lvert\tilde{v}\rvert\Delta\tilde{u}}{\lvert\tilde{v}\rvert^2}$

1.4.3 – Propagação de Erros

<u>Exemplo</u>: A deflexão y no topo do mastro de um barco a vela é $y = \frac{FL^4}{8EI}$, onde F é uma carga uniforme (lb/pés), L é a altura (pés), E é o módulo de elasticidade (lb/pés^2) e I é o momento de inércia (pés^4). Faça uma estimativa do erro em y considerando os seguintes dados:

$$\widetilde{\boldsymbol{F}} = \mathbf{50}\,\boldsymbol{lb/p}\text{é}\boldsymbol{s} \qquad \Delta\widetilde{\boldsymbol{F}} = \mathbf{2}\,\boldsymbol{lb/p}\text{é}\boldsymbol{s}$$

$$\tilde{\boldsymbol{L}} = \mathbf{30}\boldsymbol{p}\text{é}\boldsymbol{s} \qquad \Delta\tilde{\boldsymbol{L}} = \mathbf{0,1}\,\boldsymbol{p}\text{é}\boldsymbol{s}$$

$$\widetilde{\boldsymbol{E}} = \mathbf{1,5} \times \mathbf{10^8}\,\boldsymbol{lb/p}\text{é}\boldsymbol{s}^2 \qquad \Delta\widetilde{\boldsymbol{E}} = \mathbf{0,01} \times \mathbf{10^8}\,\boldsymbol{lb/p}\text{é}\boldsymbol{s}^2$$

$$\tilde{\boldsymbol{I}} = \mathbf{0,06}\,\boldsymbol{p}\text{é}\boldsymbol{s}^{\mathbf{4}} \qquad \Delta\tilde{\boldsymbol{I}} = \mathbf{0,0006}\,\boldsymbol{p}\text{é}\boldsymbol{s}^{\mathbf{4}}$$

1.4.3 – Propagação de Erros

<u>Solução</u>: Usando a equação (77), obtém-se:

$$\Delta f\left(\tilde{F},\tilde{L},\tilde{E},\tilde{I}\right) = \left|\frac{\partial y}{\partial F}\right|\Delta\tilde{F} + \left|\frac{\partial y}{\partial F}\right|\Delta\tilde{L} + \left|\frac{\partial y}{\partial E}\right|\Delta\tilde{E} + \left|\frac{\partial y}{\partial I}\right|\Delta\tilde{I}$$

ou seja:

$$\Delta f\left(\tilde{F},\tilde{L},\tilde{E},\tilde{I}\right) = \frac{\tilde{L}}{8\tilde{E}\tilde{I}}\Delta\tilde{F} + \frac{\tilde{F}\tilde{L}^3}{2\tilde{E}\tilde{I}}\Delta\tilde{L} + \frac{\tilde{F}\tilde{L}^4}{8\tilde{E}^2\tilde{I}}\Delta\tilde{E} + \frac{\tilde{F}\tilde{L}^4}{8\tilde{E}\tilde{I}^2}\Delta\tilde{I}$$

Substituindo os valores apropriados, obtém-se

$$\Delta y = 0{,}0225 + 0{,}0075 + 0{,}00375 + 0{,}005625 = 0{,}039375$$

1.4.3 – Propagação de Erros

Portanto $\Delta y = 0{,}5625 \pm 0{,}039375$, isto é, y está entre 0,523125 e 0,601875. A validade dessas estimativas pode ser verificada substituindo-se os valores extremos das variáveis na equação para gerar os valores extremos exatos de

$$y_{min} = \frac{48(29{,}9)^4}{8(1{,}51 \times 10^8)0{,}0606} = 0{,}52407$$

$$y_{max} = \frac{52(30{,}1)^4}{8(1{,}49 \times 10^8)0{,}0594} = 0{,}60285$$

Logo, as estimativas de primeira ordem são razoavelmente próximas dos valores exatos.

1.4.3 – Propagação de Erros

- **<u>Estabilidade e Condicionamento:</u>**

- O condicionamento de um problema matemático se relaciona com sua sensibilidade a variações em seus valores de entrada. Diz-se que um cálculo é numericamente instável se as incerteza dos valore de entrada são brutalmente aumentadas pelo métodos numérico. Essas ideias podem ser estudadas usando-se a série de Taylor de primeira ordem.

$$f(x) = f(\tilde{x}) + f'(\tilde{x})(x - \tilde{x}) \tag{76}$$

- Essa relação pode ser empregada para se estimar o erro relativo de $f(x)$ como em:

$$\frac{f(x) - f(\tilde{x})}{f(x)} \approx \frac{f'(\tilde{x})(x - \tilde{x})}{f(\tilde{x})}$$

- O erro relativo de x é dado por:

$$\frac{x - \tilde{x}}{\tilde{x}}$$

1.4.3 – Propagação de Erros

- Um número de condicionamento pode ser definido como a razão desses erros relativos:

$$Número\ de\ condicionamento = \frac{\tilde{x} f'(\tilde{x})}{f(\tilde{x})} \quad (77)$$

- O número de condicionamento fornece uma medida da extensa pela qual uma incerteza em *x* é ampliada por *f(x)*. Uma valor 1 diz que o erro relativo da função é idêntico ao erro relativo em *x*. Um valor maior que 1 diz que o erro relativo foi ampliado, enquanto um valor menor que 1 diz que foi atenuado. Funções com valores muito grandes são ditas mal condicionadas. Qualquer combinação de fatores na equação (77) que aumente o valor numérico do numero de condicionamento tenderá a aumentar as incertezas no cálculo de *f(x).*

1.4.3 – Propagação de Erros

- **Exemplo:** Calcule e interprete o número de condicionamento para

$$f(x) = \tan x\,, para\ \tilde{x} = \frac{\pi}{2} + 0{,}1\left(\frac{\pi}{2}\right)$$

$$f(x) = \tan x\,, para\ \tilde{x} = \frac{\pi}{2} + 0{,}01\left(\frac{\pi}{2}\right)$$

Solução: Para a função dada, o número de condicionamento é calculado como

número de condicionamento = $\frac{\tilde{x} sec^2 \tilde{x}}{\tan \tilde{x}}$

1.4.3 – Propagação de Erros

- Para $\tilde{x} = \frac{\pi}{2} + 0{,}1\left(\frac{\pi}{2}\right)$, $\text{número de condicionamento} = \frac{1{,}7279(40{,}86)}{-6{,}314} = -11{,}2$

- Logo, função é mal condicionada. Para $\tilde{x} = \frac{\pi}{2} + 0{,}01\left(\frac{\pi}{2}\right)$ a situação é ainda pior: $\text{número de condicionamento} = \frac{1{,}5865(4053)}{-63{,}66} = 11{,}2$

Neste caso, a principal causa do mal condicionamento parece ser a derivada. Isso faz sentido porque, na vizinhança de $\frac{\pi}{2}$, a tangente se aproxima de valores infinitos tanto positivos quanto negativos.

1.4.4 – Erro Numérico Total

- O erro numérico total é a soma dos erros de truncamento e de arredondamento. Em geral, a única maneira de minimizar os erros de arredondamento é aumentar o número de algarismos significativos do computador. Além disso, observa-se que os erros de arredondamento irão aumentar por causa dos cancelamentos na subtração ou de um aumento no número de cálculos na análise.

1.4.4 – Erro Numérico Total

- Em contraste, mostra-se que o erro de truncamento pode ser diminuído reduzindo-se o tamanho do passo. Como a diminuição do tamanho do passo pode levar a cancelamentos na subtração ou a um aumento nos cálculos, os erros de truncamento diminuirão enquanto os erros de arredondamento aumentarão. Encara-se, então, o seguinte dilema: a estratégia para diminuir uma componente do erro total leva a um aumento da outra componente.

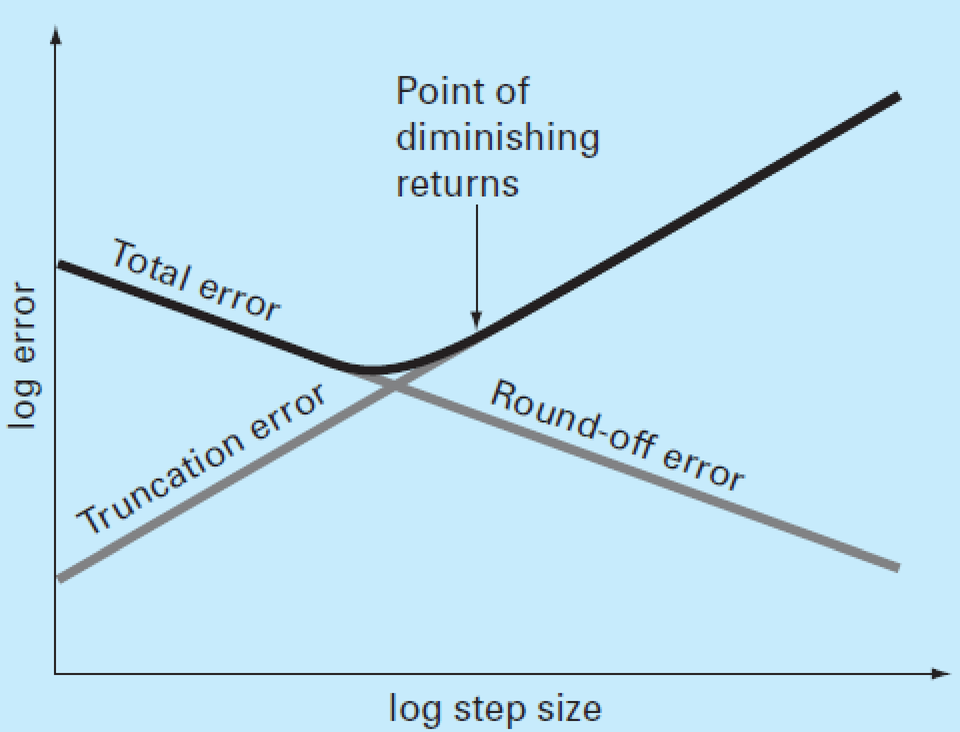

Figura 1.28

1.4.4 – Erro Numérico Total

- **Controle de erros numéricos**:

- Na maioria dos casos práticos, não se sabe o erro exato associado aos métodos numéricos. A exceção, obviamente, é quando se obtém a solução exata, que torna a aproximação numérica desnecessária. Então, na maior parte das aplicações da engenharia, é necessário contentar-se com alguma estimativa do erro nos cálculos.

1.4.4 – Erro Numérico Total

- Embora a análise de erros seja até certo ponto uma arte, existem diversas diretrizes práticas de programação que são sugeridas:
  - Deve-se evitar subtrair dois números quase iguais. Perda de significado quase sempre ocorre quando isso é feito;
  - Reorganizar ou reformular o problema para evitar o cancelamento na subtração;
  - Utilizar aritmética com precisão estendida;
  - Quando se somam ou se subtraem números, é melhor ordená-los e trabalhar com os números menores primeiro, pois tal conduta evita perda de significado.