TMEC001 - CÁLCULO NUMÉRICO

CAPÍTULO 03 – EQUAÇÕES LINEARES ALGÉBRICAS

Prof. Felipe R. Loyola

Disciplina: Cálculo Numérico

1º Semestre de 2020

3.0 Sistemas Lineares e Notações Matriciais

3.0.1 Motivação

- No capítulo anterior, determinamos o valor de x que satisfazia a equação $f(x) = 0$. Agora, iremos trabalhar na obtenção dos valores $x_1, x_2, \ldots, x_n$ que resolvem simultaneamente as equações abaixo:

$$
\begin{gathered}
f_1(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0 \\
f_2(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0 \\
\vdots \\
f_n(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0
\end{gathered}
\tag{01}
$$

3.0.1 Motivação

- Em um sistema de equações algébricas lineares, tal conjunto de equações é representado da seguinte forma:

$$
\begin{gathered}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_n \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_n \\
\vdots \\
a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n
\end{gathered}
\qquad (02)
$$

3.0.2 Revisão Matemática

- **Notação matricial**:

Uma matriz consiste em um arranjo retangular de elementos representados por um único símbolo:

$$[A] = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{13} & a_{23} & & a_{2m} \\ & \vdots & & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nm} \end{bmatrix}$$

Um conjunto horizontal de elementos é chamado de linha e o vertical de coluna. Atribui-se o subscrito *i* pelo número da linha e o subscrito *j* pelo número da coluna.

Para uma matriz com n linhas e m colunas chama-se de matriz com dimensão *n* x *m* ou matriz *n* por *m*.

Uma matriz com n = 1, é chamada de vetor linha e uma matriz com m = 1 é chamada de vetor coluna. Por fim, uma matriz em que n = m é chamada de matriz quadrada.

3.0.2 Revisão Matemática

- **Tipos especiais de matrizes quadradas**

Chama-se de matriz simétrica uma matriz quadrada onde $a_{ij} = a_{ji}$ para todos *i*'s e *j*'s, como por exemplo:

$$[A] = \begin{bmatrix} 5 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 7 \\ 2 & 7 & 8 \end{bmatrix}$$

Uma matriz diagonal é uma matriz quadrada onde todos os elementos externos à diagonal principal são nulos, assim:

$$[A] = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_{44} \end{bmatrix}$$

Uma matriz identidade é uma matriz diagonal onde todos os elementos da diagonal principal tem valor unitário, logo:

$$[I] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

3.0.2 Revisão Matemática

O símbolo [I] é usado para denotar uma matriz identidade.

Uma matriz triangular superior é aquela onde todos os elementos abaixo da diagonal principal são nulos, assim:

$$[A] = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ 0 & 0 & a_{33} & a_{34} \\ 0 & 0 & 0 & a_{44} \end{bmatrix}$$

Similarmente, uma matriz triangular inferior é aquela onde todos os elementos acima da diagonal principal são nulos, logo:

$$[A] = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & 0 \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix}$$

Por fim, uma matriz de banda tem todos os elementos nulos, com exceção da banda centrada na diagonal principal, como por exemplo a matriz de banda 3 abaixo, também chamada de matriz tridiagonal:

$$[A] = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{22} & 0 \\ 0 & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ 0 & 0 & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix}$$

3.0.2 Revisão Matemática

- **Regras de operação com matrizes**

- Seja a soma de uma matriz $[A]$ com a matriz $[B]$, ambas com dimensão n x m., e com elementos a_{ij} e b_{ij}, respectivamente. A matriz resultante $[C]$ tem como elementos (c_{ij}) a soma dos elementos das matrizes mencionadas. Logo:

$$c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$$

para $i = 1,2, \dots, n$ e $j = 1,2, \dots, m$. Similarmente, a subtração de duas matrizes, $[E]$ menos $[F]$ por exemplo, a matriz resultante $[D]$ é obtida pela subtração dos elementos correspondentes:

$$d_{ij} = e_{ij} + f_{ij}$$

para $i = 1,2, \dots, n$ e $j = 1,2, \dots, m$.

Cita-se como propriedades da soma e da subtração:

Ambas são comutativas, logo:

$$[A] + [B] = [B] + [A]$$

Ambas são associativas, então:

$$([A] + [B]) + [C] = [A] + ([B] + [C])$$

3.0.2 Revisão Matemática

- **Regras de operação com matrizes**

A multiplicação de uma matriz $[A]$ por um escalar g é obtida pela multiplicação de cada elemento de $[A]$ por g, assim:

$$[A] = \begin{bmatrix} ga_{11} & ga_{12} & \dots & ga_{1n} \\ ga_{21} & ga_{22} & \dots & ga_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & a_{3n} \\ ga_{n1} & ga_{n2} & \cdots & a_{4n} \end{bmatrix}$$

A matriz resultante do produto de duas matrizes, $[C] = [A][B]$ tem seus elementos definidos por:

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}\, b_{kj}$$

onde n é o número de colunas da matriz $[A]$ e o número de linhas da matriz $[B]$. Esse produto só poderá ocorrer quando a condição de que o número de colunas da matriz $[A]$ seja igual ao número de colunas da matriz $[B]$ for satisfeita. Assim, se a matriz $[A]$ tiver dimensões n x m e a matriz $[B]$ for m x l, a matriz resultante $[C]$ terá dimensões n x l.

3.0.2 Revisão Matemática

- **Regras de operação com matrizes**

Caso as dimensões das matrizes sejam adequadas, a multiplicação de matrizes é associativa

$$([A][B])[C] = [A]([B][C])$$

e distributiva

$$[A]([B] + [C]) = [A][C] + [B][C]$$

Entretanto, a multiplicação de matrizes geralmente não é comutativa

$$[A][B] \neq [B][A]$$

Embora a multiplicação de matrizes seja possível, a divisão de matrizes não é uma operação definida.

3.0.2 Revisão Matemática

Se a matriz $[A]$ for quadrada e não-singular, existe uma matriz $[A]^{-1}$ chamada de matriz inversa de $[A]$, em que:

$$[A][A]^{-1} = [A]^{-1}[A] = [I]$$

Logo, a multiplicação de uma matriz por sua inversa é análoga à divisão, levando-se em conta que um número dividido por ele mesmo é igual a 1.

Seja uma matriz $[A]$, de dimensões 4x4, do tipo:

$$[A] = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{33} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix}$$

A operação de transposição das linhas em colunas e colunas em linhas resulta em sua matriz transposta. A transposta da matriz acima é exemplificada como:

$$[A]^T = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} & a_{41} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} & a_{42} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} & a_{43} \\ a_{14} & a_{24} & a_{24} & a_{44} \end{bmatrix}$$

em outras palavras, os elementos a_{ij} de uma matriz, representam os elementos a_{ji} da sua matriz transposta equivalente.

3.0.2 Revisão Matemática

O traço de uma matriz é dado pela soma dos elementos da sua diagonal principal, sendo definido por $\mathrm{tr}[A]$ e computado por:

$$\mathrm{tr}[A] = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}$$

O traço de uma matriz é usado nos cálculos de seus autovalores.

Por fim, uma última manipulação de matrizes a ser mencionada seria a matriz aumentada. Essa operação é realizada pela adição de coluna(s) a uma matriz. Por exemplo, seja a matriz de dimensões 3x3 abaixo:

$$[A] = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

Podemos aumentar a matriz acima com uma matriz identidade resultando em uma matriz de dimensões 3 x 6. O resultado é expresso por:

$$[A] = \left[\begin{array}{ccc|ccc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & 1 & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & 0 & 1 & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

3.0.3 Representação de Sistemas Lineares em forma matricial

Um sistema linear pode ser expresso pela equação:

$$[A]\{X\} = \{B\}$$

onde $[A]$ é a matriz quadrada de coeficientes da forma:

$$[A] = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{13} & a_{23} & & a_{2m} \\ & \vdots & & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nm} \end{bmatrix}$$

$\{B\}$ é um vetor coluna de constantes com dimensões n x 1

$$\{B\}^T = [b_1 \quad b_2 \quad \ldots \quad b_n]$$

e $\{X\}$ é o vetor coluna de variáveis:

$$\{X\}^T = [x_1 \quad x_2 \quad \ldots \quad x_n]$$

3.0.3 Representação de Sistemas Lineares em forma matricial

Uma forma de se obter a solução do sistema através da obtenção das variáveis do vetor $\{X\}$ é multiplicar cada lado da equação pela matriz inversa de $[A]$. Assim

$$[A]^{-1}[A]\{X\} = [A]^{-1}\{B\}$$

Logo, a equação se torna:

$$\{X\} = [A]^{-1}\{B\}$$

Como a obtenção de uma matriz inversa não é algo tão simples de se fazer, os métodos numéricos serão úteis através dos recursos computacionais para se obter os valores das variáveis do vetor $\{X\}$ que resolvem o sistema linear algébrico.