UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ

CURSO DE ENGENHARIA MECÂNICA

TMEC-001 Cálculo Numérico

Professor **Luciano Kiyoshi Araki**
(sala 7-30/Lena-2, lucianoaraki@gmail.com, fone: 3361-3126)

Internet: http://ftp.demec.ufpr.br/disciplinas/TMEC001/Prof.Luciano_Araki

LISTA DE EXERCÍCIOS 01

1. Obtenha o polinômio de Taylor de grau três (três primeiros termos não nulos) $P_3(x)$, em torno de $x_0 = 0$, para as seguintes funções. Avalie, então, as funções, f(x), e os respectivos polinômios de Taylor, $P_3(x)$, para $x = 0{,}1$ e $x = 1$:
   (a) $f(x) = \sin(x)\cos(x)$
   (b) $f(x) = xe^x$
   (c) $f(x) = \tan(x)$

2. Use o Teorema de Taylor com n = 2 (dois termos) para provar que a desigualdade $1 + x < e^x$ é válida para todos os números reais, exceto x = 0

3. Considere a seguinte função:

$$f(x) = \begin{cases} 5x^2 + x - 10, & se\ x \le 2 \\ x^3 + 2x^2 + cx, & se\ x > 2 \end{cases}$$

(a) Determine o valor de *c* de modo que a função seja contínua em todo o domínio real.
(b) Calcule a derivada da função $f(x)$, empregando a definição de derivada, para todo o domínio real. Considere o valor de *c* calculado no item (a). A função $f'(x)$ resultante é contínua?

4. Encontre maneiras de evitar a perda de algarismos significativos nos cálculos a seguir:
(a) $\sqrt{x^2+1} - 1$
(b) $\log(x) - \log(y)$
(c) $\sinh(x) - \tanh(x)$

5. Conceitue:
(a) Overflow
(b) Underflow
(c) Perda de algarismos significativos
(d) Acurácia
(e) Precisão

6. Descreva os passos que constituem o método da bisseção. Para que situações o método da bisseção pode ser empregado?

7. Apresente as semelhanças e diferenças entre os métodos da bisseção e da falsa posição.

8. Como funciona o método de ponto fixo simples?

9. Quais as semelhanças e diferenças entre os métodos de Newton e da secante?

10. Encontre as raízes (zeros) das seguintes funções, nos intervalos dados, através dos métodos gráfico, da bisseção, da falsa posição, de Newton e da secante. Com base no resultado gráfico, determine intervalos para a possível solução, no caso do método da bisseção ou estimativa(s) inicial(is) para os métodos de Newton e da secante. Note que, para alguns casos, as funções tendem ao infinito para algum dos limites dos intervalos fornecidos. Realize 3 iterações para cada método.

a) $f(x) = x + \tan(x)$, $\left(\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right)$
b) $f(x) = \frac{\text{sen}(x)+\cos(x)}{x^2}$, $(0;\ 2\pi)$
c) $f(x) = e^x - \tan(x)$, $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$
d) $f(x) = e^x\text{sen}(x) - x^2 + 4$; $\left(\frac{\pi}{2};\ \pi\right)$

11. Considere as seguintes funções. Ao se empregar o método da bisseção, para qual das raízes (zeros) o método conduzirá?

a) $f(x) = (x-4)^4(x-3)(x+2)$, para $[0; 5]$.
b) $f(x) = (x-1)^3(x-2)(x-3)$, para $[0; 5]$.
c) $f(x) = (x-1)^3(x-2)(x-3)$, para $[0; 3{,}2]$.

12. Empregue os métodos da bisseção, falsa posição, Newton e secante para encontrar a raiz real da seguinte função: $f(x) = x^3 - 5x^2 + 4x - 20$. Para os métodos da bisseção e da falsa posição, empregue $[3, 6]$ como intervalo inicial. Para o método de Newton, utilize como estimativa inicial $x_0 = 3$ e, para o método da secante, as estimativas iniciais $x_0 = 3$ e $x_1 = 6$. Para a função fornecida, a raiz exata procurada é $x_r = 5$. De posse desse fato e de que, para um determinado método, sua ordem de convergência pode ser estimada através da expressão

$$p \approx \frac{\log\left|\frac{e_{k+1}}{e_k}\right|}{\log\left|\frac{e_k}{e_{k-1}}\right|}$$

onde o erro na k-ésima iteração (e_k) é dado por:

$$e_k = x_k - x_r$$

estime, também, as ordens de convergência para os métodos empregados. Sugestão: para a estimativa das ordens de convergência, implemente códigos computacionais, empregando precisão dupla (ou superior).

13. Como funciona o Método de Eliminação Gaussiana para um sistema de equações lineares?

14. Como funciona o Método da Decomposição/Fatoração LU para um sistema de equações lineares?

15. Como funciona os Métodos de Jacobi e de Gauss-Seidel para um sistema de equações lineares? Quais suas semelhanças e diferenças?

16. Solucione os sistemas a seguir empregando-se a Eliminação de Gauss.

a) $\begin{cases} 2x + 3y + 4z = 20 \\ x + y + z = 6 \\ 4x - y - 2z = -4 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 2x + y + z = 3 \\ -x - y - z = -1 \\ 6x - 2y + 4z = 14 \end{cases}$

17. Encontre a inversa das seguintes matrizes, através da decomposição LU:

a) $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 1 \\ 4 & -1 & -2 \end{bmatrix}$

b) $B = \begin{bmatrix} 4 & 8 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \end{bmatrix}$

18. Resolva o seguinte sistema linear:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

19. Empregue os métodos de Jacobi e de Gauss-Seidel para resolver o sistema linear abaixo, com tolerância de 10^{-3} na norma infinito. Empregue como estimativa inicial $x^{(0)} = 0$.

$$\begin{cases} 4x_1 + x_2 - x_3 = 5 \\ -x_1 + 3x_2 + x_3 = -4 \\ 2x_1 + 2x_2 + 5x_3 = 1 \end{cases}$$

20. Empregue os métodos de Jacobi e de Gauss-Seidel para resolver o sistema linear abaixo, com tolerância de 10^{-3} na norma infinito. Empregue como estimativa inicial $x^{(0)} = 0$.

$$\begin{cases} -2x_1 + x_2 + \dfrac{1}{2}x_3 = 4 \\ x_1 - 2x_2 - \dfrac{1}{2}x_3 = -4 \\ x_2 + 2x_3 = 0 \end{cases}$$