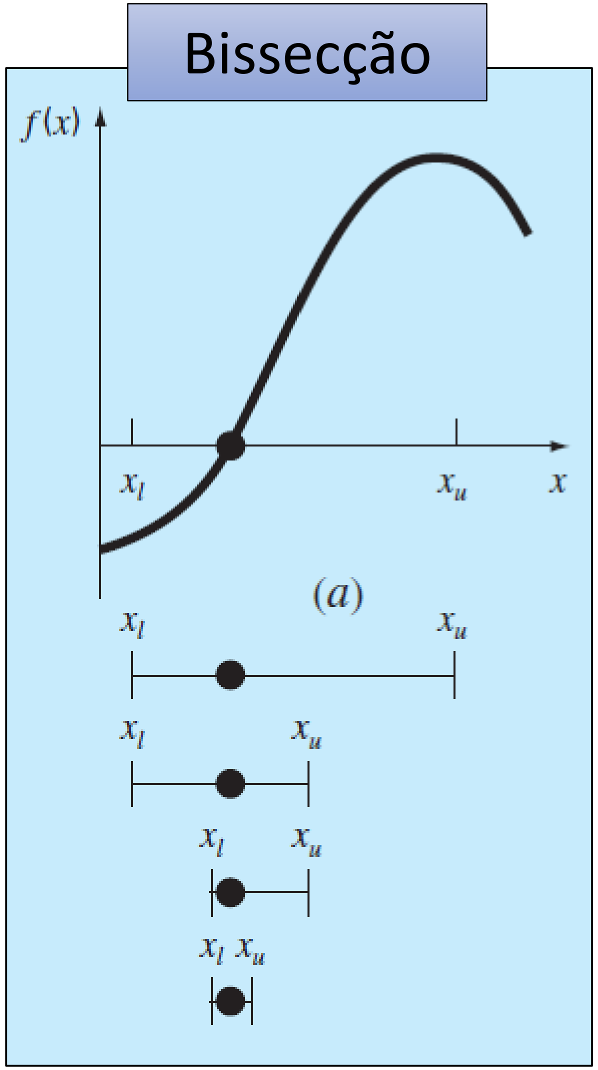
# TMEC001 - CÁLCULO NUMÉRICO

## CAPÍTULO 02 – SOLUÇÕES NUMÉRICAS DE EQUAÇÕES DE UMA VARIÁVEL

*Prof. Felipe R. Loyola*
*Disciplina: Cálculo Numérico*
*1º Semestre de 2020*

# 2.2 Métodos Abertos

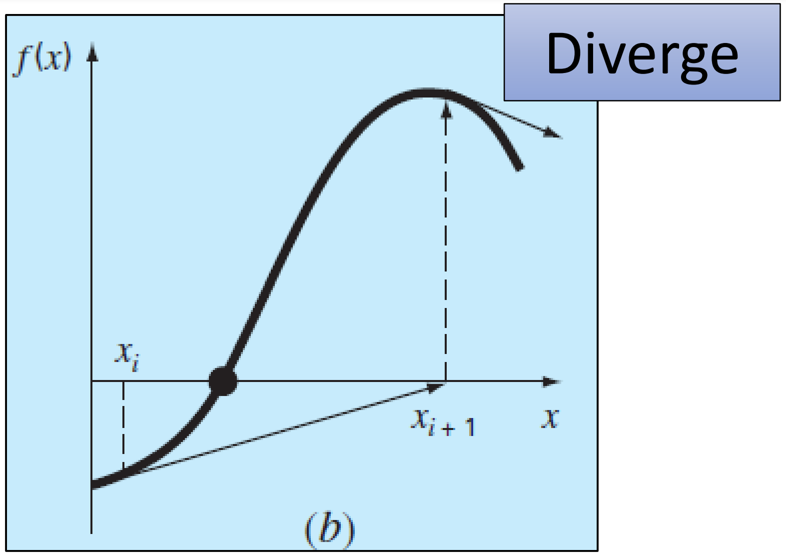
# 2.2 – Métodos Abertos

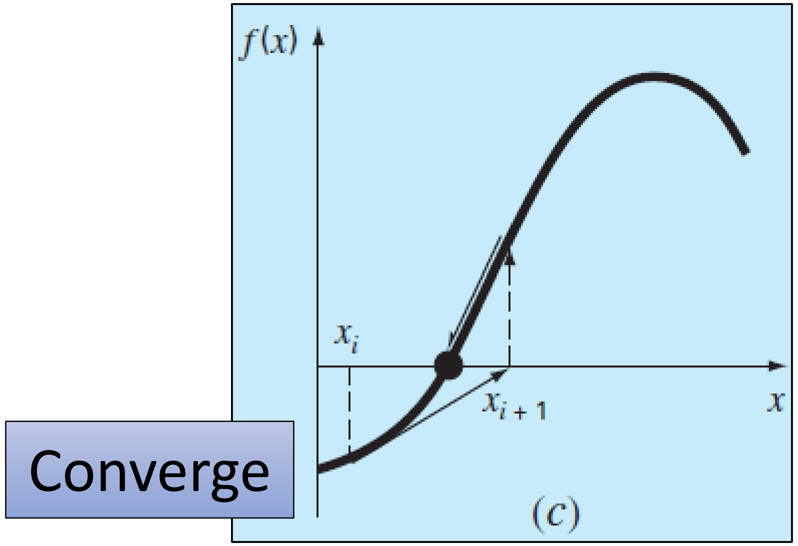



- Nos métodos intervalares, a raiz era localizada dentro de um intervalo prescrito por um limitante inferior e superior. As aplicações repetidas desses métodos sempre resultam em estimativas mais próximas do valor verdadeiro da raiz. Tais métodos são ditos convergentes porque se aproximam da raiz verdadeira à medida que os cálculos prosseguem.

# 2.2 – Métodos Abertos

- Em contraste, os <u>métodos abertos</u> são baseados em fórmulas que exigem apenas um único valor inicial de x ou dois valores iniciais que não delimitam necessariamente a raiz. Como tal, em algumas vezes divergem ou se afastam da raiz verdadeira à medida que os cálculos prosseguem. Quando os métodos abertos convergem, entretanto, eles em geral o fazem muito mais rapidamente que os métodos intervalares.



# 2.2.1 – Iteração de ponto fixo simples

- Como mencionado anteriormente, os métodos abertos usam uma fórmula para prever a raiz. Tal fórmula pode ser reduzida para a iteração de ponto fixo simples (ou também chamada de iteração de um ponto, substituições sucessivas ou aproximações sucessivas) reescrevendo a equação $f(x) = 0$ de modo que x esteja isolado no lado esquerdo da equação:

$$x = g(x) \tag{01}$$

# 2.2.1 – Iteração de ponto fixo simples

- Pode-se conseguir essa transformação ou por manipulação algébrica ou simplesmente somando x em ambos os lados da equação original. A utilidade da equação anterior (01) é que ela fornece uma fórmula para prever um novo valor de x e função de um valor x anterior. Portanto, dada uma aproximação inicial para a raiz $x_i$, a equação anterior pode ser usada para calcular uma nova estimativa $x_{i+1}$, expressa pela fórmula iterativa.

$$x_{i+1} = g(x) \tag{02}$$

# 2.2.1 – Iteração de ponto fixo simples

- **Exemplo**: Usar o Método da Iteração de Ponto Fixo para localizar a raiz de:

$$f(x) = e^x - x$$

**Solução**: A função pode ser separada diretamente na forma da equação (02)

$$x_{i+1} = e^{-x_i} \tag{02}$$

| $i$ | $x_i$ | $\varepsilon_a$ (%) | $\varepsilon_t$ (%) |
|---|---|---|---|
| 0 | 0 | | 100.0 |
| 1 | 1.000000 | 100.0 | 76.3 |
| 2 | 0.367879 | 171.8 | 35.1 |
| 3 | 0.692201 | 46.9 | 22.1 |
| 4 | 0.500473 | 38.3 | 11.8 |
| 5 | 0.606244 | 17.4 | 6.89 |
| 6 | 0.545396 | 11.2 | 3.83 |
| 7 | 0.579612 | 5.90 | 2.20 |
| 8 | 0.560115 | 3.48 | 1.24 |
| 9 | 0.571143 | 1.93 | 0.705 |
| 10 | 0.564879 | 1.11 | 0.399 |

# 2.2.1 – Iteração de ponto fixo simples

<u>Convergência</u>

- Tomando-se a equação iterativa do método

$$x_{i+1} = g(x_i) \tag{03}$$

e supondo-se que a solução verdadeira seja

$$x_r = g(x_r) \tag{04}$$

ao se subtrair as equações obtém-se

$$x_r - x_{i+1} = g(x_r) - g(x_i) \tag{05}$$

- O Teorema do Valor Médio para derivadas afirma que , se a função g(x) e a sua primeira derivada forem contínuas sobre um intervalo a ≤ x ≤ b, então existe pelo menos um valor de x = ξ dentro do intervalo tal que:

$$g(\xi) = \frac{g(b) - g(a)}{b - a} \tag{06}$$

# 2.2.1 – Iteração de ponto fixo simples

- O lado direito dessa equação é a inclinação da reta ligando $g(a)$ e $g(b)$. Logo, o Teorema do Valor Médio afirma que existe um ponto entre a e b que tem uma inclinação denotada por $g'(\xi)$ que é paralela à reta ligando $g(a)$ a $g(b)$. Fazendo-se, então, $a = x_i$ e $b = x_r$, o lado direito da equação anterior (06) pode ser expresso como:

$$g(x_r) - g(x_i) = (x_r - x_i)g'(\xi) \qquad (07)$$

- Se o erro verdadeiro para a i-ésima iteração for definido por

$$E_{t,i} = x_r - x_i \qquad (08)$$

- Então a equação acima torna-se:

$$E_{t,i+1} = g'(\xi)E_{t,i} \qquad (09)$$

# 2.2.1 – Iteração de ponto fixo simples

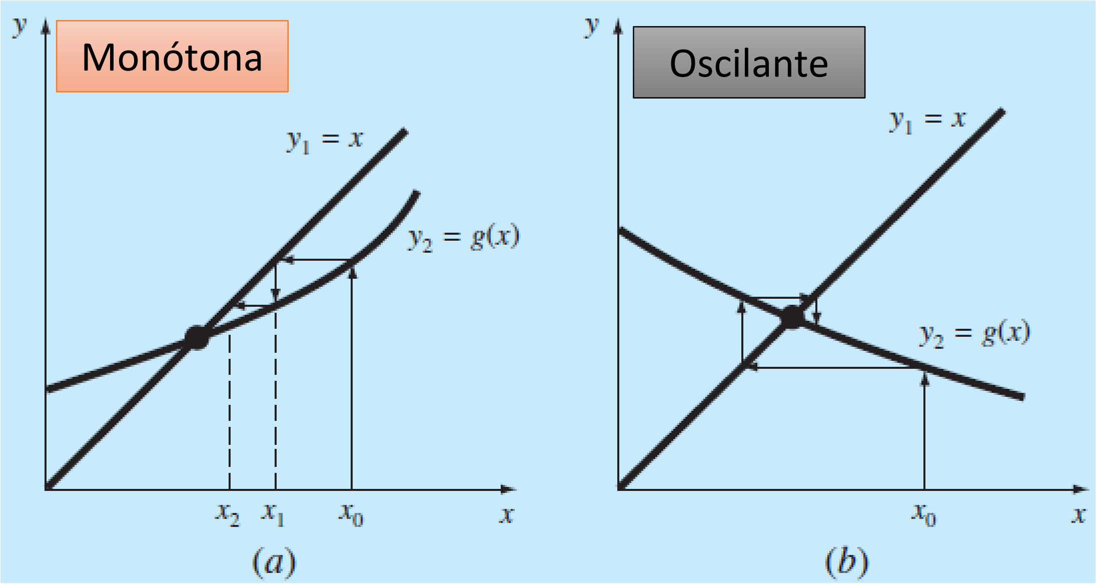
- Consequentemente, se $|g'(\xi)| < 1$, os erros diminuem a cada iteração. Para $|g'(\xi)| > 1$, o erro cresce. Observa-se também que, se a derivada for positiva, os erros serão positivos e, portanto, a solução será monótona; se a derivada for negativa os erros oscilarão.

- Um desdobramento da análise é que ela também demonstra que, quando o método converge, o erro é aproximadamente proporcional e inferior ao erro no passo anterior. Por essa razão, a iteração do ponto fixo é dita linearmente convergente.

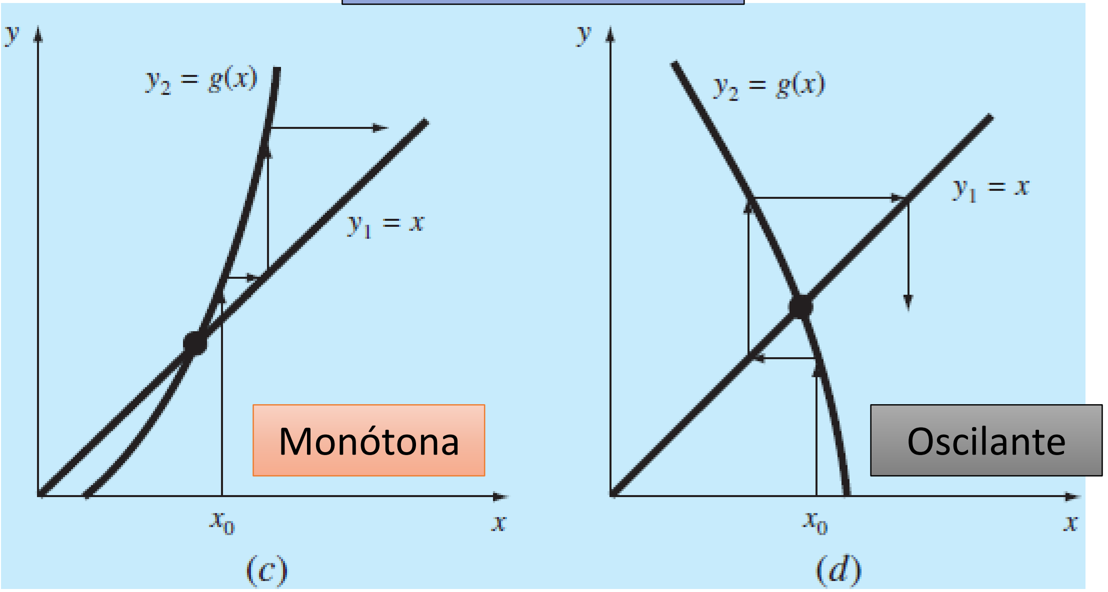
# 2.2.1 – Iteração de ponto fixo simples

- A descrição gráfica da convergência e da divergência do método do ponto fixo é feita com o auxílio do método gráfico das duas curvas. Neste caso, se $f_1(x) = f_2(x)$, pode-se separar a equação em duas componentes: $y_1 = f_1(x)$ e $y_2 = f_2(x)$. Neste caso, os valores de x correspondentes às intersecções dessas funções representam as raízes da função original.

Convergentes




Divergentes



# 2.2.1 – Iteração de ponto fixo simples

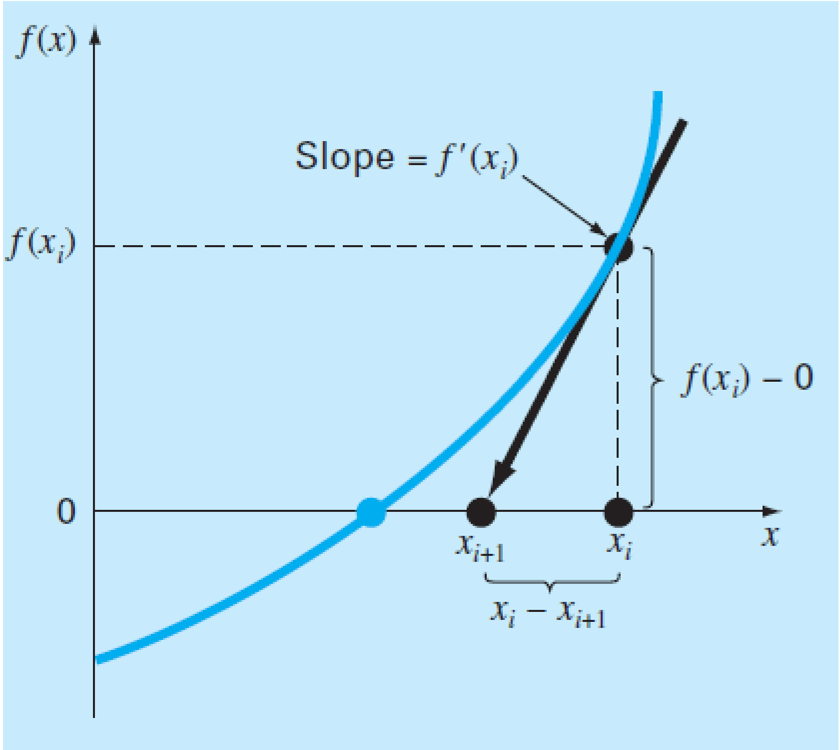
## Algoritmo do Método de Iteração de Ponto Fixo

```
FUNCTION Fixpt(x0, es, imax, iter, ea)
  xr = x0
  iter = 0
  DO
    xrold = xr
    xr = g(xrold)
    iter = iter + 1
    IF xr ≠ 0 THEN
      ea = |(xr − xrold) / xr| · 100
    END IF
    IF ea < es OR iter ≥ imax EXIT
  END DO
  Fixpt = xr
END Fixpt
```

$$ea = \left|\frac{xr - xrold}{xr}\right| \cdot 100$$

# 2.2.2 – O Método do Newton-Raphson

- Talvez seja a fórmula mais amplamente utilizada para localizar um zero de função seja a equação de Newton-Raphson. Se a aproximação inicial da raiz for $x_i$, pode-se estender uma reta tangente a partir do ponto $[x_i, f(x_i)]$. O ponto onde essa tangente cruza o eixo x usualmente representa uma estimativa melhorada da raiz



# 2.2.2 – O Método do Newton-Raphson

- O método de Newton-Raphson pode ser deduzido com base em sua interpretação geométrica (ou alternativamente, empregando-se a série de Taylor). Graficamente, a primeira derivada em x é equivalente a:

$$f'(x_i) = \frac{f(x_i) - 0}{x_i - x_{i+1}} \qquad (10)$$

que pode ser reorganizada para fornecer

$$x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)}{f'(x_i)} \qquad (11)$$

A equação acima é chamada de fórmula de Newton-Raphson.

# 2.2.2 – O Método do Newton-Raphson

- Alternativamente, empregando-se a série de Taylor, tem-se:

$$f(x_{i+1}) = f(x_i) + f'(x_i)(x_{i+1} - x_i) + \frac{f''(\xi)}{2!}(x_{i+1} - x_i)^2 \qquad (12)$$

onde ξ está em algum ponto do intervalo de $x_i$ a $x_{i+1}$. Uma versão aproximada é obtida truncando-se a série após o termo da primeira derivada:

$$f(x_{i+1}) \approx f(x_i) + f'(x_i)(x_{i+1} - x_i) \qquad (13)$$

# 2.2.2 – O Método do Newton-Raphson

A equação (13) pode ser reescrita como

$$x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)}{f'(x_i)} \tag{14}$$

que é idêntica à fórmula de Newton-Raphson (11). Além da dedução, a série de Taylor também pode ser usada para realizar uma estimativa do erro da fórmula, o que se consegue percebendo que, se a série de Taylor completa fosse empregada, seria obtido um resultado exato.

# 2.2.2 – O Método do Newton-Raphson

- Nessa situação, $x_{i+1} = x_r$, na qual $x_r$ é o valor verdadeiro da raiz. Substituindo essa valor junto com $f(x_r) = 0$ na equação (12) obtém-se:

$$0 = f(x_i) + f'(x_i)(x_r - x_i) + \frac{f''(\xi)}{2!}(x_r - x_i)^2 \qquad (15)$$

- A equação  (13) pode ser substituída da equação (15) fornecendo:

$$0 = f'(x_i)(x_r - x_{i+1}) + \frac{f''(\xi)}{2!}(x_r - x_i)^2 \qquad (16)$$

# 2.2.2 – O Método do Newton-Raphson

## Erros no Método de Newton-Raphson

- Percebendo-se que o erro é igual à discrepância entre $x_{i+1}$ e o valor verdadeiro de $x_r$, como em

$$E_{t,i+1} = x_r - x_{i+1} \tag{17}$$

tem-se que a equação (16) pode ser expressa por:

$$0 = f'(x_i)E_{t,i+1} + \frac{f''(\xi)}{2!}\left(E_{t,i}\right)^2 \tag{18}$$

# 2.2.2 – O Método do Newton-Raphson

- Supondo–se a convergência, ambos os valores de xi e ξ deveriam eventualmente ser aproximados pela raiz $x_r$ e a equação (18) pode ser reorganizada para fornecer

$$E_{t,i+1} = \frac{-f''(x_r)}{2f'(x_r)}\left(E_{t,i}\right)^2 \qquad (19)$$

- De acordo com a equação acima, o erro é aproximadamente proporcional ao quadrado do erro anterior. Isso significa que o número de casas decimais corretas aproximadamente dobra a cada iteração tem comportamento é chamado de convergência quadrática.

# 2.2.2 – O Método do Newton-Raphson

## Armadilhas do método de Newton-Raphson

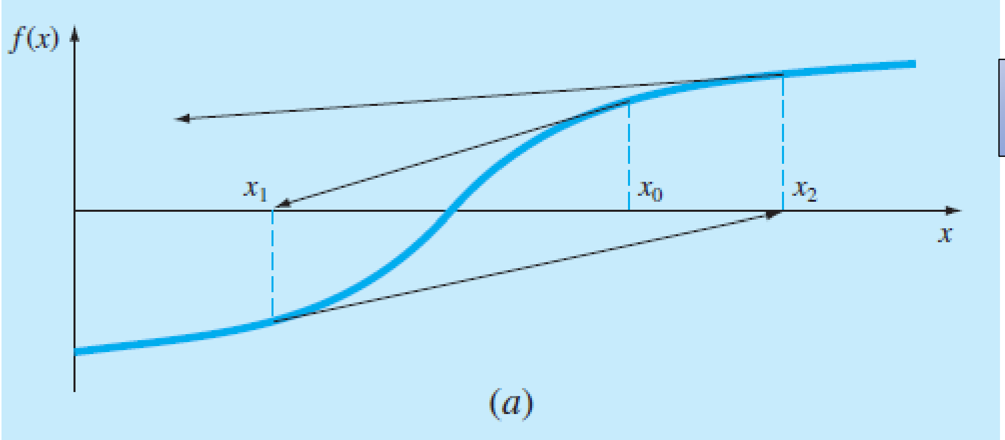
- Embora o método de Newton-Raphson seja em geral muito eficiente, há situações nas quais ele apresenta um desempenho insatisfatório. O ponto em comum de todas as situações, contudo, é o fato de a derivada da função f(x) ser nula ou apresentar um valor próximo a zero. Citam-se como exemplos dessas situações:

i. Raízes múltiplas

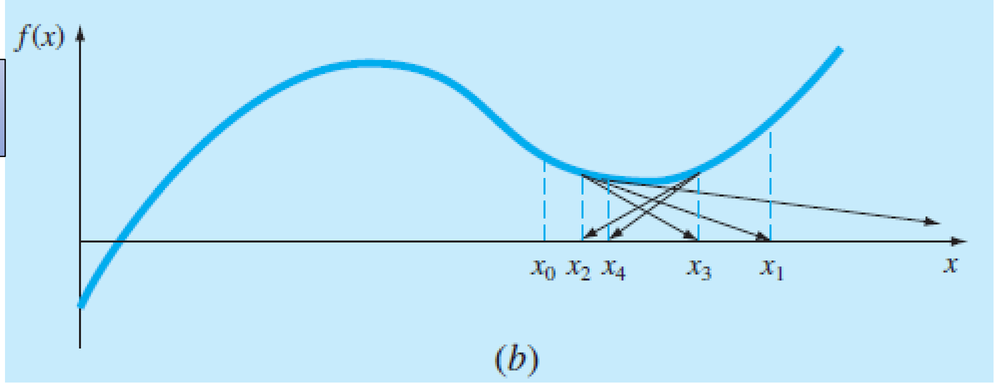
ii. Proximidades de pontos de inflexão

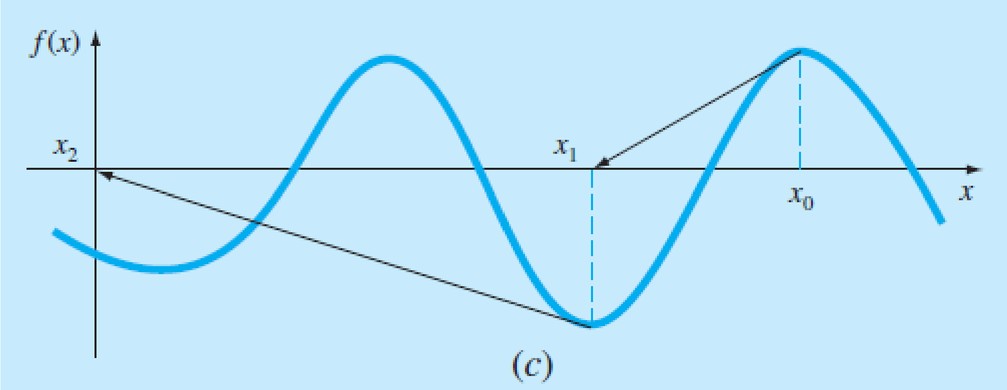
iii. Proximidades de máximos ou mínimos (globais ou locais)

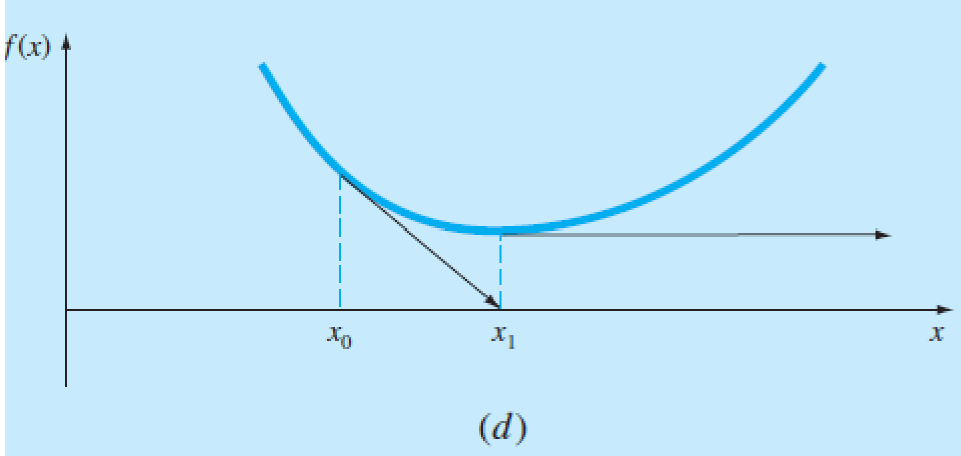
# 2.2.2 – O Método do Newton-Raphson




Exemplos



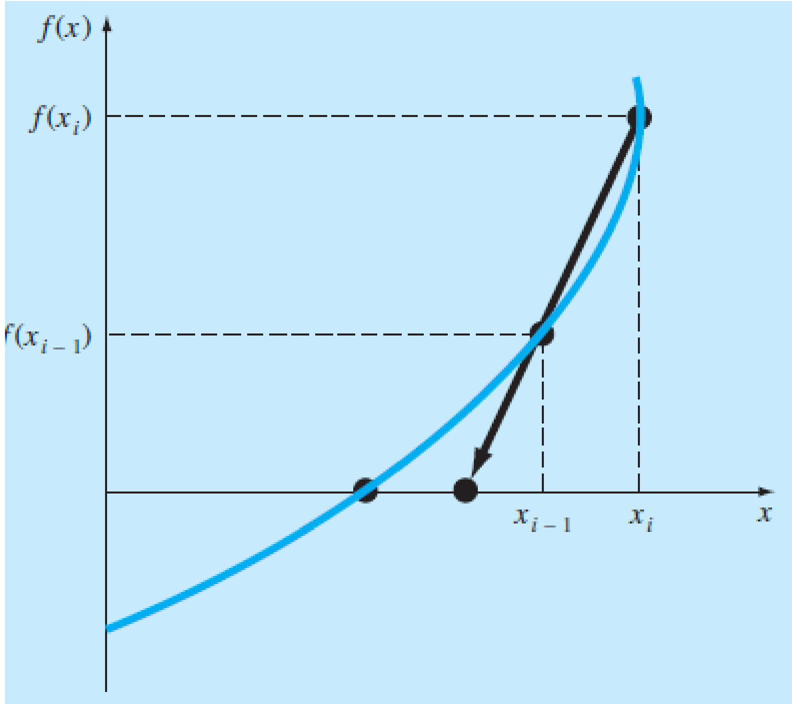

- Não existe critério geral de convergência para o método de Newton-Raphson. Sua convergência depende da natureza da função e da precisão da aproximação inicial Deve-se, assim, garantir que a aproximação inicial esteja “suficientemente” próxima da raiz, embora para algumas funções nenhuma aproximação funcionará.

# 2.2.3 – O Método da Secante

- Um problema em potencial na implementação do método de Newton-Raphson é o cálculo da derivada. Embora isso não seja inconveniente para muitas funções, como polinômios, para outras o cálculo das derivadas pode ser extremamente inconveniente ou difícil. Nesses casos, a derivada pode ser aproximada por uma diferença dividida regressiva, como em:

$$f'(x_i) \approx \frac{f(x_{i-1}) - f(x_i)}{x_{i-1} - x_i} \tag{20}$$

# 2.2.3 – O Método da Secante




- Essa aproximação pode ser substituída na equação (11) para fornecer a seguinte equação iterativa

$$x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)(x_{i-1} - x_i)}{f(x_{i-1}) - f(x_i)} \qquad (21)$$

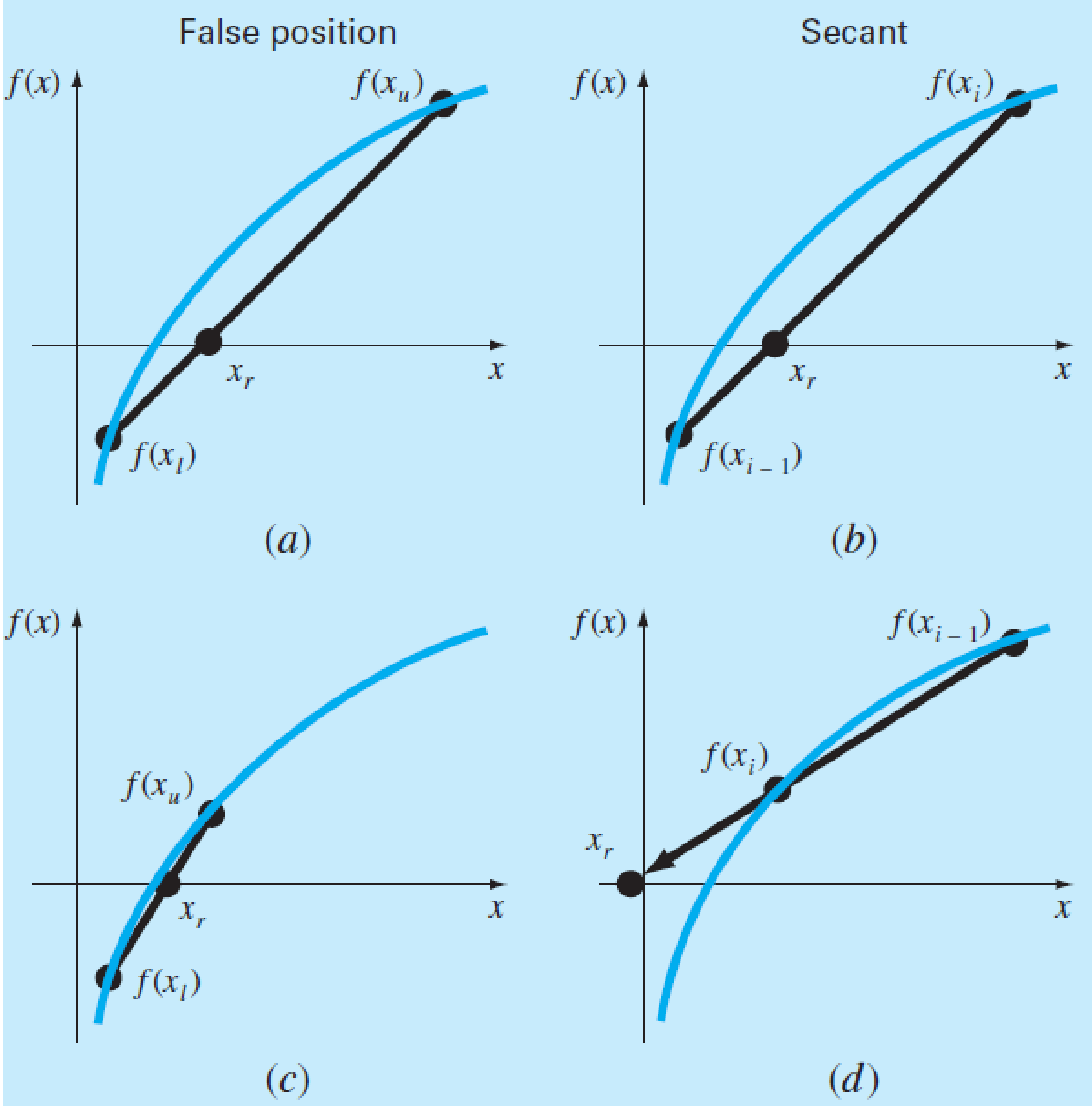
A equação acima é a fórmula do Método da Secante. Deve-se notar que a abordagem exige duas estimativas iniciais de x. Porém, como não é exigido que f(x) mude de sinal entre as estimativas, ele não é classificado como um método intervalar.

# 2.2.3 – O Método da Secante

**Diferença entre os métodos da secante e falsa posição**

- Comparando-se as equações iterativas dos métodos da falsa posição e da secante, observa-se que as mesmas são idênticas em ambos os casos, são utilizadas duas estimativas iniciais para calcular uma aproximação da inclinação da função que é utilizada para projetar para o eixo x uma nova estimativa da raiz. Entretanto, uma diferença crítica entre os métodos é a forma com que um dos valores iniciais é substituído pela nova estimativa. Enquanto no método da falsa posição garante-se que as duas estimativas empregadas sempre delimitam a raiz, no método da secante há a substituição dos valores em sequência escrita, isto é, o novo valor $x_{i+1}$ substitui $x_i$ e o valor de $x_i$ substitui $x_{i-1}$. Em certos casos, isso pode levar à divergência.

# 2.2.3 – O Método da Secante




- Embora o método da secante possa ser divergente, quando ele converge, usualmente, o faz a uma taxa mais rápida do que o método da falsa posição. A inferioridade do método da falsa posição resulta de uma extremidade permanecer fixa para continuar a limitar a raiz. Essa propriedade, que é vantajosa do ponto de vista de impedir a divergência, é uma desvantagem com relação à taxa de convergência.

# 2.2.4 – Raízes Múltiplas

- Uma raiz múltipla corresponde a um ponto onde a função é tangente ao eixo x. Isso causa algumas dificuldades para muitos métodos numéricos:

i. O fato de a função não mudar de sinal em raízes de multiplicidade par **impede** o uso dos métodos intervalares confiáveis, de modo que a análise deve recair nos métodos abertos, sujeitos à divergência.

ii. Um outro problema possível está relacionado ao fato de que não só f(x), mas também f’(x) vai a zero na raiz. Isso introduz problemas tanto no método de Newton-Raphson quanto no da secante, uma vez que ambos contem a derivada (ou sua estimativa) no denominador. Uma forma simples de contornar esse problema baseia-se no fato de que f(x) sempre atingirá zero antes de f’(x). Portanto, se uma verificação do zero for incluída no programa, os cálculos podem ser parados antes de f’(x) atingir zero.

# 2.2.4 – Raízes Múltiplas

iii. É possível demonstrar que os métodos de Newton-Raphson e da secante são linearmente (ao invés de quadraticamente) convergentes para raízes múltiplas. Foram propostas formas alternativas (modificadas) para contornar tal problema, como empregar as seguintes formulações:

$$x_{i+1} = x_i - m\frac{f(x_i)}{f'(x_i)} \tag{22}$$

onde m é a multiplicidade da raiz, ou ainda

$$x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)f'(x_i)}{[f'(x_i)]^2 - f(x_i)f''(x_i)} \tag{23}$$

entre outras expressões

# 2.2 – Exemplos

- **Exemplo**: Considere a equação

$$f(c) = \frac{667{,}38}{c}\left[1 - e^{-0{,}146843c}\right] - 40$$

solucionada anteriormente pelos métodos da bissecção e da falsa posição. Resolva-a também utilizando os métodos do ponto fixo, Newton-Raphson e secante, empregando como critério de parada $\varepsilon_a = 0{,}5\%$. Como estimativa inicial para os métodos de Newton-Raphson e do ponto fixo empregue $x_0 = 12$, no caso do método da secante, utilize $x_0 = 12$ e $x_1 = 16$.

# 2.2 – Exemplos

- **Exemplo**: Determine a raiz positiva de:

$$f(x) = x^{10} - 1$$

Empregando os métodos da bissecção, da falsa posição, de Newton-Raphson e da secante. Empregue o intervalo inicial [0 ; 1,5] para os métodos da bissecção e da falsa posição, a estimativa inicial $x_0$ = 0,01 para o método de Newton-Raphson e os valores de $x_0$= 0 e $x_1$=1,5 para o método da secante. Em todos os casos, empregue uma tolerância de $10^{-12}$.