

TMEC001 - CÁLCULO NUMÉRICO

CAPÍTULO 02 – SOLUÇÕES NUMÉRICAS DE EQUAÇÕES DE UMA VARIÁVEL

Prof. Felipe R. Loyola
Disciplina: Cálculo Numérico
1º Semestre de 2020

Motivação

Anteriormente, aprendemos a seguinte fórmula:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

para resolver uma equação de segundo grau da seguinte fórmula

$$f(x) = ax^2 + bx + c = 0$$

Os valores calculados eram chamados de **raízes** da equação, ou seja, os valores de x que, quando substituídos, igualavam a equação anterior a **0**.

Embora a equação anterior seja de **fácil resolução**, a obtenção das raízes de grande parte das funções não é tão simples. Por esse motivo, faz-se necessário a aplicação de métodos numéricos

Motivação

Além do advento da **computação**, existiam alguns métodos utilizados para a obtenção das **raízes das equações** algébricas e transcendentais.

Para alguns casos, podia-se utilizar **métodos diretos** para a resolução dos problemas, para outros uma possível solução dava-se pela aplicação dos **métodos gráficos** através da plotagem das funções. Tal método fornecia uma solução aproximada e de pouca precisão para o problema.

Outra solução poderia ser através do famoso método de **tentativa e erro** até que o “chute” fosse bom o suficiente para zerar a função em questão.

Motivação

Princípios fundamentais utilizados em problemas de engenharia:

Princípio Fundamental	Variáveis dependentes	Variáveis independentes	Parâmetros
Balanço de calor	Temperatura	Tempo e posição	Propriedades térmicas do material e geometria do sistema
Balanço de massa	Concentração ou quantidade de massa	Tempo e posição	Comportamento químico do material, coeficientes de transferência de massa e geometria do sistema
Balanço de forças	Magnitude e direção das forças	Tempo e posição	Resistência do material, propriedades estruturais e geometria do sistema
Balanço de energia	Mudança nos estados das energias potenciais e cinéticas no sistema	Tempo e posição	Propriedades termofísicas, massa do material e geometria do sistema
Leis de Newton e de movimento	Aceleração, velocidade ou localização	Tempo e posição	Massa do material, geometria do sistema e parâmetros de dissipação
Leis de Kirchhof	Corrente e tensões nos circuitos elétricos	Tempo	Propriedades elétricas do sistema

Motivação

Uma função por $y = f(x)$ é **algébrica** e pode ser expressa pela forma

$$f_n y^n + f_{n-1} y^{n-1} + \dots + f_1 y + f_0 = 0$$

Polinômios são uma classe de equações algébricas representados por:

$$f_n(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n$$

Uma equação **transcendental**, por sua vez, é não-algébrica. Incluindo funções trigonométricas, exponenciais, logarítmicas e outras.

Dos tipos comuns de problemas são?

- A determinação de raízes reais de equações algébricas e transcendentais
- A determinação de todas as raízes reais e complexas dos polinômios

2.1 Métodos Intervalares

2.1.1 – Métodos Gráficos

Um **método simples** para obter uma **estimativa** da raiz da equação $f(x) = 0$ é fazer um **gráfico da função** e observar onde ela corta o **eixo das abscissas**.

Esse ponto, que representa o **valor de x** para o qual **$f(x) = 0$** , fornece uma **estimativa inicial** da raiz. Essas técnicas possuem valor prático **limitado**, pois não possuem **acurácia** elevada

2.1.1 – Métodos Gráficos

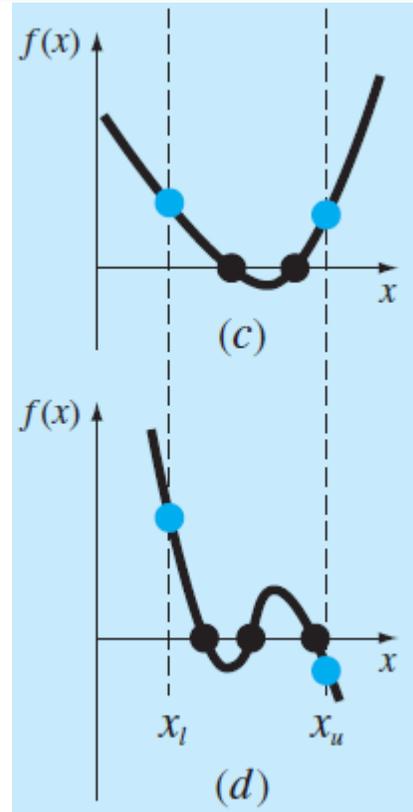
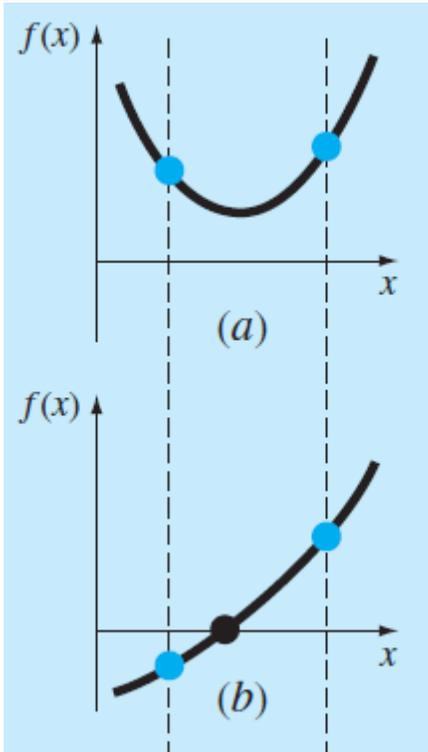


Ilustração de algumas maneiras em que a raiz pode aparecer em um intervalo prescrito por um limite inferior x_l e um limite superior x_u . (a) e (c) indicam que ambos $f(x_l)$ e $f(x_u)$ tem o mesmo sinal, logo pode não haver raízes ou há um número par de raízes no intervalo. (b) e (d) indicam que a função possui diferentes sinais nos pontos inicial e final, indicando um número ímpar de raízes

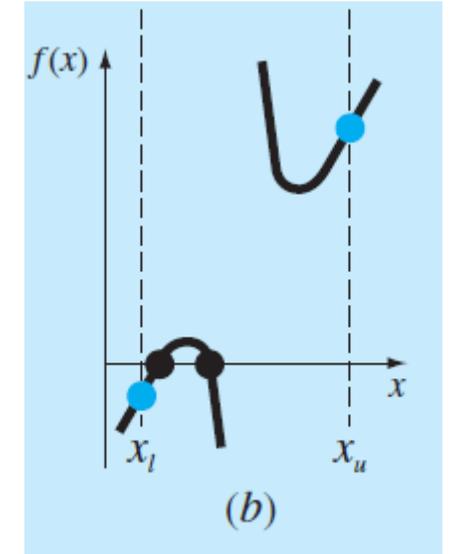
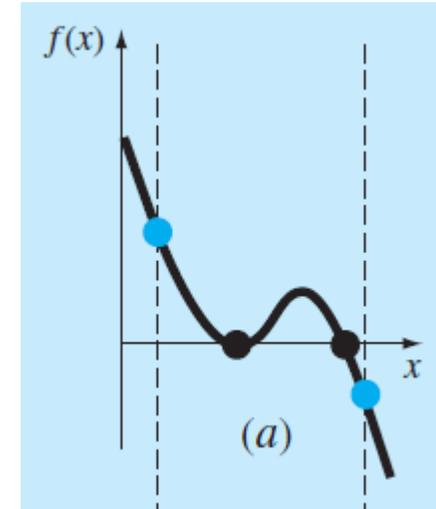


Ilustração de algumas exceções dos casos ao lado: (a) várias raízes aparecem quando a função é tangente ao eixo-x. Para esse caso, embora os sinais sejam trocados nos limites inferior e superior, existe um número par de intersecções com o eixo-x no intervalo; (b) Função descontínua onde os pontos limites de sinais trocados agrupam um número par de raízes. Algumas estratégias especiais são utilizadas para determinar as raízes nesses casos

2.1.1 – Métodos Gráficos

- **Exemplo:** Considerando-se que a velocidade (u) de um paraquedista em queda livre possa ser estimada através da seguinte função:

$$u(t) = \frac{gm}{c} \left[1 - e^{-\left(\frac{c}{m}t\right)} \right]$$

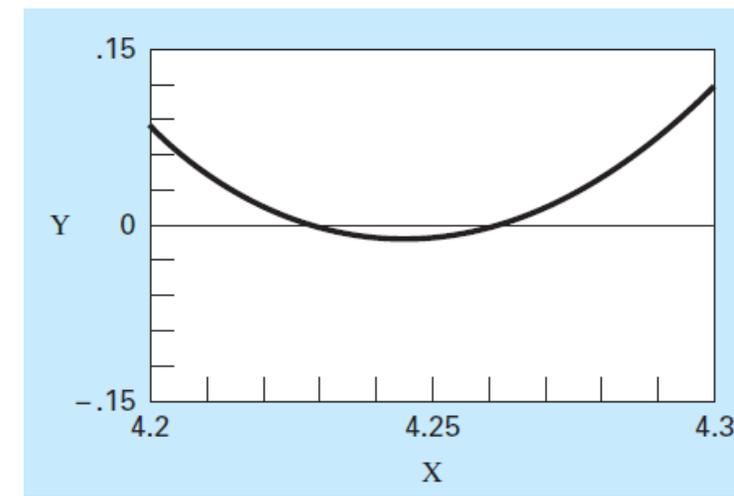
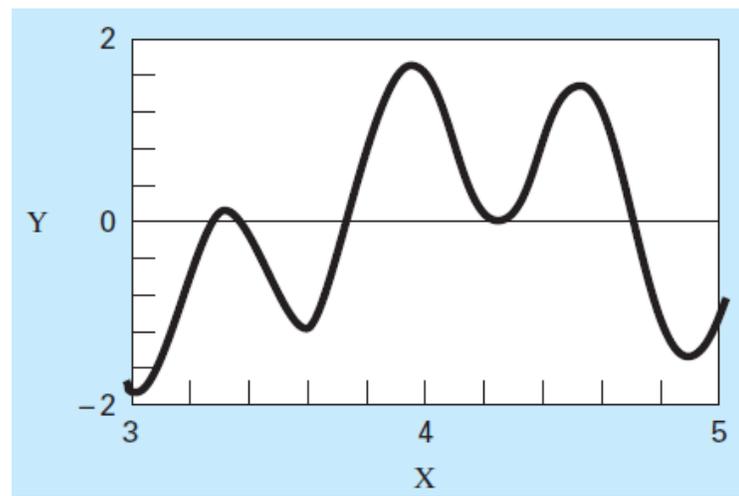
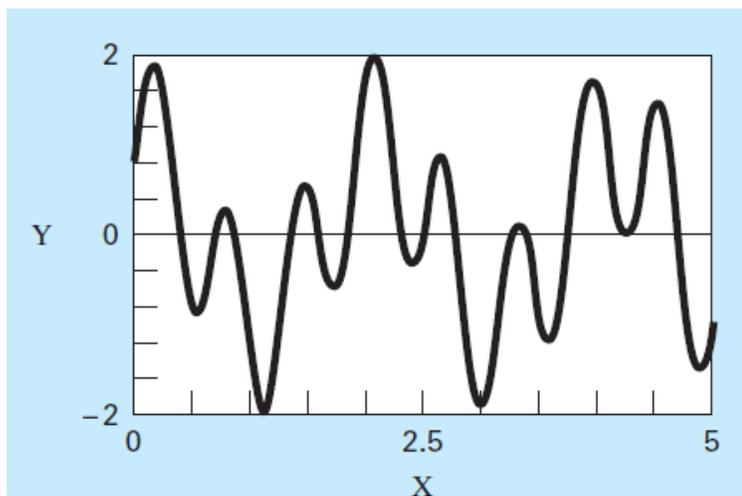
em que g denota a aceleração da gravidade, m a massa do paraquedista, c o coeficiente de arrasto e t o tempo. Pede-se para determinar o coeficiente de arrasto necessário para que um paraquedista de massa de 68,1 kg tenha uma velocidade de 40 m/s após uma queda livre de 10s e um ambiente com aceleração da gravidade de 9,8 m/s².

2.1.1 – Métodos Gráficos

- **Exemplo:** Gráficos computacionais podem ser utilizados para acelerar e aprimorar os esforços necessários para localizar as raízes das funções. A função

$$f(x) = \text{sen}(10x) + \cos(3x)$$

- tem diferentes raízes ao longo do intervalo de $x = 0$ e $x=5$. Utilize gráficos computacionais para melhor observar o comportamento da função.



2.1.2 – Método da Bisseccção

- Conhecido também como **método de Bolzano** ou **método de truncamento binário**.
- Consiste em uma **aplicação** do Teorema do Valor Intermediário. Assim:

“Seja $f(x)$ uma função real e contínua no intervalo de a até b . Se $f(a)$ e $f(b)$ possuírem sinais opostos, ou seja, $f(a) \cdot f(b) < 0$, então existe pelo menos uma raiz real entre a e b .”

2.1.2 – Método da Bisseção

- O método da bisseção é um tipo de método de **busca incremental** no qual o **intervalo** é sempre **dividido pela metade**.
- Se uma função **muda de sinal** em um intervalo $[a, b]$, calcula-se o valor da função em seu **ponto médio**.
- A posição da raiz é então determinada como sendo o ponto médio do subintervalo no qual a mudança de sinal ocorre.

2.1.2 – Método da Bisseccção

ALGORITMO

- PASSO 1: Escolher os limites inferior (x_l) e superior (x_u) como "chutes" para encontrar a raiz da equação de maneira que o sinal seja trocado durante esse intervalo. Isso pode ser checado por meio da confirmação que: $f(x_l) \cdot f(x_u) < 0$

- PASSO 2: Uma estimativa da raiz é determinada por:

$$x_r = \frac{x_l + x_u}{2}$$

- PASSO 3: Faça a seguinte avaliação para determinar em qual subintervalo a raiz se encontra:
 - a) Se $f(x_l) \cdot f(x_r) < 0$, a raiz está no subintervalo inferior. Portanto, faça com que $x_u = x_r$ e retorne ao PASSO 2;
 - b) Se $f(x_l) \cdot f(x_r) > 0$, a raiz se encontra no subintervalo superior. Portanto, faça com que $x_l = x_r$ e retorne ao PASSO 2;
 - c) Se $f(x_l) \cdot f(x_r) = 0$, a raiz tem o valor de x_r , encerre os cálculos.

2.1.2 – Método da Bisseccção

2.1.2.1 Critério de Parada e Estimativa de Erro

Uma estimativa do erro que não dependa do conhecimento prévio da raiz pode ser obtida pelo erro relativo aproximado ε_a :

$$\varepsilon_a = \left| \frac{x_r^{novo} - x_r^{antigo}}{x_r^{novo}} \right|$$

onde os índices novo e antigo se referem à iteração atual e à iteração anterior: x_r é a raiz calculada. O valor absoluto é usado porque, em geral, o interesse recai no módulo de ε_a , em vez do seu sinal. Quando ε_a torna-se menor do que um critério de parada prévio (especificado) ε_s , param-se os cálculos.

2.1.2 – Método da Bisseccção

2.1.2.1 Critério de Parada e Estimativa de Erro

Embora o erro aproximado **não forneça uma estimativa exata do erro verdadeiro** (ε_T), o erro aproximado ε_a captura a **tendência geral** de ε_T . Pode ser demonstrado que ε_a será **sempre maior** que ε_T para o método da bissecção. Logo, quando ε_a cai abaixo de ε_s (tolerância), pode-se parar os cálculos com a **confiança** de que a raiz é conhecida pelo menos tão **acuradamente** quanto o nível aceitável pré-especificado

2.1.2 – Método da Bisseccção

2.1.2.2 Estimativa do número de iterações

Dada uma precisão ε_s e um intervalo inicial $[a_0, b_0]$, é possível saber a priori quantas iterações serão efetuadas pelo método da bissecção até que se obtenha $b_k - a_k < \varepsilon_s$. Tem-se que:

$$b_k - a_k = \frac{b_{k-1} - a_{k-1}}{2} = \frac{b_{k-2} - a_{k-2}}{2} = \frac{b_0 - a_0}{2^k}$$

Deve-se obter o valor de k , tal que $b_k - a_k < \varepsilon_s$, ou seja:

$$\frac{b_0 - a_0}{2^k} < \varepsilon_s \rightarrow 2^k > \frac{b_0 - a_0}{\varepsilon_s} \rightarrow k \log(2) > \log(b_0 - a_0) - \log(\varepsilon_s)$$

$$\therefore k > \frac{\log(b_0 - a_0) - \log(\varepsilon_s)}{\log(2)}$$

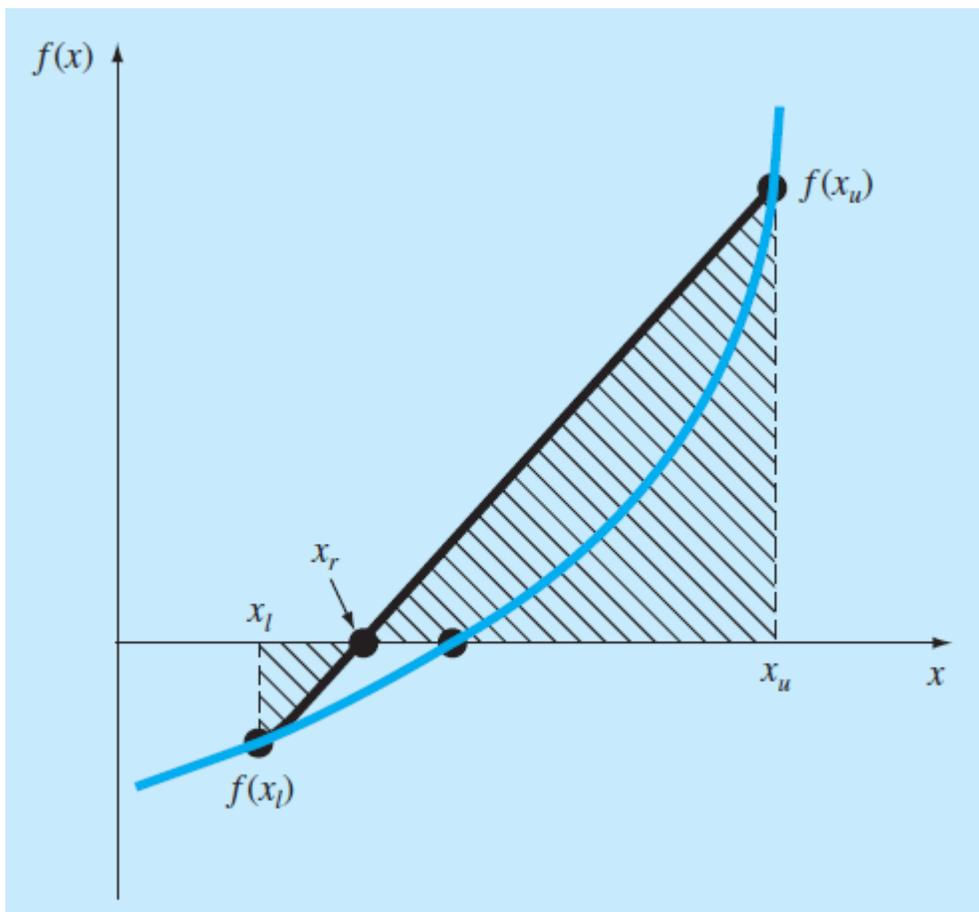
Portanto, se k satisfaz a equação acima, ao final da iteração k tem-se o intervalo $[a_k, b_k]$, que contém a raiz x_k , tal que $\forall x \in [a_k, b_k] \rightarrow |x - x_r| \leq b_k - a_k < \varepsilon_s$

2.1.3 – Método da Falsa Posição

Embora o método da **bisseccção** seja uma técnica perfeitamente **válida** para determinar raízes, sua abordagem do tipo “**força bruta**” é relativamente ineficiente. A falsa posição é uma alternativa baseada na **percepção gráfica**.

Uma deficiência do método da bissecção é que, na divisão do intervalo de x_l a x_u em metades iguais, não são levados em consideração os módulos de $f(x_l)$ e $f(x_u)$. Por exemplo, se $f(x_l)$ estiver mais próximo de zero que $f(x_u)$, será provável que a raiz esteja mais próxima de x_l do que de x_u . Um método alternativo que explora essa percepção gráfica é **ligar $f(x_l)$ e $f(x_u)$ por uma reta**. A intersecção dessa reta com o eixo x representa uma estimativa melhorada da raiz. O fato de a substituição da curva por uma reta dar uma “**falsa posição**” da raiz é a origem do nome.

2.1.3 – Método da Falsa Posição



Utilizando a semelhança de triângulos, a intersecção da reta com o eixo x pode ser calculado por:

$$\frac{f(x_l)}{x_r - x_l} = \frac{f(x_u)}{x_r - x_u}$$

que, pode ser reescrita como:

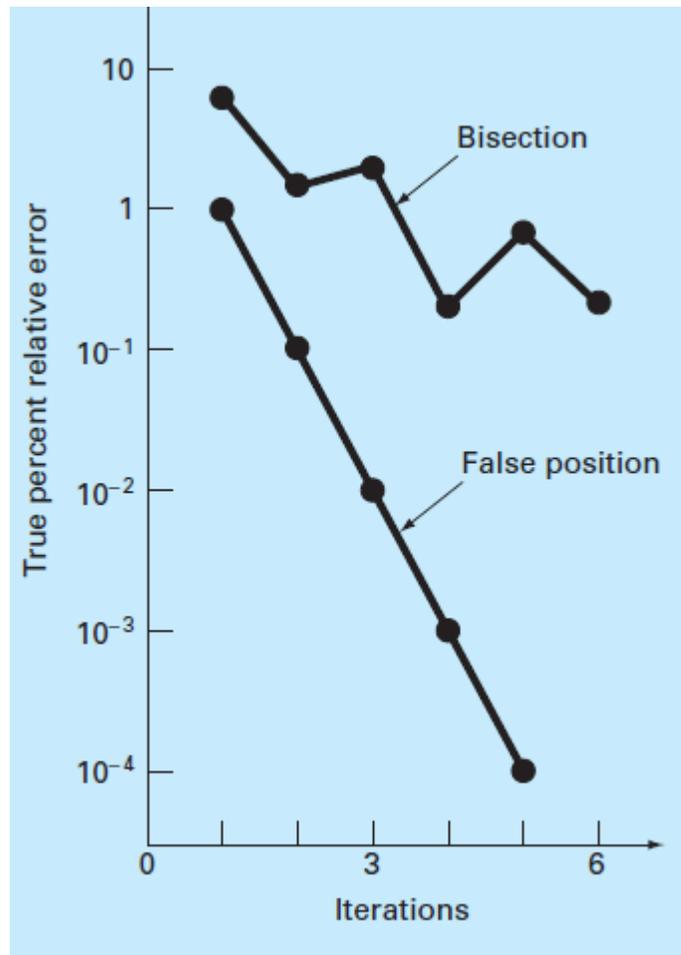
$$x_r = x_u - \frac{f(x_u)(x_l - x_u)}{f(x_l) - f(x_u)}$$

2.1.3 – Método da Falsa Posição

A equação anterior é a fórmula do Método da Falsa Posição. O valor de x_r calculado **substitui**, então, qualquer das duas aproximações iniciais x_l ou x_u que forneça o **mesmo sinal que $f(x_r)$** . Dessa forma, os **valores de x_l e x_u sempre delimitam a raiz verdadeira**. O processo é **repetido** até que a raiz seja estimada adequadamente.

Embora um método como o da Falsa Posição seja **quase sempre superior à bissecção**, invariavelmente há casos que violam essas conclusões gerais. Uma das grandes fraquezas do método da falsa posição é que ele é **unilateral**, ou seja, conforme as iterações continuam, uma das extremidades do intervalo terá a tendência de permanecer fixa. Isso pode levar à **convergência insatisfatória**, particularmente para funções com **curvatura significativa**.

2.1.3 – Método da Falsa Posição



Comparação dos erros relativos entre os métodos da bissecção e o da falsa posição

2.1.3 – Método da Falsa Posição

Exemplo: Considere a mesma equação apresentada anteriormente (em um exemplo), ou seja:

$$f(c) = \frac{667,38}{c} [1 - e^{-0,146843c}] - 40$$

Determine, pelos métodos da Bisseção e Falsa Posição, a raiz (zero) da função, empregando como critério de parada uma tolerância $\varepsilon_s = 0,5\%$. Inicialmente, empregue como limites do intervalo de cálculo os valores de $c = 12$ e $c = 16$.

2.1.3 – Método da Falsa Posição

Exemplo: Empregue o método da Bissecção e o método da Falsa Posição para localizar a raiz de $f(x) = x^{10} - 1$, entre $x = 0$ e $x = 1,3$.