UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ

CURSO DE ENGENHARIA MECÂNICA

TMEC-001 Cálculo Numérico

Professor **Luciano Kiyoshi Araki**
(sala 7-30/Lena-2, lucianoaraki@gmail.com, fone: 3361-3126)

Internet: http://ftp.demec.ufpr.br/disciplinas/TMEC001/Prof.Luciano_Araki

LISTA DE EXERCÍCIOS 01 – Dicas e respostas de alguns exercícios

1. Obtenha o polinômio de Taylor de grau três (três primeiros termos não nulos) $P_3(x)$, em torno de $x_0 = 0$, para as seguintes funções. Avalie, então, as funções, f(x), e os respectivos polinômios de Taylor, $P_3(x)$, para $x = 0{,}1$ e $x = 1$:

   (a) $f(x) = \sin(x)\cos(x)$

$$P_3(x) = x - \frac{4x^3}{3!}$$

   (b) $f(x) = xe^x$

$$P_3(x) = x + x^2 + \frac{x^3}{2}$$

   (c) $f(x) = \tan(x)$

$$P_3(x) = x + \frac{2x^3}{3!}$$

Avaliação de $f(x = 0{,}1)$:
Valor exato: $f(0{,}1) = \tan(0{,}1) = 0{,}100347$
Valor aproximado: $P_3(0{,}1) = 0{,}1 + \frac{2(0{,}1)^3}{3!} = 0{,}100333$
Avaliação de $f(x = 1)$:
Valor exato: $f(1) = \tan(1) = 1{,}557408$
Valor aproximado: $P_3(1) = 1 + \frac{2(1)^3}{3!} = 1{,}666667$

2. Use o Teorema de Taylor com n = 2 (dois termos) para provar que a desigualdade $1 + x < e^x$ é válida para todos os números reais, exceto x = 0

3. Considere a seguinte função:

$$f(x) = \begin{cases} 5x^2 + x - 10, & se\ x \le 2 \\ x^3 + 2x^2 + cx, & se\ x > 2 \end{cases}$$

   (a) Determine o valor de *c* de modo que a função seja contínua em todo o domínio real.

$$C = -2$$

(b) Calcule a derivada da função $f(x)$, empregando a definição de derivada, para todo o domínio real. Considere o valor de c calculado no item (a). A função $f'(x)$ resultante é contínua?

A função resultante não é contínua.

4. Encontre maneiras de evitar a perda de algarismos significativos nos cálculos a seguir:

(a) $\sqrt{x^2+1}-1$

Faça operações multiplicando e dividindo pelo conjugado.

(b) $\log(x)-\log(y)$

Regras de operações com logaritmos

(c) $\sinh(x)-\tanh(x)$

Usar definição de $\sinh(x)$ e de $tanh(x)$ com exponenciais.

5. Conceitue:

(a) Overflow
(b) Underflow
(c) Perda de algarismos significativos
(d) Acurácia
(e) Precisão

6. Descreva os passos que constituem o método da bisseção. Para que situações o método da bisseção pode ser empregado?

7. Apresente as semelhanças e diferenças entre os métodos da bisseção e da falsa posição.

8. Como funciona o método de ponto fixo simples?

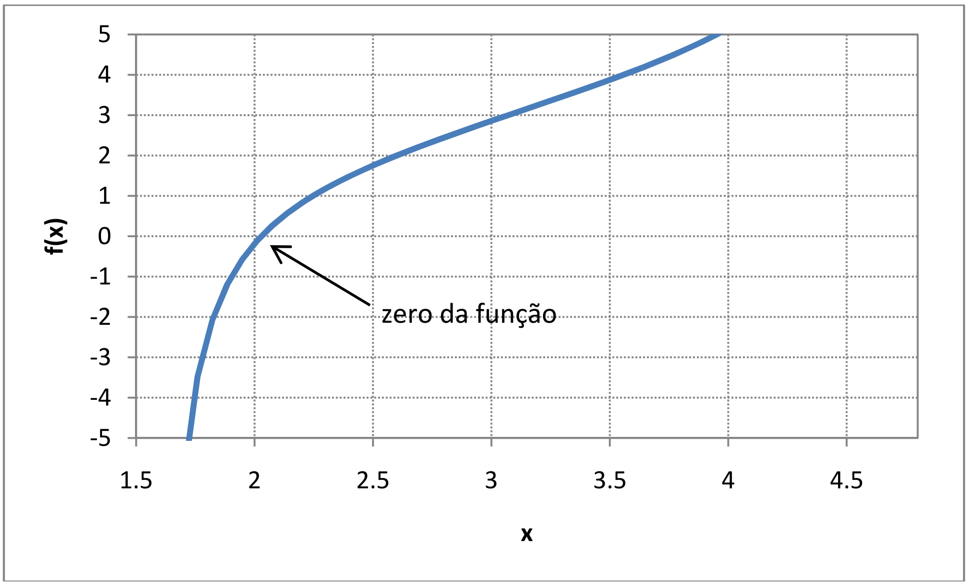
9. Quais as semelhanças e diferenças entre os métodos de Newton e da secante?

10. Encontre as raízes (zeros) das seguintes funções, nos intervalos dados, através dos métodos gráfico, da bisseção, da falsa posição, de Newton e da secante. Com base no resultado gráfico, determine intervalos para a possível solução, no caso do método da bisseção ou estimativa(s) inicial(is) para os

métodos de Newton e da secante. Note que, para alguns casos, as funções tendem ao infinito para algum dos limites dos intervalos fornecidos. Realize 3 iterações para cada método.

a) $f(x) = x + \tan(x)$, $\left(\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right)$

Graficamente:



Método da bisseção:

Admitindo-se os seguintes valores iniciais para o intervalo: $a_0 = 1{,}9$ e $b_0 = 2{,}1$, tem-se $f(1{,}9) = -1{,}027098$ e $f(2{,}1) = 0{,}390153$. Como a função é contínua no intervalo e existe uma mudança de sinais, pode-se empregar tal intervalo como intervalo inicial para o método da bisseção. A equação iterativa na qual se baseia o método da bisseção é

$$c_i = a_{i-1} + \frac{b_{i-1} - a_{i-1}}{2}$$

Ao se empregar o algoritmo relativo ao método da bisseção, tem-se os seguintes resultados, apresentados na tabela a seguir:

Iteração	Solução numérica	Erro relativo
1	2,000000000000	
2	2,050000000000	0,024390243902
3	2,025000000000	0,012345679012
4	2,037500000000	0,006134969325
5	2,031250000000	0,003076923077
6	2,028125000000	0,001540832049
7	2,029687500000	0,000769822941
8	2,028906250000	0,000385059684
9	2,028515625000	0,000192566917
10	2,028710937500	0,000096274189

Método da falsa posição

Para o método da falsa posição, foi empregado o mesmo intervalo inicial utilizado para o método da bisseção.

Iteração	Solução numérica	Erro relativo
1	2,044942220557	
2	2,032510860429	0,006116257665
3	2,029632218209	0,001418307314

4	2,028961772946	0,000330437602
5	2,028805414618	0,000077069159

Método de Newton
Como estimativa inicial, empregou-se $x_0 = 2$.

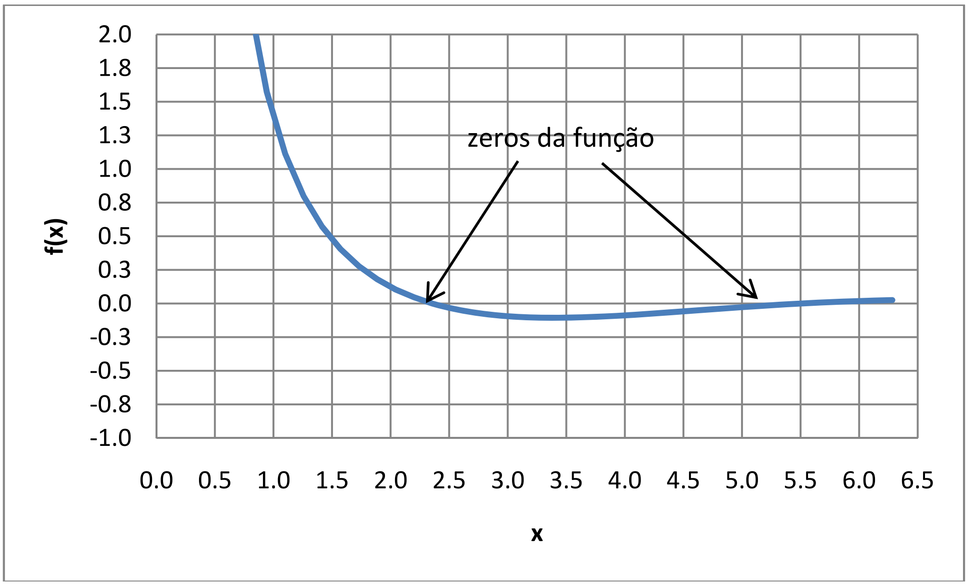
Iteração	Solução numérica	Erro relativo
0	2,000000000000	
1	2,027314579151	0,013473281074
2	2,028754298129	0,000709656649
3	2,028757838089	0,000001744891

Método da secante
Como estimativas iniciais, empregou-se $x_0 = 1{,}9$ e $x_1 = 2{,}1$.

Iteração	Solução numérica	Erro relativo
0	1,900000000000	
1	2,100000000000	
2	2,044942220557	0,026923880239
3	2,026885056630	0,008908824834
4	2,028808913758	0,000948269261
5	2,028758000585	0,000025095735

b) $f(x) = \frac{\text{sen}(x)+\cos(x)}{x^2}$, $(0;\ 2\pi)$

Graficamente:



Método da bisseção (primeira raiz):
Empregando-se o intervalo inicial $a_0 = 2{,}0$ e $b_0 = 2{,}5$, tem-se os seguintes resultados:

Iteração	Solução numérica	Erro relativo
1	2,250000000000	
2	2,375000000000	0,052631578947
3	2,312500000000	0,027027027027

4	2,343750000000	0,013333333333
5	2,359375000000	0,006622516556
6	2,351562500000	0,003322259136
7	2,355468750000	0,001658374793
8	2,357421875000	0,000828500414
9	2,356445312500	0,000414421881
10	2,355957031250	0,000207253886
11	2,356201171875	0,000103616206
12	2,356079101563	0,000051810787

Método da bisseção (segunda raiz)
Empregando-se o intervalo inicial $a_0 = 5{,}0$ e $b_0 = 5{,}5$, tem-se os seguintes resultados:

Iteração	Solução numérica	Erro relativo
1	5,250000000000	
2	5,375000000000	0,023255813953
3	5,437500000000	0,011494252874
4	5,468750000000	0,005714285714
5	5,484375000000	0,002849002849
6	5,492187500000	0,001422475107
7	5,496093750000	0,000710732054
8	5,498046875000	0,000355239787
9	5,497070312500	0,000177651448
10	5,497558593750	0,000088817835

Método da falsa posição (primeira raiz):
Utilizando-se o mesmo intervalo inicial do método da bisseção (primeira raiz), obtém-se:

Iteração	Solução numérica	Erro relativo
1	2,395875740468	
2	2,366797719428	0,012285807444
3	2,359002986809	0,003304248728
4	2,356936641411	0,000876708080
5	2,356390483687	0,000231777258
6	2,356246241315	0,000061217020

Método da falsa posição (segunda raiz):
Utilizando-se o mesmo intervalo inicial do método da bisseção (segunda raiz), obtém-se:

Iteração	Solução numérica	Erro relativo
1	5,498092256899	
2	5,497829169647	0,000047852933

Método de Newton (primeira raiz):
Como estimativa inicial, empregou-se $x_0 = 2{,}2$.

Iteração	Solução numérica	Erro relativo
0	2,200000000000	
1	2,383788600367	0,077099370447
2	2,356812186664	0,011446144863

3	2,356194813728	0,000262021176
4	2,356194490192	0,000000137313

Método de Newton (segunda raiz):
Como estimativa inicial, empregou-se $x_0 = 5{,}3$.

Iteração	Solução numérica	Erro relativo
0	5,300000000000	
1	5,516803097670	0,039298683283
2	5,497915077865	0,003435487733
3	5,497787149735	0,000023269022

Método da secante (primeira raiz):
Como estimativas iniciais, empregou-se $x_0 = 2{,}0$ e $x_1 = 2{,}5$.

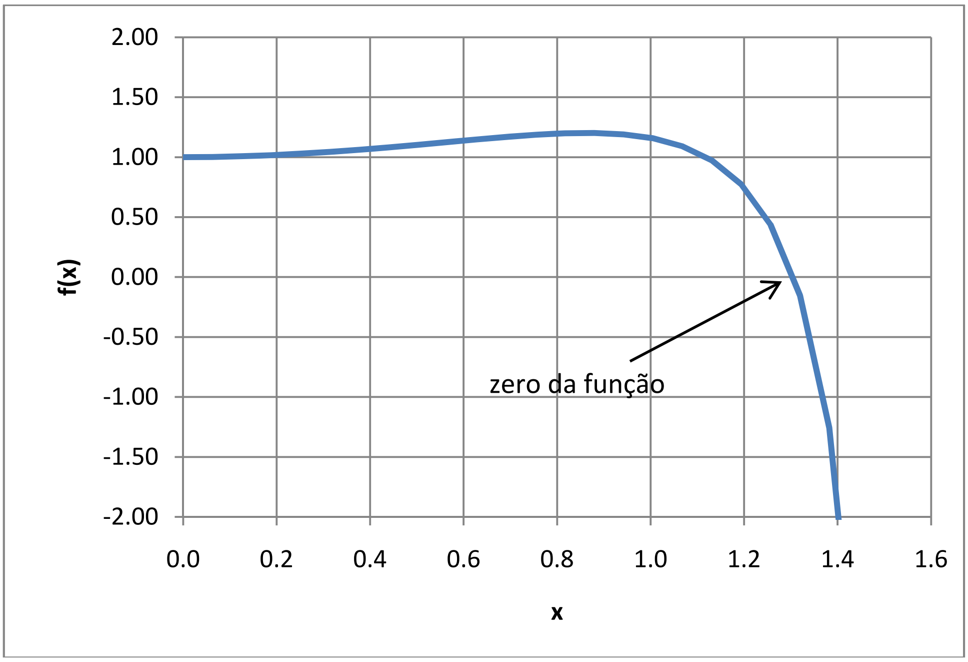
Iteração	Solução numérica	Erro relativo
0	2,000000000000	
1	2,500000000000	
2	2,395875740468	0,043459791246
3	2,350952677315	0,019108450623
4	2,356373560246	0,002300519333
5	2,356195285300	0,000075662211

Método da secante (segunda raiz):
Como estimativas iniciais, empregou-se $x_0 = 5{,}0$ e $x_1 = 5{,}5$.

Iteração	Solução numérica	Erro relativo
0	5,000000000000	
1	5,500000000000	
2	5,498092256899	0,000346982737
3	5,497786897827	0,000055542181

c) $f(x) = e^x - \tan(x)$, $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$

Graficamente:



Método da bisseção:
Empregando-se o intervalo inicial $a_0 = 1{,}2$ e $b_0 = 1{,}4$, tem-se os seguintes resultados:

Iteração	Solução numérica	Erro relativo
1	1,300000000000	
2	1,350000000000	0,037037037037
3	1,325000000000	0,018867924528
4	1,312500000000	0,009523809524
5	1,306250000000	0,004784688995
6	1,309375000000	0,002386634845
7	1,307812500000	0,001194743130
8	1,307031250000	0,000597728631
9	1,306640625000	0,000298953662
10	1,306445312500	0,000149499178
11	1,306347656250	0,000074755177

Método da falsa posição:
Utilizando-se o mesmo intervalo inicial do método da bisseção, obtém-se:

Iteração	Solução numérica	Erro relativo
1	1,260061878315	
2	1,286804335451	0,020782069503
3	1,298203562403	0,008780770044
4	1,302967140161	0,003655946195
5	1,304940856252	0,001512494671
6	1,305755713242	0,000624050105
7	1,306091630980	0,000257193087
8	1,306230025199	0,000105949348
9	1,306287027588	0,000043636955

Método de Newton:
Como estimativa inicial, empregou-se $x_0 = 1{,}3$.

Iteração	Solução	Erro relativo

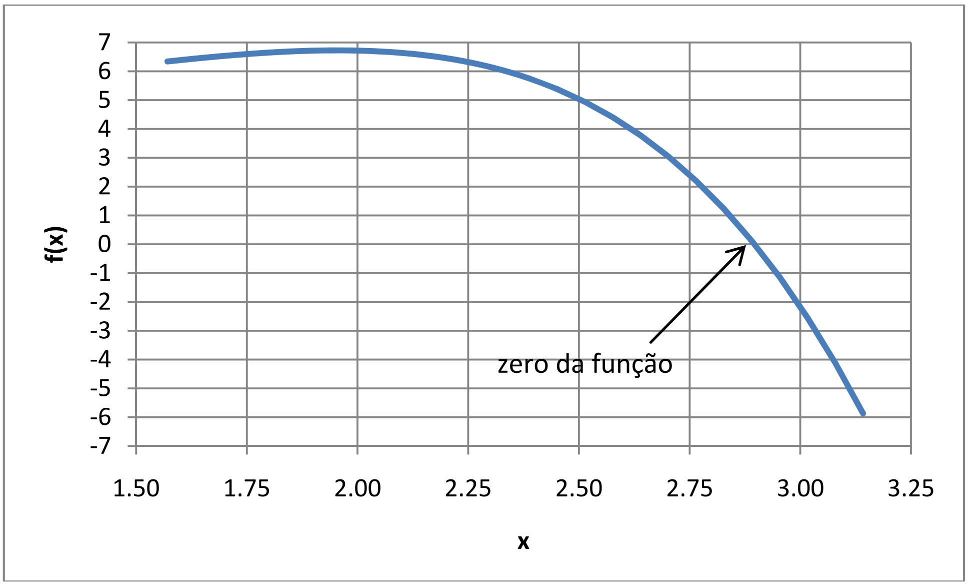
	numérica	
0	1,300000000000	
1	1,306520010459	0,004990364025
2	1,306327118168	0,000147660022
3	1,306326940423	0,000000136064

Método da secante:
Como estimativas iniciais, empregou-se $x_0 = 1{,}2$ e $x_1 = 1{,}4$.

Iteração	Solução numérica	Erro relativo
0	1,200000000000	
1	1,400000000000	
2	1,260061878315	0,111056547375
3	1,286804335451	0,020782069503
4	1,310902309318	0,018382738131
5	1,305895486079	0,003834015273
6	1,306317558067	0,000323100601
7	1,306326959739	0,000007197029

d) $f(x) = e^x \text{sen}(x) - x^2 + 4$; $\left(\frac{\pi}{2};\ \pi\right)$

e) Graficamente:



Método da bisseção:
Empregando-se o intervalo inicial $a_0 = 2{,}75$e $b_0 = 3{,}00$, tem-se os seguintes resultados:

Iteração	Solução numérica	Erro relativo
1	2,875000000000	
2	2,937500000000	0,021276595745
3	2,906250000000	0,010752688172
4	2,890625000000	0,005405405405
5	2,898437500000	0,002695417790
6	2,894531250000	0,001349527665
7	2,896484375000	0,000674308833

8	2,897460937500	0,000337040782
9	2,896972656250	0,000168548795
10	2,896728515625	0,000084281500

Método da falsa posição:
Utilizando-se o mesmo intervalo inicial do método da bisseção, obtém-se:

Iteração	Solução numérica	Erro relativo
1	2,881618804637	
2	2,895298902858	0,004724934689
3	2,896612919264	0,000453638937
4	2,896738116666	0,000043220131

Método de Newton:
Como estimativa inicial, empregou-se $x_0 = 2{,}75$.

Iteração	Solução numérica	Erro relativo
0	2,750000000000	
1	2,922120673144	0,058902657486
2	2,897363057736	0,008544878538
3	2,896751656151	0,000211064550
4	2,896751290088	0,000000126370

Método da secante:
Como estimativas iniciais, empregou-se $x_0 = 2{,}75$ e $x_1 = 3{,}00$.

Iteração	Solução numérica	Erro relativo
0	2,750000000000	
1	3,000000000000	
2	2,881618804637	0,041081490436
3	2,895298902858	0,004724934689
4	2,896773012444	0,000508879909
5	2,896751259182	0,000007509538

11. Considere as seguintes funções. Ao se empregar o método da bisseção, para qual das raízes (zeros) o método conduzirá?

a) $f(x) = (x-4)^4(x-3)(x+2)$, para $[0; 5]$. Raiz encontrada: 3

b) $f(x) = (x-1)^3(x-2)(x-3)$, para $[0; 5]$. Raiz encontrada: 3

c) $f(x) = (x-1)^3(x-2)(x-3)$, para $[0; 3{,}2]$. Raiz encontrada: 1

12. Empregue os métodos da bisseção, falsa posição, Newton e secante para encontrar a raiz real da seguinte função: $f(x) = x^3 - 5x^2 + 4x - 20$. Para os métodos da bisseção e da falsa posição, empregue $[3, 6]$ como intervalo inicial. Para o método de Newton, utilize como estimativa inicial $x_0 = 3$ e, para o método da secante, as estimativas iniciais $x_0 = 3$ e $x_1 = 6$. Para a função fornecida, a raiz exata

procurada é $x_r = 5$. De posse desse fato e de que, para um determinado método, sua ordem de convergência pode ser estimada através da expressão

$$p \approx \frac{\log \left| \frac{e_{k+1}}{e_k} \right|}{\log \left| \frac{e_k}{e_{k-1}} \right|}$$

onde o erro na k-ésima iteração (e_k) é dado por:

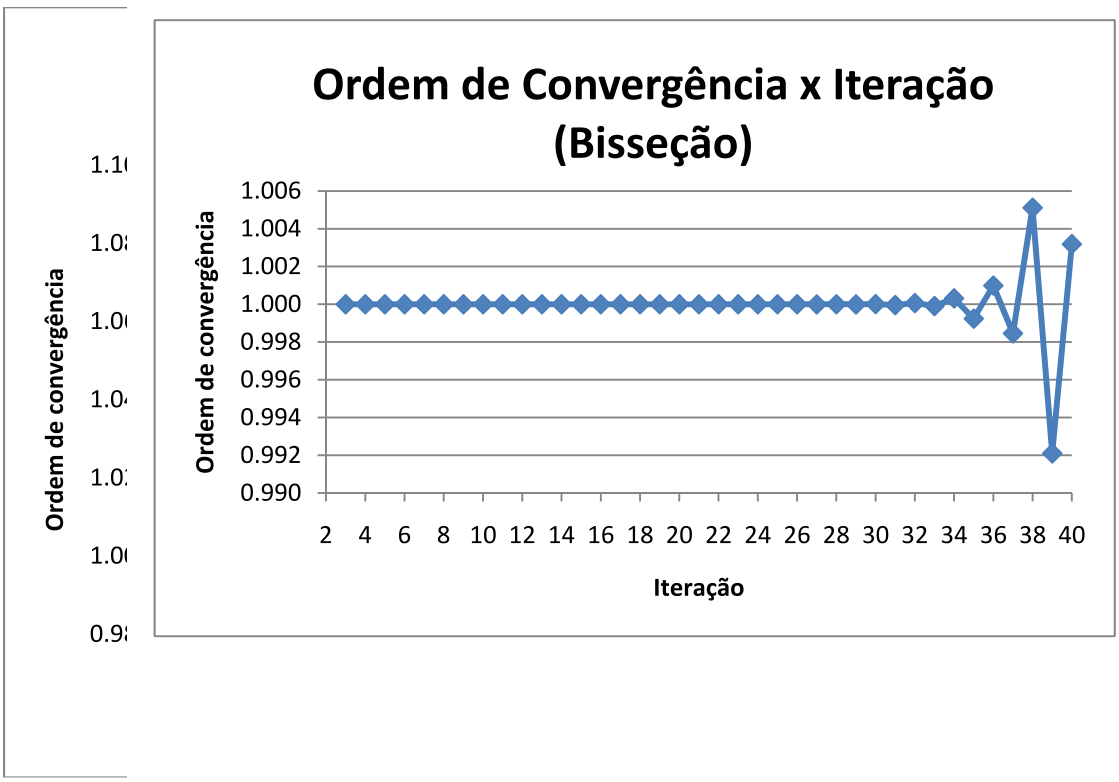
$$e_k = x_k - x_r$$

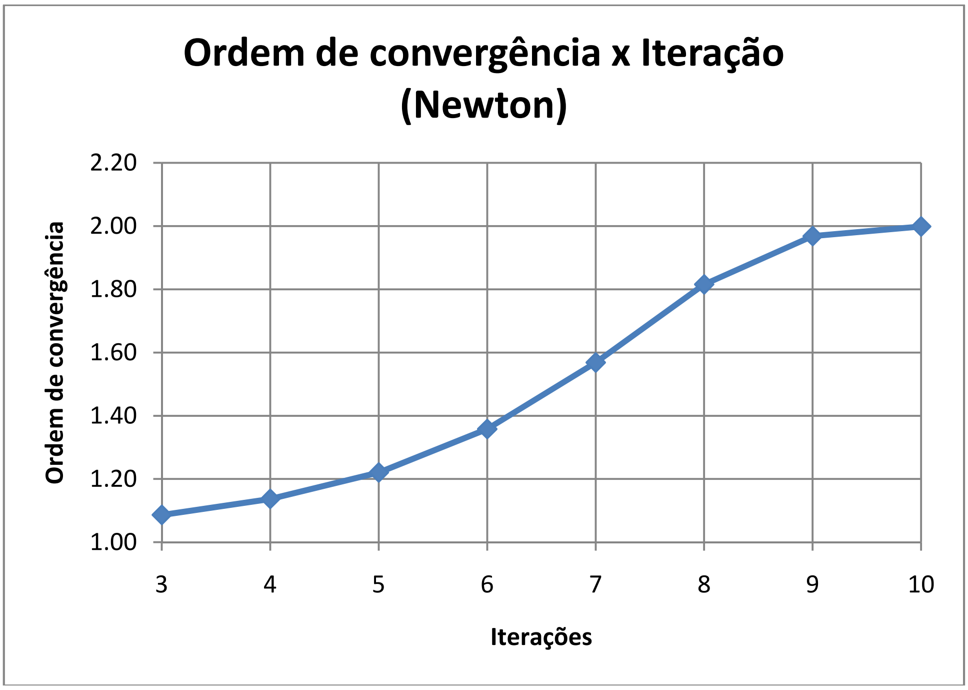
estime, também, as ordens de convergência para os métodos empregados. Sugestão: para a estimativa das ordens de convergência, implemente códigos computacionais, empregando precisão dupla (ou superior).

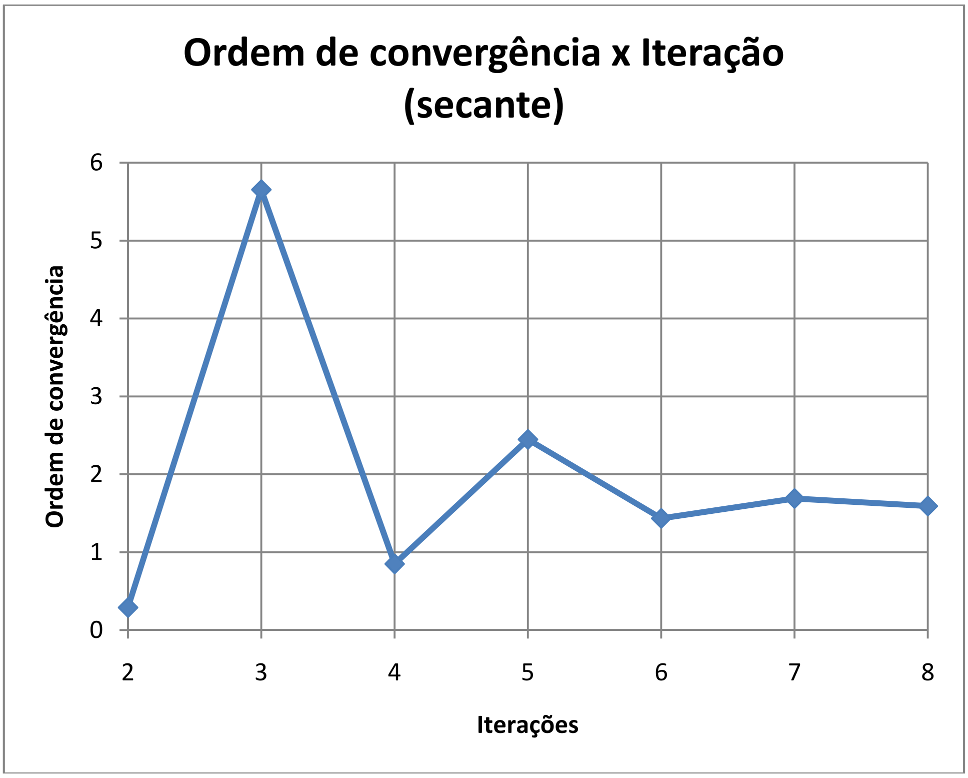
Estipulando-se uma tolerância de 10^{-12}, obtém-se os seguintes resultados para a raiz:

Método	**Solução**	**Iterações**	**Erro relativo**	**Erro verdeiro absoluto**
Bisseção	5,0000000000009100	40	$5{,}46 \times 10^{-13}$	$9{,}10 \times 10^{-13}$
Falsa Posição	4,9999999999982700	22	$9{,}09 \times 10^{-13}$	$1{,}73 \times 10^{-12}$
Newton-Raphson	5,0000000000000000	12	0	0
Secante	5,0000000000000000	10	0	0

(Para alcançar tais tolerâncias, empregou-se códigos computacionais implementados em linguagem Fortran 95, com variáveis de precisão dupla). Com base nos resultados obtidos, para cada um dos métodos implementados, obteve-se o seguinte comportamento para as ordens de convergência x iteração (para os métodos de Newton e da secante, não são apresentados os resultados para as últimas iterações uma vez que tais valores são idênticos à solução exata e, com isso, o argumento do logaritmo empregado para estimar a ordem de convergência é nulo, invalidando a utilização da equação):







No caso dos métodos da bisseção e da falsa posição, após um certo número de iterações, observam-se oscilações com relação à ordem de convergência em torno do valor teórico (unitário). Isto se deve, essencialmente, a erros de arredondamento, que se tornam importantes quando os valores do erro e da tolerância se aproximam do erro de máquina (como é o caso, para a tolerância adotada).

13. Como funciona o Método de Eliminação Gaussiana para um sistema de equações lineares?

14. Como funciona o Método da Decomposição/Fatoração LU para um sistema de equações lineares?

15. Como funciona os Métodos de Jacobi e de Gauss-Seidel para um sistema de equações lineares? Quais suas semelhanças e diferenças?

16. Solucione os sistemas a seguir empregando-se a Eliminação de Gauss.

a) $\begin{cases} 2x + 3y + 4z = 20 \\ x + y + z = 6 \\ 4x - y - 2z = -4 \end{cases}$

$x = 1$, $y = 2$, $z = 3$

b) $\begin{cases} 2x + y + z = 3 \\ -x - y - z = -1 \\ 6x - 2y + 4z = 14 \end{cases}$

$x = 2$, $y = -1$, $z = 0$

17. Encontre a inversa das seguintes matrizes, através da decomposição LU:

a) $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 1 \\ 4 & -1 & -2 \end{bmatrix}$

$$inv(A) = \begin{bmatrix} -0{,}25 & -0{,}5 & 0{,}25 \\ -1{,}5 & 5 & -0{,}5 \\ 1{,}25 & -3{,}5 & 0{,}25 \end{bmatrix}$$

b) $B = \begin{bmatrix} 4 & 8 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \end{bmatrix}$

$$inv(B) = \begin{bmatrix} 0 & 0{,}333333 & 0{,}333333 \\ 0{,}2 & -0{,}666667 & -0{,}066667 \\ -0{,}2 & 1{,}333333 & -0{,}266667 \end{bmatrix}$$

18. Resolva o seguinte sistema linear:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Por fatoração LU: $d_1 = 2$, $d_2 = -5$, $d_3 = 3$; $x_1 = -1{,}5$, $x_2 = 3$, $x_3 = 1$

19. Empregue os métodos de Jacobi e de Gauss-Seidel para resolver o sistema linear abaixo, com tolerância de 10^{-3} na norma infinito. Empregue como estimativa inicial $x^{(0)} = 0$.

$$\begin{cases} 4x_1 + x_2 - x_3 = 5 \\ -x_1 + 3x_2 + x_3 = -4 \\ 2x_1 + 2x_2 + 5x_3 = 1 \end{cases}$$

JACOBI

Após 11 iterações: norma atingida 6,31x10^{-4}

Solução: x_1 = 1,447636; x_2 = –0,8357783; x_3 = –0,04483104

GAUSS-SEIDEL

Após 5 iterações: norma atingida 5,51x10^{-4}

Solução: x_1 = 1,447826; x_2 = –0,8359971; x_3 = –0,04473174

20. Empregue os métodos de Jacobi e de Gauss-Seidel para resolver o sistema linear abaixo, com tolerância de 10^{-3} na norma infinito. Empregue como estimativa inicial $x^{(0)} = 0$.

$$\begin{cases} -2x_1 + x_2 + \frac{1}{2}x_3 = 4 \\ x_1 - 2x_2 - \frac{1}{2}x_3 = -4 \\ x_2 + 2x_3 = 0 \end{cases}$$

JACOBI

Após 23 iterações: norma atingida 7,81x10^{-4}

Solução: x_1 = –1,454691; x_2 = 1,454691; x_3 = –0,7271660

GAUSS-SEIDEL

Após 7 iterações: norma atingida 7,36x10^{-4}

Solução: x_1 = 1,455053; x_2 = –1,454122; x_3 = –0,7270611