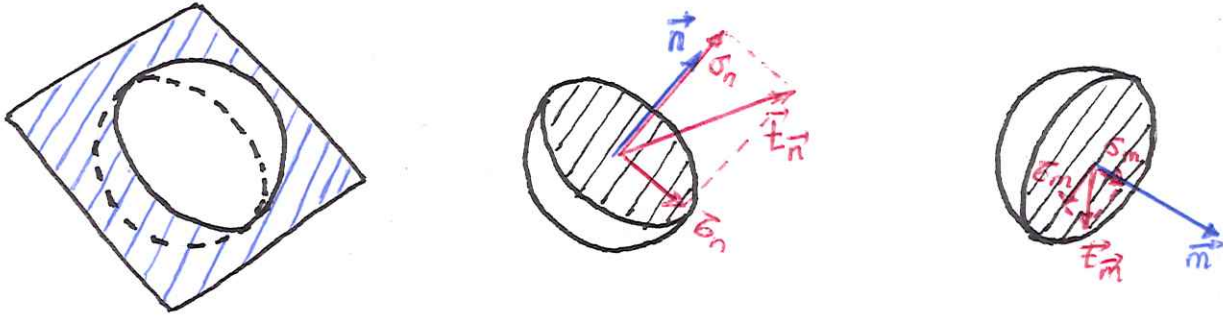


10.1. INTRODUÇÃO

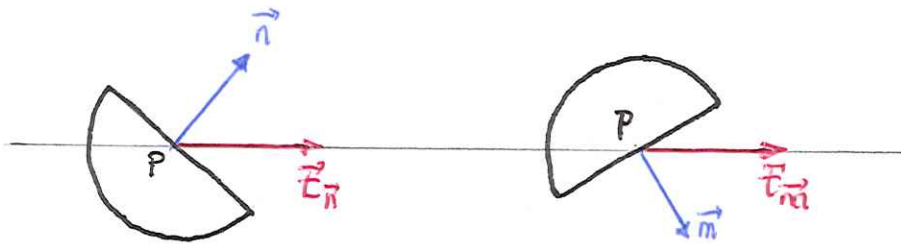
Quando introduzimos o conceito de tensão, vimos que o vetor tração num ponto material depende do plano de corte dessa partícula.



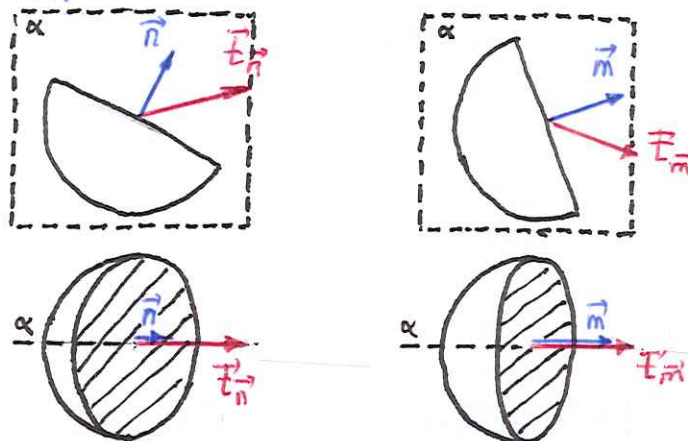
Viremos aqui que o vetor tração para cada plano de corte segue uma lei, a lei de transformação de tensão, para cada partícula do sólido. Esta lei reflete o estado de tensão na partícula.

Os estados de tensão numa partícula classificam-se como estado uniaxial (ou simples), biaxial (ou duplo) e triaxial (ou triplo).

Estado de tensão uniaxial é aquele para o qual o vetor tração tem sempre a mesma direção qualquer que seja o plano de corte da partícula.

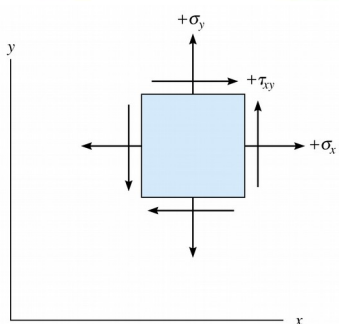


Estado de tensão biaxial é aquele para o qual o vetor tração na partícula coincide num mesmo plano qualquer que seja a orientação do plano de corte da partícula.

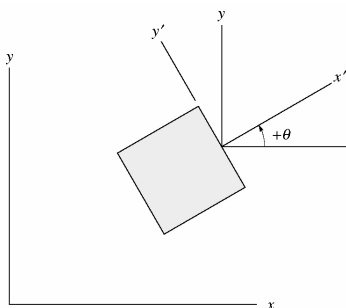


Estado de tensão triaxial é o mais geral, é aquele que não se inclui nas duas outras classificações, ou ainda, aquele em que o vetor tração não coincide com uma direção em plano determinado para qualquer que seja o plano de corte.

10.2 LEI DE TRANSFORMAÇÃO DO ESTADO AXIAL DE TENSÃO

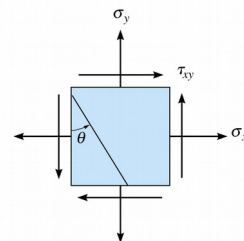


(a)

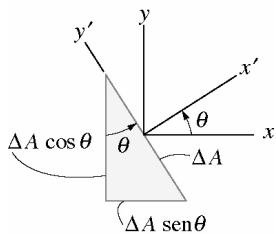


(b)

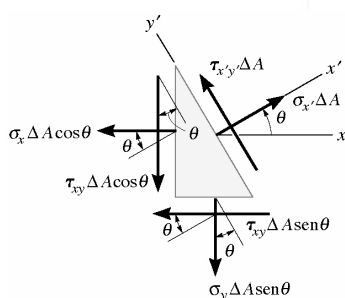
Convenção de sinal positivo



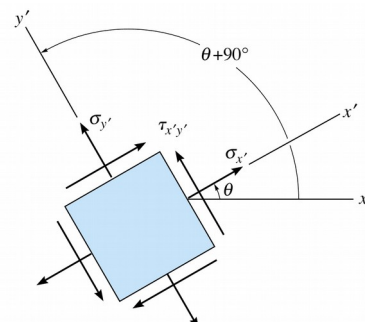
(a)



(b)



(c)



(d)

A figura acima mostra o estado triaxial de tensão numa partícula. O plano das tensões é o xy . Na figura (a), as faces do paralelepípedo infinitesimal envolvendo a partícula está orientado segundo as direções x, y e z , na figura (b), segundo as direções x', y' e z , onde x' e y' estão inclinadas de θ no sentido horário relativamente a x e y , respectivamente.

Para analisar as componentes de Tensão normal e de cisalhamento no plano de normal x' , considere o corte de inclinação θ (figuras (a), (b) e (c) acima). Do diagrama de corpo livre (figura (c) acima), tem-se para o equilíbrio de forças na direção x' :

$$\sigma_{x'} \Delta A - \sigma_x \Delta A \cos^2 \theta - \sigma_y \Delta A \sin^2 \theta - \tau_{xy} \Delta A \cos \theta \sin \theta - \sigma_x \Delta A \cos \theta \sin \theta = 0$$

$$\text{ou } \sigma_{x'} = \sigma_x \cos^2 \theta + \sigma_y \sin^2 \theta + \tau_{xy} 2 \sin \theta \cos \theta$$

e na direção y' :

$$\bar{\sigma}_{xy} \Delta A + \bar{\sigma}_{xy} \Delta A \sin\theta \cos\theta - \sigma_y \Delta A \sin\theta \cos\theta - \bar{\sigma}_{xy} \Delta A \cos\theta \sin\theta + \sigma_x \Delta A \cos\theta \sin\theta = 0$$

$$\text{ou } \bar{\sigma}_{x'y'} = (\sigma_y - \sigma_x) \sin\theta \cos\theta + \bar{\sigma}_{xy} (\cos^2\theta - \sin^2\theta)$$

Utilizando as seguintes identidades geométricas nas equações acima:

$$\sin 2\theta = 2 \sin\theta \cos\theta$$

$$\sin^2\theta = \frac{1 - \cos 2\theta}{2}$$

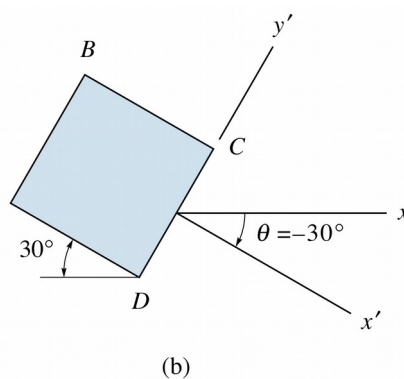
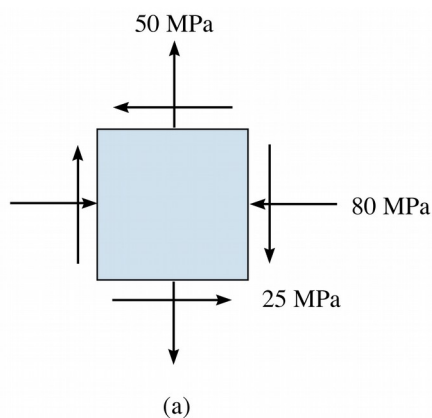
$$\cos^2\theta = \frac{1 + \cos 2\theta}{2}$$

resultam finalmente as equações de transformação de tensão para o estado de tensão triaxial:

$$\sigma_{x'} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cos 2\theta + \bar{\sigma}_{xy} \sin 2\theta$$

$$\bar{\sigma}_{x'y'} = -\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \sin 2\theta + \bar{\sigma}_{xy} \cos 2\theta$$

Exemplo 10.1 O estado de tensão triaxial num ponto i representado abaixo. Determine o estado de tensão nesse ponto por meio de um outro elemento infinitesimal orientado a 30° no sentido horário em relação à posição mostrada.



Solução:

$$\sigma_x = -80 \text{ MPa (compressão)}$$

$$\sigma_y = +50 \text{ MPa (tração)}$$

$$\bar{\sigma}_{xy} = -25 \text{ MPa (horário)}$$

Tensões no plano de normal x' ($\theta = -30^\circ$) ou ($\theta = 330^\circ$):

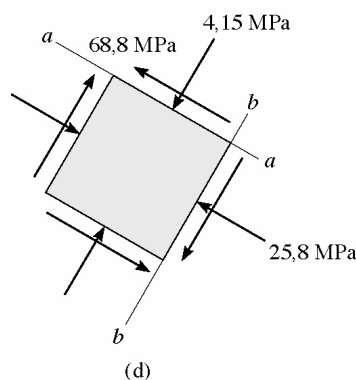
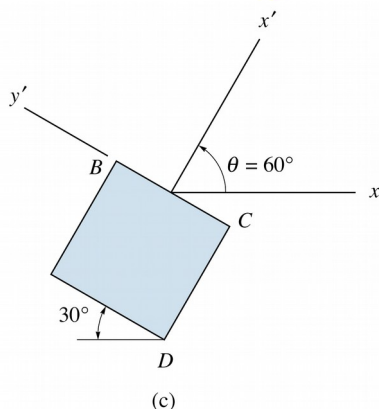
$$\sigma_{x'} = \frac{-80 + 50}{2} + \frac{-80 - 50}{2} \cos(-60^\circ) - 25 \sin(-60^\circ) = -26 \text{ MPa (compressão)}$$

$$\bar{\sigma}_{x'y'} = -\frac{-80 - 50}{2} \sin(-60^\circ) - 25 \cos(-60^\circ) = -69 \text{ MPa (horário)}$$

Tensões no plano de normal y' ($\theta' = 60^\circ$) ou ($\theta' = 240^\circ$):

$$\sigma_{y'} = \frac{-80 + 50}{2} + \frac{-80 - 50}{2} \cos(120^\circ) - 25 \sin(120^\circ) = -4,2 \text{ MPa}$$

$$\tau_{y'x'} = -\tau_{x'y'} = +69 \text{ MPa (anti-horário)}$$



10.3. TENSÕES PRINCIPAIS E TENSÃO DE DESLIZAMENTO MÁXIMA NO PLANO

Como visto anteriormente, o par de tensões (σ, τ) num plano ortogonal ao plano de tensões é definido pela inclinação θ , ou seja, σ e τ são função de θ . Isto leva a perguntar-nos se não haverá um plano de inclinação tal que σ seja máximo, outro em que σ seja mínimo, outro em que τ seja máximo e outro em que τ seja mínimo.

As tensões normais máxima e mínima são também chamadas simplesmente de tensões principais.

10.3.1. Tensões principais no plano de tensões

A partir da expressão da lei de transformação de tensões normal pode-se obter a inclinação dos planos de máxima e mínima tensão normal fazendo a derivada de $\sigma_{x'}$ em relação a θ e igualando-a a zero:

$$\left. \frac{d\sigma_{x'}}{d\theta} \right|_{\theta=\theta_p} = -(\sigma_x - \sigma_y) \sin 2\theta_p + 2\tau_{xy} \cos 2\theta_p = 0$$

$$\text{ou } \text{tg } 2\theta_p = \frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y}$$

Esta equação tem duas raízes:

$$\theta_{p1} \text{ e } \theta_{p2} = \theta_{p1} + 90^\circ$$

Portanto, as tensões principais ocorrem em planos ortogonais entre si.

Para determinar a tensão normal máxima e a mínima, vamos tomar a equação que fornece σ_x' num plano qualquer, rearranjar os termos dela e levar ao quadrado os dois membros:

$$\begin{aligned}
 \left(\sigma_x' - \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2}\right)^2 &= \left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cos 2\theta_p + \tau_{xy} \sin 2\theta_p\right)^2 \\
 &= \left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 \cos^2 2\theta_p + \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \tau_{xy} \sin 2\theta_p \cos 2\theta_p + \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \tau_{xy} \sin 2\theta_p \cos 2\theta_p + \tau_{xy}^2 \sin^2 2\theta_p \\
 &= \cos^2 2\theta_p \left[\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \tau_{xy} \operatorname{tg} 2\theta_p \right] + \sin^2 2\theta_p \left[\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \tau_{xy} \operatorname{ctg} 2\theta_p + \tau_{xy}^2 \right] \\
 &= \cos^2 2\theta_p \left[\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \tau_{xy} \frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y} \right] + \sin^2 2\theta_p \left[\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \tau_{xy} \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2\tau_{xy}} + \tau_{xy}^2 \right] \\
 &= (\cos^2 2\theta_p + \sin^2 2\theta_p) \left[\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2 \right] = \left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2
 \end{aligned}$$

Logo,

$$\sigma_2(\theta_p) = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}$$

ou $\sigma_1 = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}$ (máxima)

e $\sigma_2 = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} - \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}$ (mínima)

Para determinar as tensões de cisalhamento nesses planos vamos tomar a equação que fornece τ_{xy}' num plano qualquer e reescrevê-la da seguinte forma:

$$\tau_{xy}' = \cos 2\theta_p \left[-\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right) \operatorname{tg} 2\theta_p + \tau_{xy} \right] = \cos 2\theta_p \left[-\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right) \frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y} + \tau_{xy} \right] = 0$$

Portanto, não há tensão de cisalhamento nos planos de tensões principais.

Se somarmos σ_1 e σ_2 , chegaremos de imediato a:

$$\sigma_1 + \sigma_2 = \sigma_x + \sigma_y = \text{cte}$$

ou seja, a soma das tensões normais em quaisquer dois planos ortogonais entre si é igual à soma das tensões principais.

10.3.2. Tensão de cisalhamento máxima no plano de tensões

De modo análogo, a partir da expressão da lei de transformação de tensão de cisalhamento pode-se obter a inclinação dos planos de máxima e mínima tensão de cisalhamento fazendo a derivada de τ_{xy}' em relação a θ e igualando-a a zero:

$$\frac{d\bar{\sigma}_{x'y'}}{d\theta} = -(\sigma_x - \sigma_y) \cos 2\theta_s - 2\bar{\sigma}_{xy} \sin 2\theta_s = 0$$

$$\text{ou } \operatorname{tg} 2\theta_s = -\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2\bar{\sigma}_{xy}}$$

De igual forma, esta equação possui duas raízes:

$$\theta_{s1} \quad \text{e} \quad \theta_{s2} = \theta_{s1} + 90^\circ$$

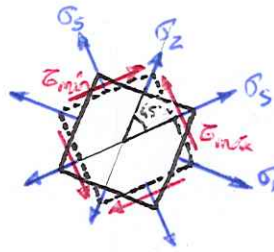
uma correspondendo ao plano onde ocorre tensão de cisalhamento máxima e a outra ao plano onde ocorre tensão de cisalhamento mínima. Observe que estes dois planos também são ortogonais entre si.

Um resultado importante e útil pode ser obtido da seguinte propriedade trigonométrica: se dois ângulos α e β verificam $\operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{tg} \beta = -1$, então, $|\alpha - \beta| = 90^\circ$. Esta propriedade é verificada para os ângulos $2\theta_p$ e $2\theta_s$, logo:

$$\theta_{s1} = \theta_{p1} + 45^\circ$$

$$\text{e} \quad \theta_{s2} = \theta_{p2} + 45^\circ$$

Ou seja, o planos onde ocorrem tensões principais e tensões de cisalhamento máxima e mínima estão defasados de 45° entre si.



De modo análogo ao que foi feito para obter as tensões principais, pode-se mostrar que:

$$\bar{\sigma}_{x'y'}(\theta_s) = \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \bar{\sigma}_{xy}^2}$$

$$\text{ou } \bar{\sigma}_{\max} = -\bar{\sigma}_{\min} = \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \bar{\sigma}_{xy}^2}$$

E as tensões normais nesses planos são:

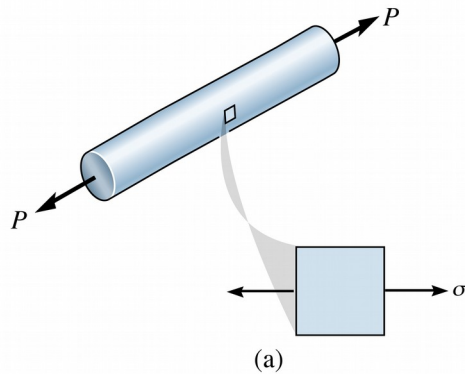
$$\sigma_s = \sigma_{x'}(\theta_{s1}) = \sigma_{x'}(\theta_{s2}) = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2}$$

ou seja, as tensões normais nesses planos são iguais à média das tensões normais em dois planos quaisquer ortogonais entre si.

Vale destacar ainda que:

$$\bar{\sigma}_{\max} = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2}$$

Exemplo 10.2: O estado de tensão uniaxial se encontra em qualquer ponto material de uma barra axialmente carregada e numa viga submetida à flexão pura. Determine as tensões principais e de cisalhamento máxima e mínima e os planos onde elas ocorrem. Ex. 9.3 cap. 09 - b 10.7



Solução: Tomar para o elemento infinitesimal orientado segundo x (longitudinal) e y (transversal):

$$\sigma_x = +\sigma \text{ (tração)}$$

$$\sigma_y = 0$$

$$\tau_{xy} = 0$$

Planos de tensões principais:

$$\operatorname{tg} 2\theta_p = \frac{2 \cdot 0}{\sigma - 0} = 0$$

$$\text{ou } \theta_{p_1} = 0^\circ$$

$$\text{e } \theta_{p_2} = 90^\circ$$

As tensões principais podem ser obtidas da expressão de transformações:

$$\sigma_{x'}(0^\circ) = \frac{\sigma + 0}{2} + \frac{\sigma - 0}{2} \cos 0^\circ + 0 \cdot \sin 0^\circ = +\sigma \text{ (tração)} = \sigma_1$$

$$\sigma_{x'}(90^\circ) = \frac{\sigma + 0}{2} + \frac{\sigma - 0}{2} \cos 180^\circ + 0 \cdot \sin 180^\circ = 0 = \sigma_2$$

Já era esperado que as tensões principais fossem σ_x e σ_y , pois τ_{xy} é nula nesses planos. O plano de normal x corresponde a σ_1 e o de normal y a σ_2 .

Planos de tensões de cisalhamento máxima e mínima:

$$\theta_{s_1} = \theta_{p_1} + 45^\circ = 0^\circ + 45^\circ = 45^\circ$$

$$\theta_{s_2} = \theta_{p_2} + 45^\circ = 90^\circ + 45^\circ = 135^\circ$$

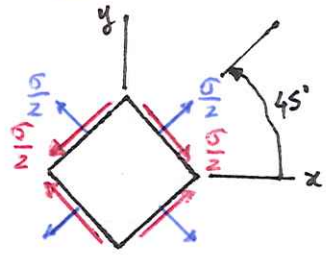
As tensões de cisalhamento máxima e mínima podem ser obtidas da expressão de transformações:

$$\tau_{x'y'}(45^\circ) = -\frac{\sigma - 0}{2} \sin 90^\circ + 0 \cdot \cos 90^\circ = -\frac{\sigma}{2} \text{ (horário)}$$

$$\tau_{x'y'}(135^\circ) = +\frac{\sigma}{2} \text{ (máxima / anti-horário)}$$

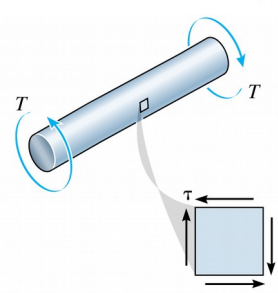
As tensões normais nesses planos são:

$$\sigma_s = \frac{\sigma + 0}{2} = +\frac{\sigma}{2} \text{ (tração)}$$



Slide 9.5 cap 09_b

Exemplo 10.3 O estado de cisalhamento puro se encontra em qualquer ponto material de um eixo cilíndrico submetido à torção pura. Determine as tensões principais e de cisalhamento máxima e mínima e os planos onde elas ocorrem.



(a)

Solução: Temos para um elemento infinitesimal formado a partir de planos transversais orientados segundo x (longitudinal) e de planos meridionais orientados segundo

y:

$$\sigma_x = 0$$

$$\sigma_y = 0$$

$$\tau_{xy} = -\tau$$

Planos de tensões principais:

$$\text{tg } 2\theta_p = \frac{2 \cdot -\tau}{0 - 0} = \pm \infty$$

$$\text{ou } \theta_{p1} = 45^\circ$$

$$\text{e } \theta_{p2} = -45^\circ \text{ (ou } 135^\circ)$$

As tensões principais podem ser obtidas da expressão de transformações:

$$\sigma_{x'}(45^\circ) = \frac{0+0}{2} + \frac{0-0}{2} \cos 90^\circ + -\tau \sin 90^\circ = -\tau \text{ (compressão)}$$

$$\sigma_{x'}(-45^\circ) = \frac{0+0}{2} + \frac{0-0}{2} \cos -90^\circ + -\tau \sin -90^\circ = +\tau \text{ (tração)}$$

$\therefore \sigma_1 = +\tau$ e $\sigma_2 = -\tau$, ambas ocorrendo em planos defasados de 45° em relação ao plano de normal x.

Planos de tensões de cisalhamento máxima e mínima:

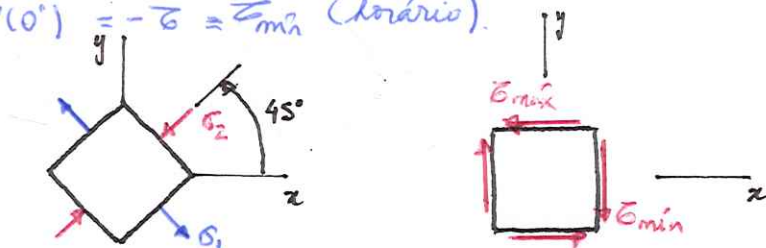
$$\theta_{s1} = \theta_{p1} + 45^\circ = 45^\circ + 45^\circ = 90^\circ$$

$$\theta_{s2} = \theta_{p2} + 45^\circ = 45^\circ - 45^\circ = 0^\circ$$

As tensões de alongamento máxima e mínima podem ser obtidas da expressão de transformações:

$$\sigma_{x'y'}(90^\circ) = -\frac{0-0}{2} \sin 180^\circ + -\sigma \cos 180^\circ = +\sigma = \sigma_{\max} \text{ (anti-horário)}$$

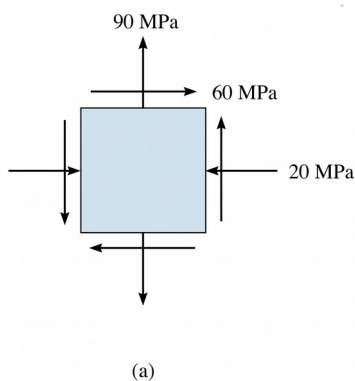
$$\sigma_{x'y'}(0^\circ) = -\sigma = \sigma_{\min} \text{ (horário)}$$



As tensões normais num plano são:

$$\sigma_s = \frac{0+0}{2} = 0$$

Exemplo 10.4 O estado plano de tensão num ponto material de um corpo é mostrado no elemento infinitesimal abaixo. Obtenha as tensões principais e as de alongamento máximas e mínimas e identifique os respectivos planos onde elas ocorrem.



Solução: Tensores para o elemento:

$$\sigma_x = -20 \text{ MPa}$$

$$\sigma_y = +90 \text{ MPa}$$

$$\tau_{xy} = +60 \text{ MPa}$$

Planos de tensões principais:

$$\tan 2\theta_p = \frac{2 \cdot 60}{-20 - 90} = -1,1$$

$$\theta_{p_1} = -24^\circ$$

$$\theta_{p_2} = -24^\circ + 90^\circ = 66^\circ$$

As tensões principais podem ser obtidas da expressão de transformações:

$$\sigma_{x'}(-24^\circ) = \frac{-20+90}{2} + \frac{-20-90}{2} \cos(-48^\circ) + 60 \sin(-48^\circ) = -46 \text{ MPa (compressão)}$$

$$\sigma_{x'}(66^\circ) = \frac{-20+90}{2} + \frac{-20-90}{2} \cos(132^\circ) + 60 \sin(132^\circ) = +116 \text{ MPa (tração)}$$

$\therefore \sigma_1 = +116 \text{ MPa}$, ocorrendo no plano de normal inclinada de 66° em relação a x ;

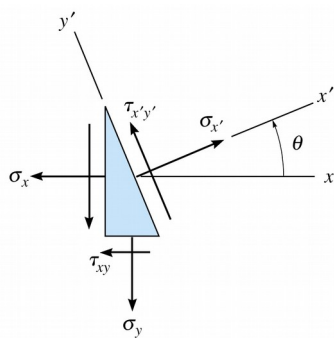
$$\left[\sigma - \left(\frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \right) \right]^2 = \left[\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \right) \cos 2\theta + \tau_{xy} \sin 2\theta \right]^2 \quad (a)$$

$$\tau^2 = \left[- \left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \right) \sin 2\theta + \tau_{xy} \cos 2\theta \right]^2 \quad (b)$$

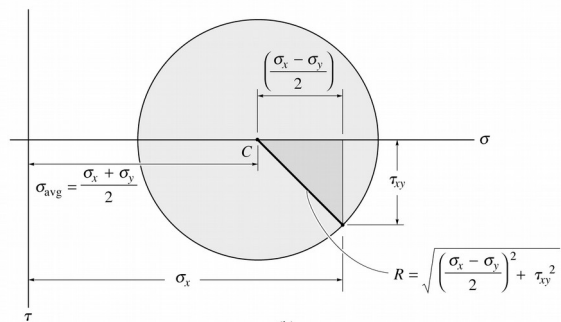
(a+b):

$$\left[\sigma - \left(\frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \right) \right]^2 + \tau^2 = \left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \right)^2 + \tau_{xy}^2$$

Esta última equação é a equação de uma circunferência de centro de coordenadas $\left(\frac{\sigma_x + \sigma_y}{2}, 0 \right)$ e raio $\sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \right)^2 + \tau_{xy}^2}$ no plano cartesiano $\sigma \times \tau$.

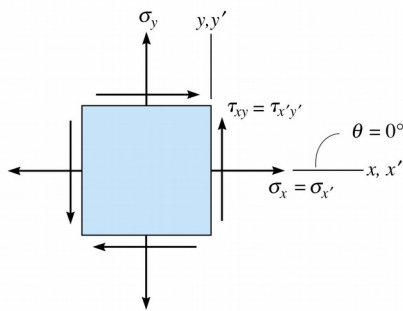


(a)

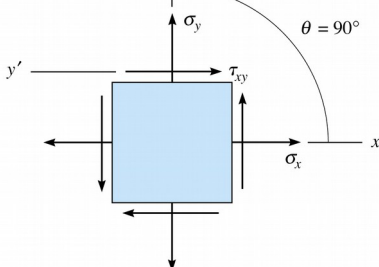


(b)

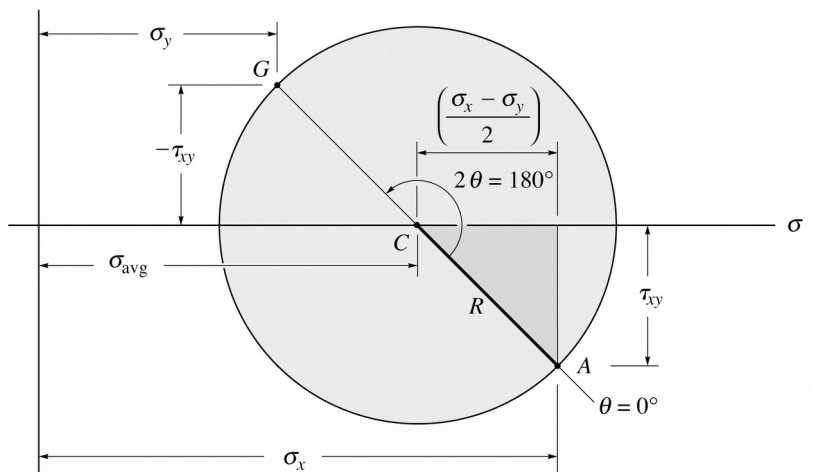
Para construir o círculo de Mohr estabelece-se primeiramente os eixos cartesianos σ , abscissa, τ (orientado positivamente para baixo), ordenada; depois registra-se o centro do círculo sobre o eixo da abscissa de coordenada $\sigma_{\text{méd}} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2}$ e o ponto do círculo de coordenadas (σ_x, τ_{xy}) . Com o centro da circunferência, um ponto sobre ela e um compasso, pronto, desenha-se a circunferência.



(a)



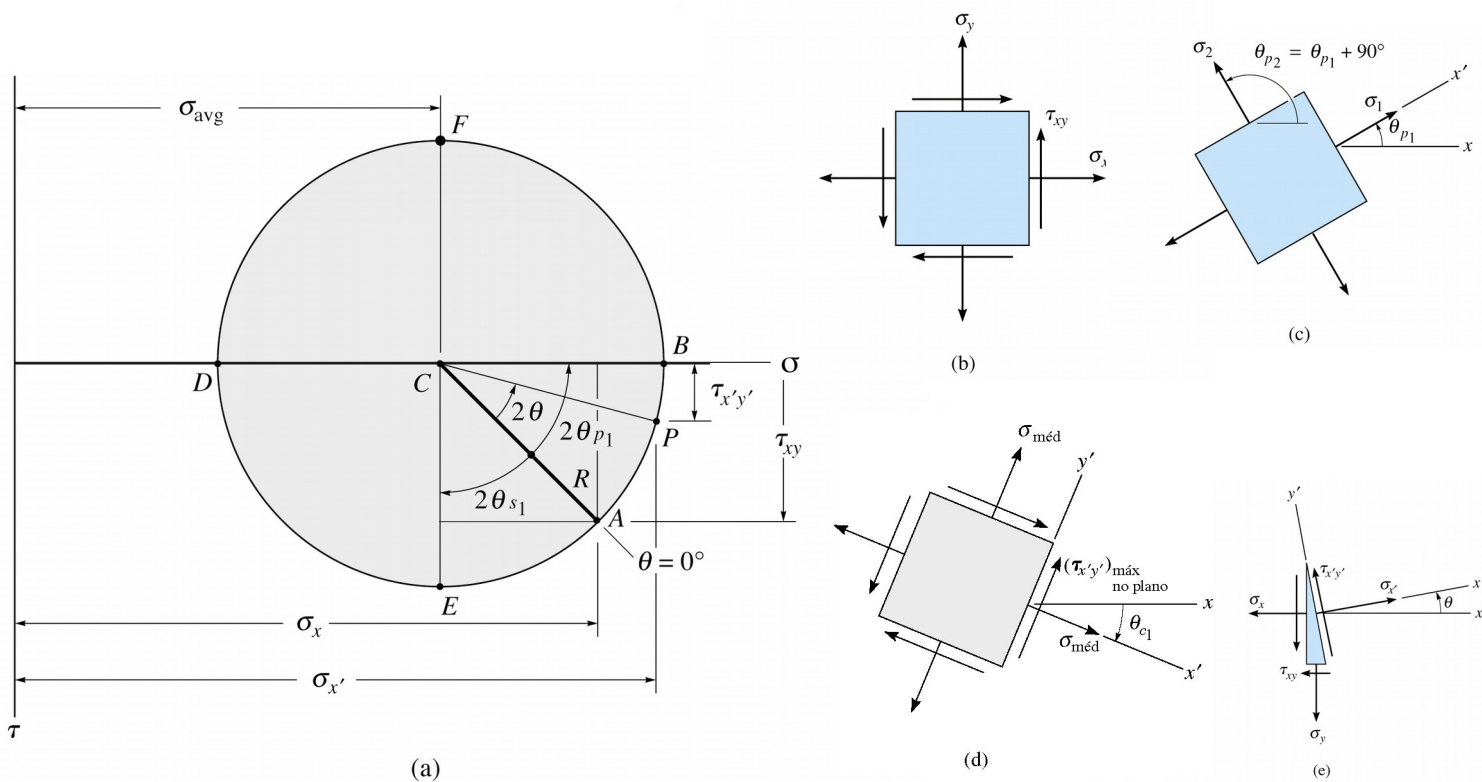
(b)



(c)

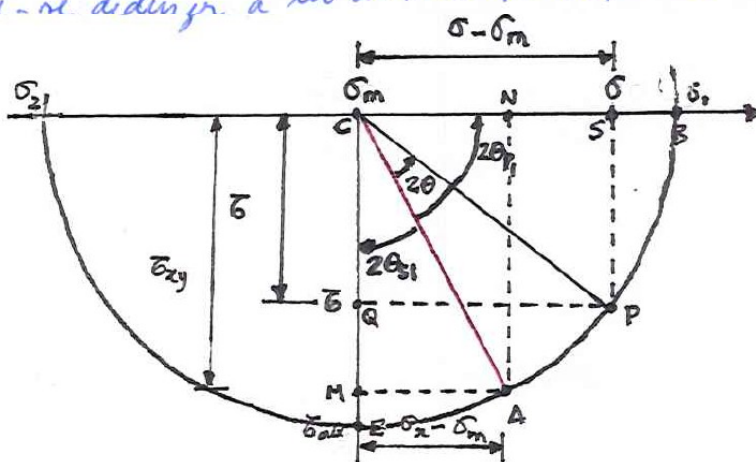
Na figura acima, A é o ponto de coordenadas (σ_x, τ_{xy}) e, diametralmente oposto a A, está o ponto G de coordenadas $(\sigma_y, -\tau_{xy})$, que são as tensões no plano de normal y.

Os pontos B e D de coordenadas $(\sigma_1, 0)$ e $(\sigma_2, 0)$, respectivamente, mostrados na figura abaixo, correspondem às tensões principais, e os pontos E e F de coordenadas $(\sigma_{méd}, \tau_{xy})$ e $(\sigma_{méd}, -\tau_{xy})$, respectivamente, correspondem às tensões de cisalhamento máxima e mínima. O ponto A de coordenadas (σ_x, τ_{xy}) corresponde ao par de tensões normal e de cisalhamento que ocorre no plano de normal x (conforme item (b) da figura abaixo). O ângulo que varre o arco \widehat{AB} do círculo é $2\theta_{p1}$, e o ângulo que varre o arco \widehat{AE} é $2\theta_{s1}$. O ponto P de coordenadas (σ, τ) corresponde ao par de tensões normal e de cisalhamento que ocorre no plano de normal x' (conforme item (c) da figura abaixo). O ângulo que varre o arco \widehat{AP} é 2θ .



Pode-se deduzir a lei de transformação de tensões a partir do círculo de Mohr.

Mohr.



Raio da circunferência: ΔACM

$$R = \sqrt{(\sigma_x - \sigma_m)^2 + \tau_{xy}^2} = \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}$$

Tensões principais:

$$\sigma_1 = \sigma_m + R = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}$$

$$\sigma_2 = \sigma_m - R = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} - \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}$$

Planos de tensões principais: ΔACN

$$\operatorname{tg} 2\theta_{p1} = \frac{\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_m} = \frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y}$$

Tensões de cisalhamento máxima e mínima:

$$\tau_{\max} = -\tau_{\min} = R = \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}$$

Planos de tensões de cisalhamento máxima e mínima: ΔACM

$$\operatorname{tg}(-2\theta_{s1}) = \frac{\sigma_x - \sigma_m}{\tau_{xy}} = \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2\tau_{xy}}$$

$$\text{ou } \operatorname{tg} 2\theta_{s1} = -\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2\tau_{xy}}$$

Lei de transformação de tensão: ΔPSC

$$\begin{aligned} \sigma - \sigma_m &= R \cos(2\theta_{p1} - 2\theta) = R \cos 2\theta_{p1} \cos 2\theta + R \sin 2\theta_{p1} \sin 2\theta \\ &= (\sigma_x - \sigma_m) \cos 2\theta + \tau_{xy} \sin 2\theta \end{aligned}$$

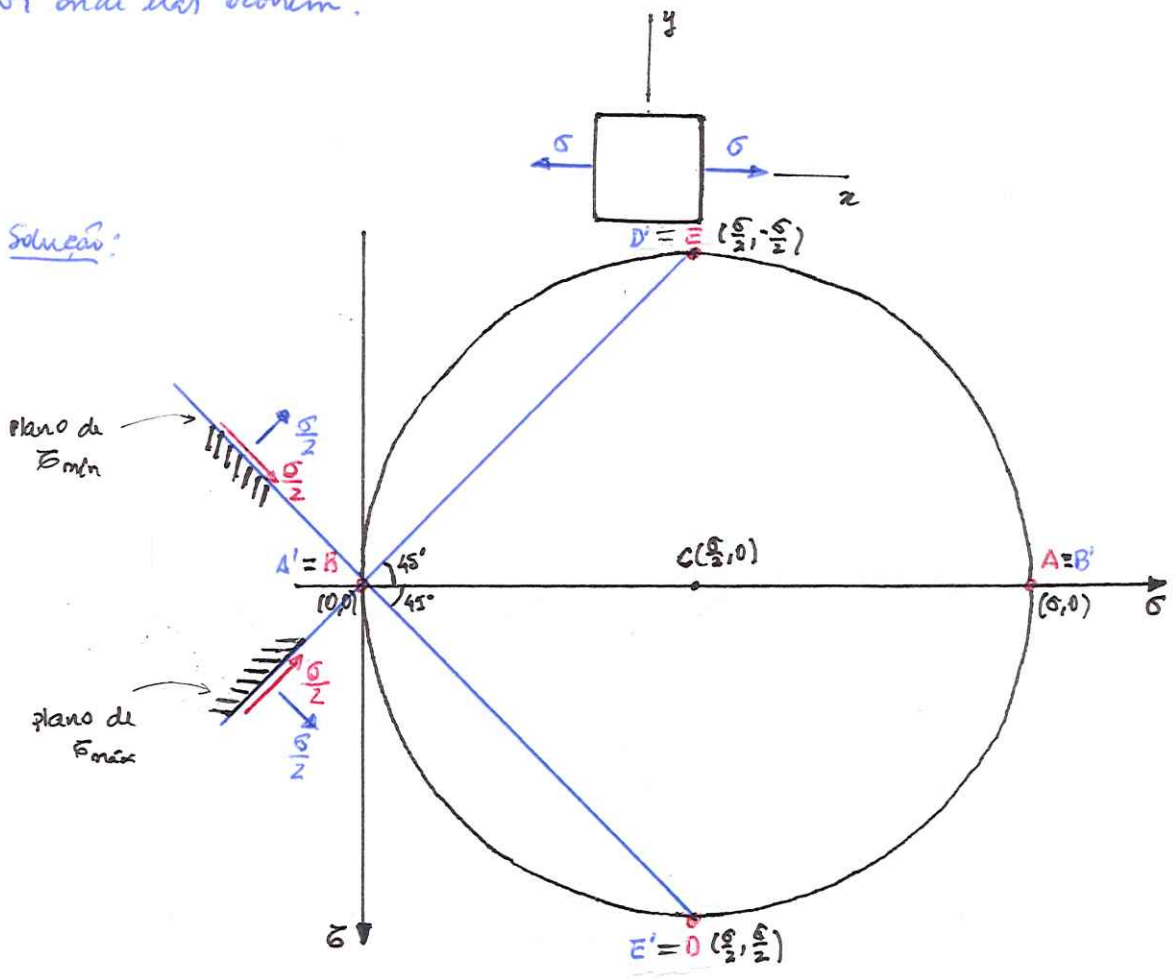
$$\text{ou } \sigma = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cos 2\theta + \tau_{xy} \sin 2\theta$$

$$\begin{aligned} \tau &= R \sin(2\theta_{p1} - 2\theta) = R \sin 2\theta_{p1} \cos 2\theta - R \cos 2\theta_{p1} \sin 2\theta \\ &= \tau_{xy} \cos 2\theta - (\sigma_x - \sigma_m) \sin 2\theta \end{aligned}$$

$$\text{ou } \tau = -\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right) \sin 2\theta + \tau_{xy} \cos 2\theta$$

Exemplo 10.5 Represente o círculo de Mohr do estado de tensão uniaxial e identifique graficamente as tensões principais e de cisalhamento máximo e mínimo e os planos onde elas ocorrem.

Solução:



$\sigma_x = +\sigma$

$\sigma_y = 0$

$\tau_{xy} = 0$

Centro do círculo : $\sigma_m = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} = \frac{\sigma + 0}{2} = \frac{\sigma}{2}$

$C(\frac{\sigma}{2}, 0)$

Ponto A:

$A = (\sigma_x, \tau_{xy}) = (\sigma, 0)$

Tensões principais:

$\sigma_1 = \sigma$ (tração)

$\sigma_2 = 0$

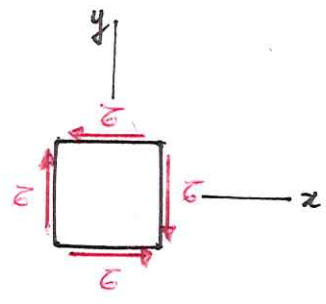
Tensões de cisalhamento máxima e mínima:

$\tau_{máx} = -\tau_{mín} = \text{raio} = \frac{\sigma}{2}$

$\sigma_s = \sigma_m = +\frac{\sigma}{2}$ (tração)

No estado de tensão uniaxial o círculo de Mohr tangencia o eixo de σ .

Exemplo 10.6: Represente o círculo de Mohr do estado de cisalhamento puro e identifique graficamente as tensões principais e de cisalhamento máximas e mínimas e os planos onde elas ocorrem.



Soluções:

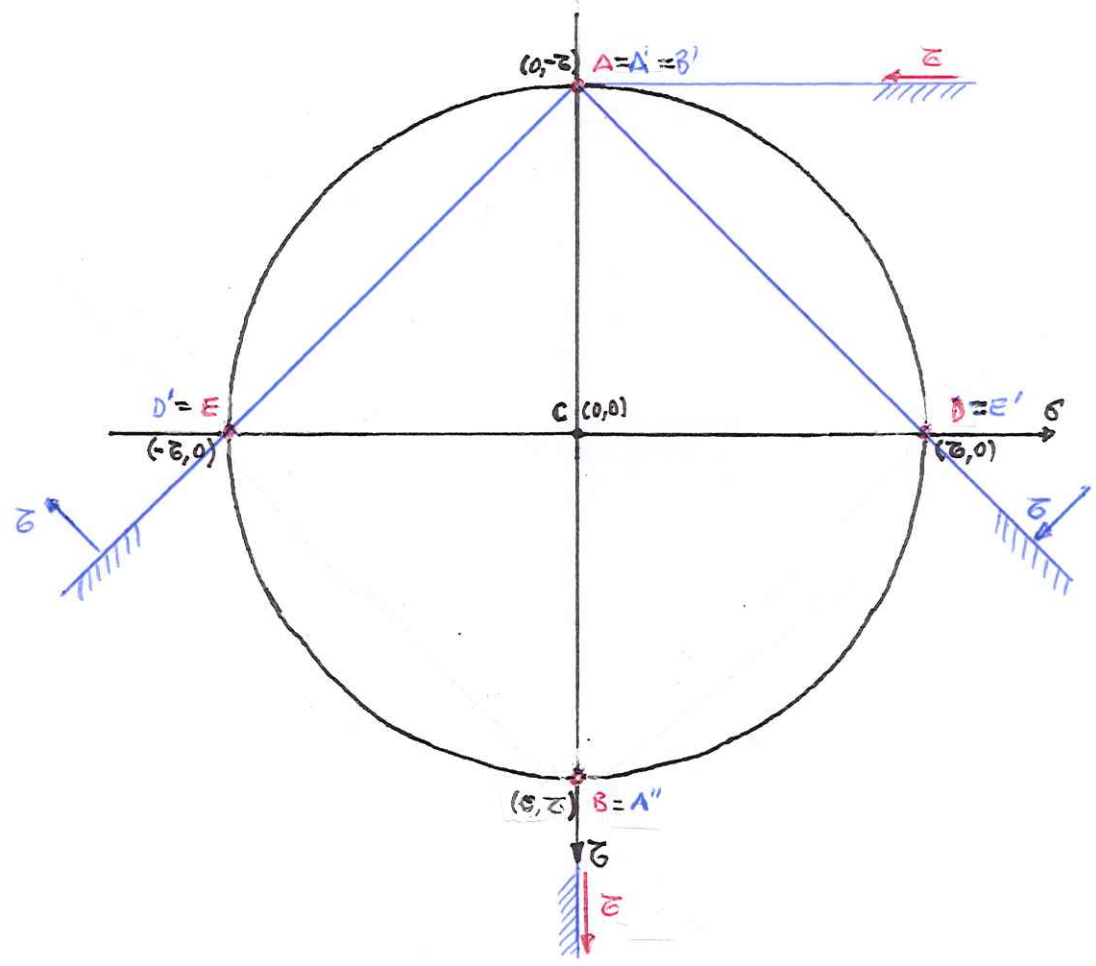
$\sigma_x = 0$

$\sigma_y = 0$

$\tau_{xy} = -\tau$

Centro do círculo: $\sigma_m = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} = \frac{0 + 0}{2} = 0$; $C: (0, 0)$

Ponto A: $(\sigma_x, \tau_{xy}) = (0, -\tau)$



Tensões principais:

$\sigma_1 = +\tau$ (tração)

$\sigma_2 = -\tau$ (compressão)

Tensões de cisalhamento máxima e mínima:

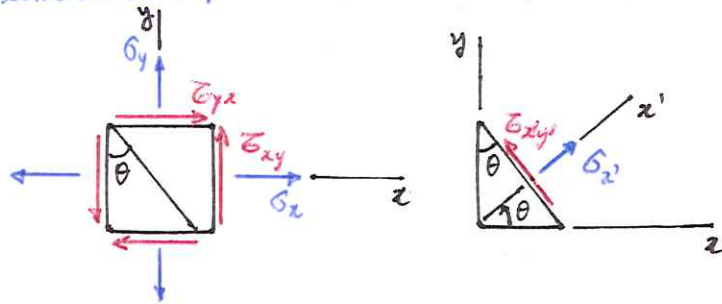
$\tau_{max} = -\tau_{min} = \tau$

$\sigma_3 = \sigma_m = 0$

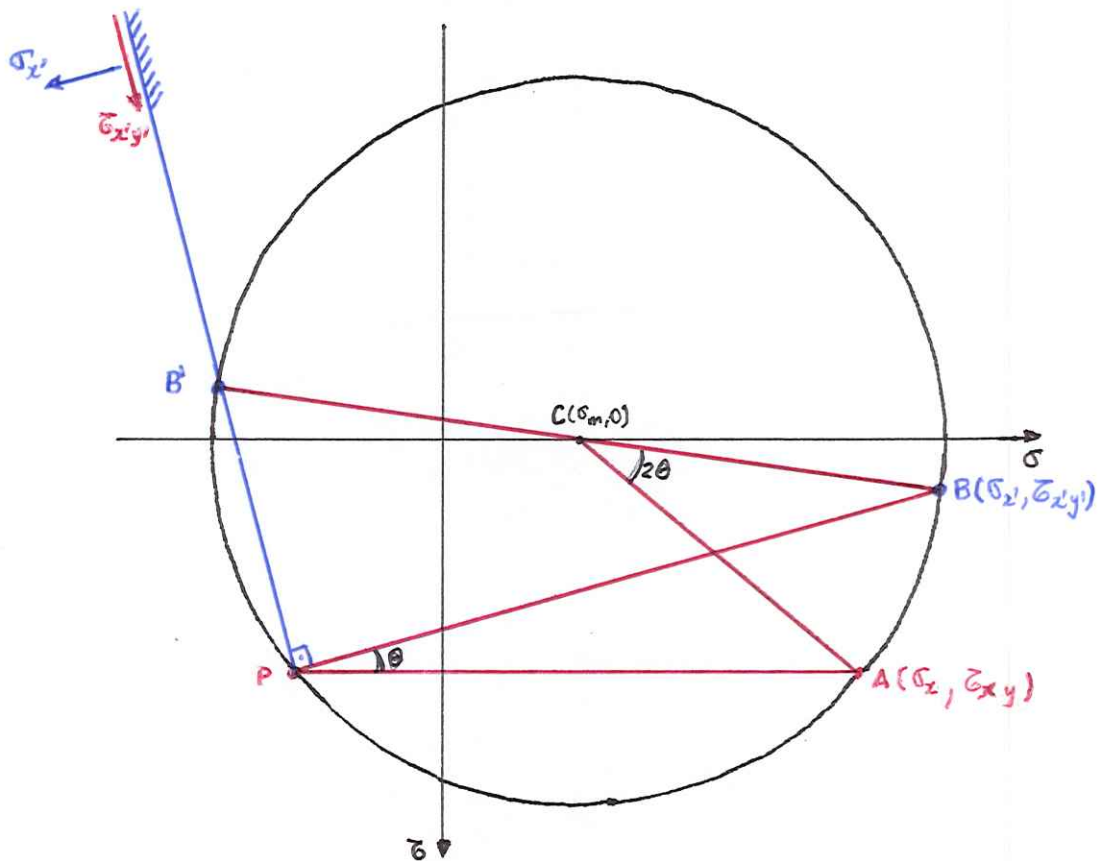
No estado de cisalhamento puro o círculo de Mohr está centrado na origem do sistema de eixos cartesianos.

Viremos agora como identificar graficamente pelo círculo de Mohr o plano onde ocorre um par qualquer de tensão normal e de cisalhamento sobre a circunferência do círculo de Mohr, e, vice-versa, dado um plano, identificar o par de tensão que atua sobre ele.

Suponha um estado plano de tensão qualquer:



e o seu correspondente círculo de Mohr:



Ponto A : (σ_x, τ_{xy})

Pólo P : interseção da paralela ao eixo σ em A com a circunferência.

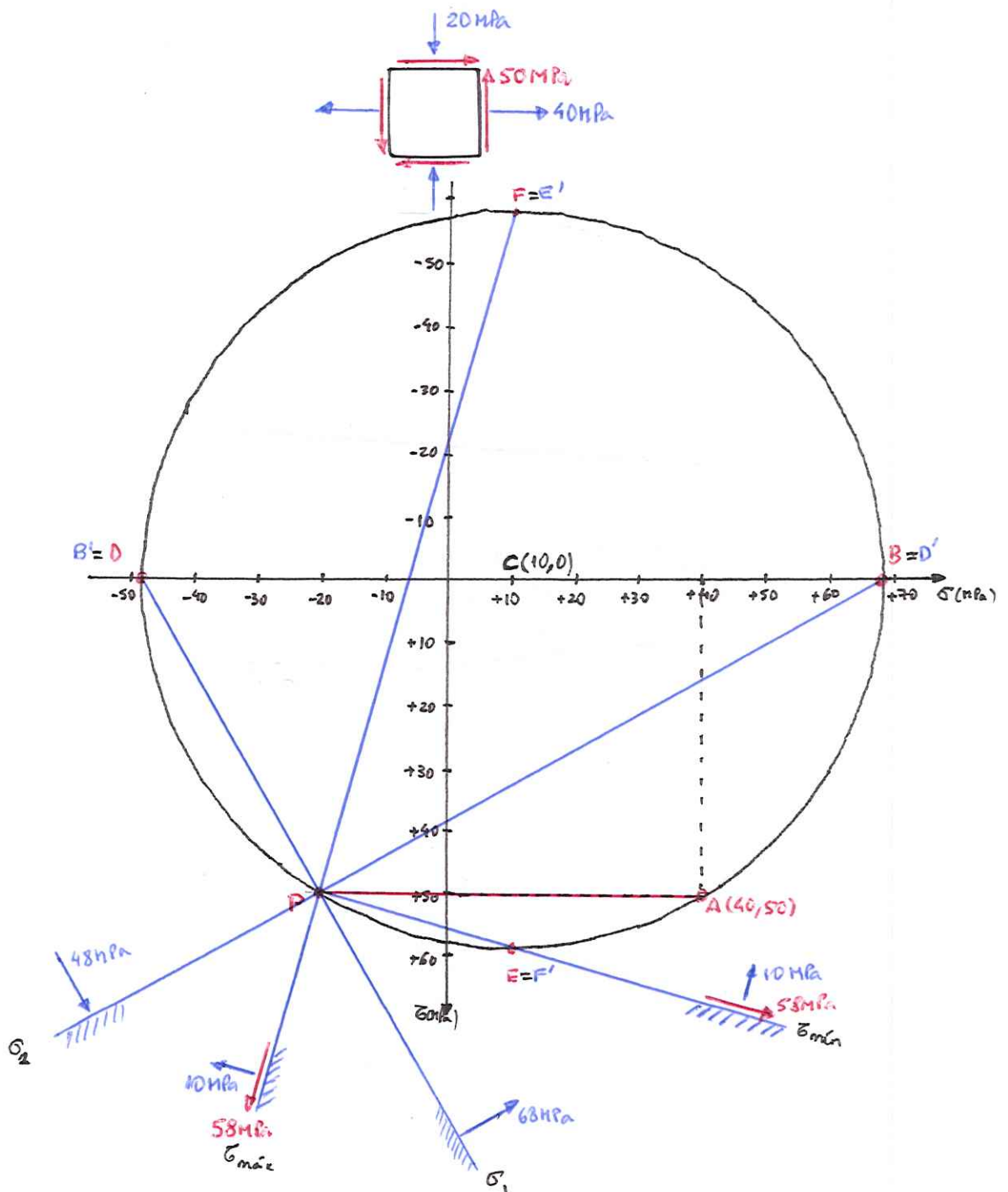
Ponto B : $(\sigma_{x'}, \tau_{x'y'})$

Ponto B' : diametralmente oposto a B.

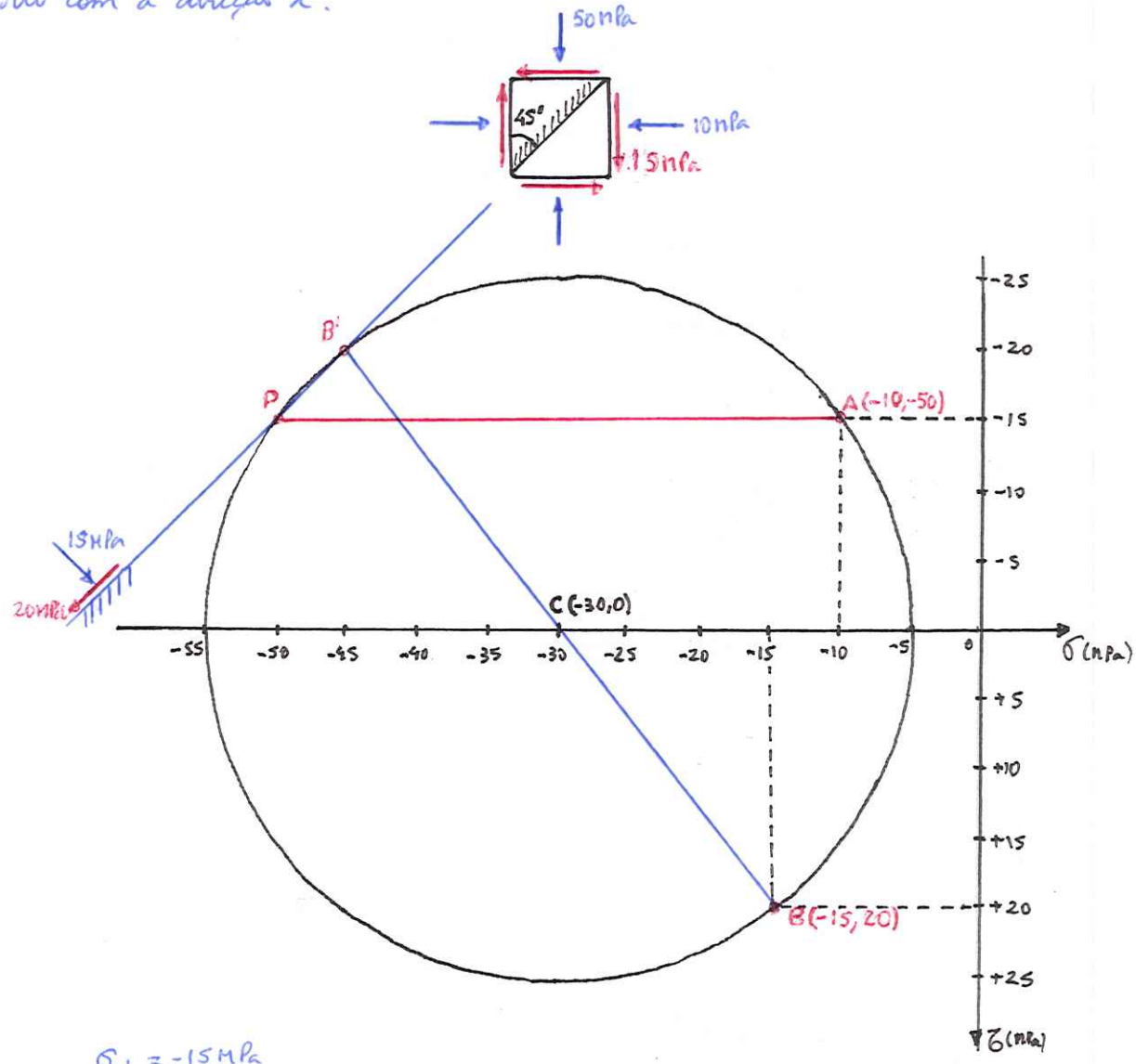
Para obter o plano onde o par de tensões (σ_x', τ_{xy}') ocorre: basta ligar o pólo P a B' por uma reta ϵ , pronto, está determinado o plano.

Para obter o par de tensões (σ_x', τ_{xy}') que ocorre num determinado plano: trace uma paralela ao plano passando pelo pólo P ; onde esta paralela intersecciona a circunferência e o ponto diametralmente oposto a B . Trace uma corda por B' e o centro da circunferência; onde esta reta intersecciona a circunferência e o ponto B cujas ordenadas são as tensões no plano.

Exemplo 10.6: Dado o estado de tensão plano num ponto, determine graficamente as tensões principais e de cisalhamento máxima e os planos onde elas ocorrem.

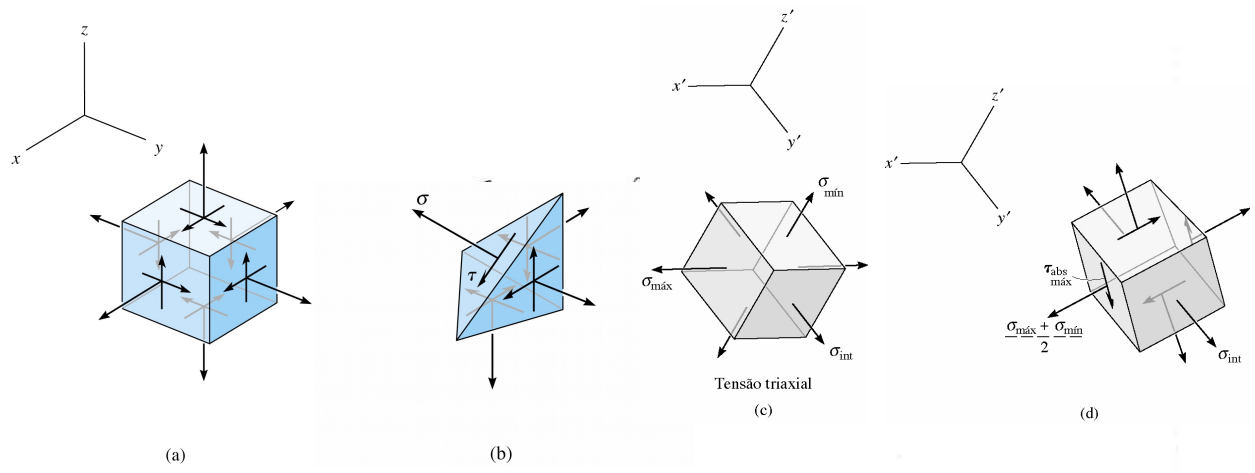


Exemplo 10.7: Dado o estado de tensão plano num ponto, determine graficamente as tensões normal e de cisalhamento no plano cuja normal forma 45° no sentido horário com a direção x .



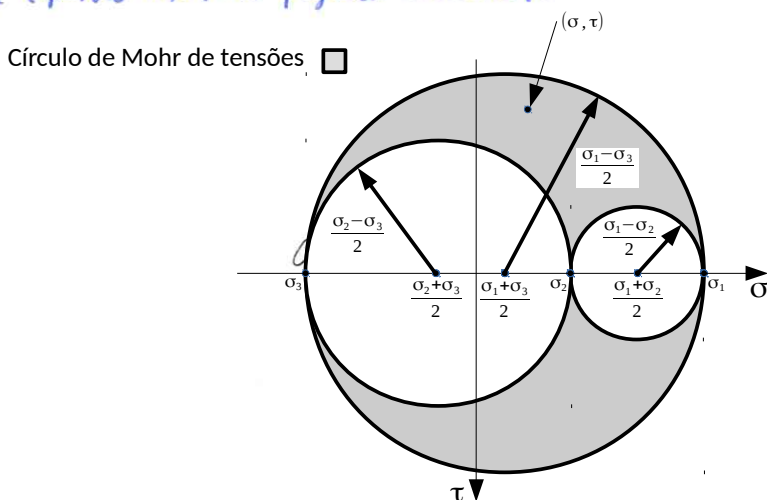
$\sigma_{x'} = -15 \text{ MPa}$
 $\tau_{xy'} = +20 \text{ MPa}$

10.6. TENSÃO DE CISALHAMENTO MÁXIMA ABSOLUTA



O estado de tensão triaxial é o mais geral possível. Como visto, num ponto sob este estado o vetor tração associado a qualquer plano não tem uma direção privilegiada. Nas faces do paralelepípedo infinitesimal envolvendo o ponto, as tensões de cisalhamento têm duas componentes (figura (a) acima). A figura (b) acima mostra as tensões principais em 3 planos ortogonais entre si (diz-se que não há tensões de cisalhamento nesses planos). A figura (d) acima mostra os planos onde ocorrem as tensões máximas absolutas no ponto analisado.

O círculo de Mohr é dado na verdade por 3 circunferências centradas sobre o eixo σ e mutuamente concordantes, conforme a figura abaixo. O par de tensões num plano qualquer pela partícula é um ponto no interior da região achurada no círculo de Mohr (ponto (σ, τ) na figura abaixo).



Se enumerarmos as tensões principais de modo que σ_1 é a máxima, σ_2 é a intermediária e σ_3 a mínima, temos que a tensão de cisalhamento máxima é

$$\sigma_{\max}^{\text{abs}} = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2}$$

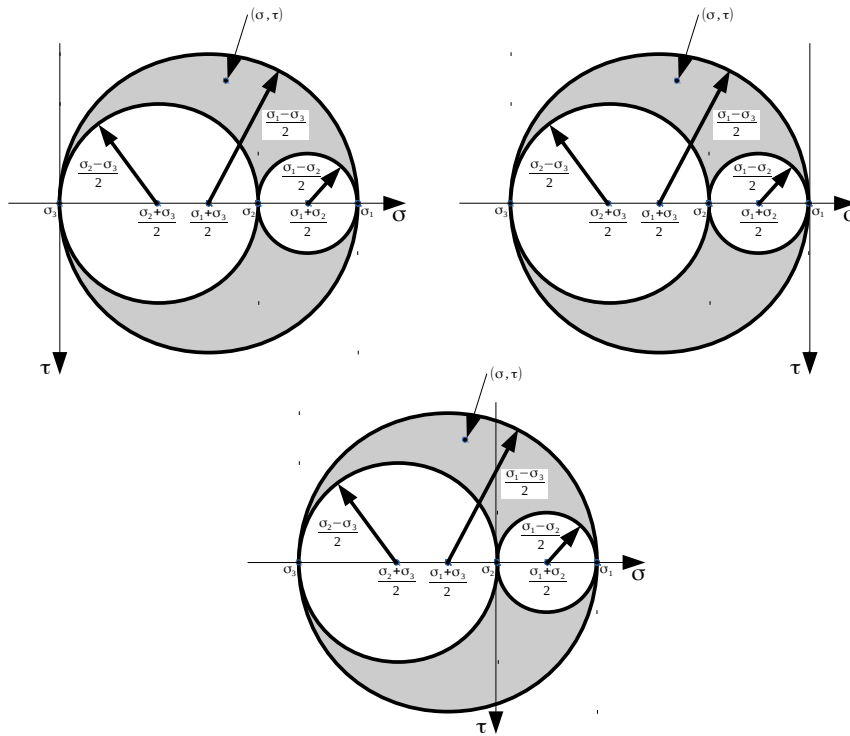
ou seja, é o raio da maior circunferência do círculo de Mohr.

TENSÃO NO PLANO

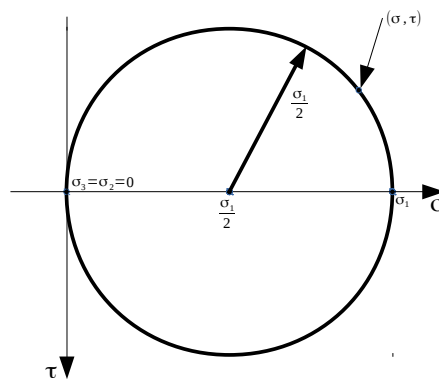
Quando estudamos o círculo de Mohr para o estado plano, omitimos por razões didáticas a existência de uma 3ª tensão principal que ocorre em um plano ortogonal aos planos onde atuam as outras duas tensões principais, a qual é nula (característica do estado plano de tensão). As figuras abaixo mostram o círculo de Mohr completo para um estado de tensão.

Vale observar ainda que o círculo de Mohr do estado uniaxial de tensão reduz a apenas uma circunferência, pois neste caso há duas tensões principais nulas e uma diferente de zero. Neste modo uma circunferência desaparece e as outras duas coincidem. As tensões normal e de cisalhamento num plano qualquer estão representadas num ponto da circunferência.

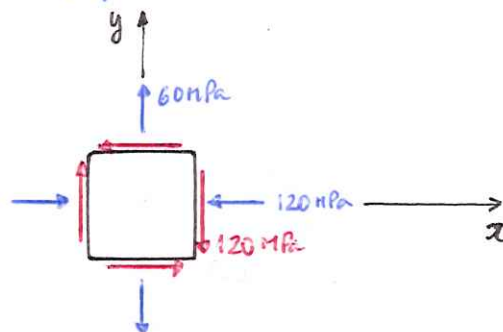
Círculo de Mohr para o estado plano de tensão



Círculo de Mohr para o estado uniaxial de tensão



Exemplo 10.8: Dado o estado de tensão plano num ponto, determine a tensão de cisalhamento máxima absoluta.



Solução: Trata-se de um estado plano de tensão. O plano de tensões é o xy . Uma das tensões principais é nula.

$$\sigma_x = -120 \text{ MPa}$$

$$\sigma_y = +60 \text{ MPa}$$

$$\tau_{xy} = -120 \text{ MPa}$$

As outras duas tensões principais são:

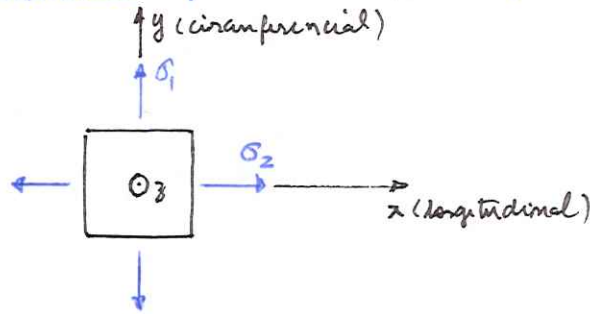
$$\sigma_1 = \frac{-120+60}{2} + \sqrt{\left(\frac{-120-60}{2}\right)^2 + (-120)^2} = -30 + 150 = 120 \text{ MPa}$$

$$\sigma_2 = \frac{-120+60}{2} - \sqrt{\left(\frac{-120-60}{2}\right)^2 + (-120)^2} = -30 - 150 = -180 \text{ MPa}$$

$$\bar{\sigma}_{\max \text{ abs}} = \frac{\sigma_{\max} - \sigma_{\min}}{2} = \frac{120 - (-180)}{2} = 150 \text{ MPa} \quad \blacksquare$$

Exemplo 10.9: Um reservatório de pressão cilíndrico de diâmetro interno 256 mm e espessura de parede 2 mm contém gás à pressão manométrica de 500 kPa. Determine a tensão de cisalhamento absoluta num ponto externo da parede do reservatório.

Solução: Considerando um elemento orientado segundo as direções longitudinal e circunferencial no ponto:



Na face de normal z (face externa), há tensão de compressão devido à ação da pressão atmosférica (100 kPa), que consideraremos desprezível em relação às demais tensões principais.

$$\sigma_1 = p \frac{r}{t} = 500 \cdot 10^3 \frac{0,128}{0,002} = +32 \text{ MPa}$$

$$\sigma_2 = \frac{p \cdot r}{2t} = \frac{500 \cdot 10^3}{2} \cdot \frac{0,128}{0,002} = +16 \text{ MPa}$$

$$\sigma_3 = 0$$

Logo:

$$\bar{\sigma}_{\max \text{ abs}} = \frac{\sigma_{\max} - \sigma_{\min}}{2} = \frac{32 - 0}{2} = 16 \text{ MPa} \quad \blacksquare$$

EXERCÍCIOS PROPOSTOS: 9.7, 9.8, 9.9, 9.12, 9.13, 9.15, 9.16, 9.19, 9.21, 9.22, 9.26, 9.30, 9.36, 9.37, 9.38, 9.42, 9.45, 9.56, 9.58, 9.60, 9.62, 9.64, 9.77, 9.78.