

11.1. DEFORMAÇÃO PLANA

Como visto anteriormente, se tomarmos um segmento material infinitesimal emanando de um ponto segundo uma direção e um outro emanando em uma outra direção diferente da anterior, ambos os segmentos sofrerão deformações normais diferentes; além disso, o ângulo entre esses segmentos se altera da configuração não deformada para a deformada. Isto é consequência do estado de deformação no ponto de onde emanam os segmentos materiais tomados como exemplo.

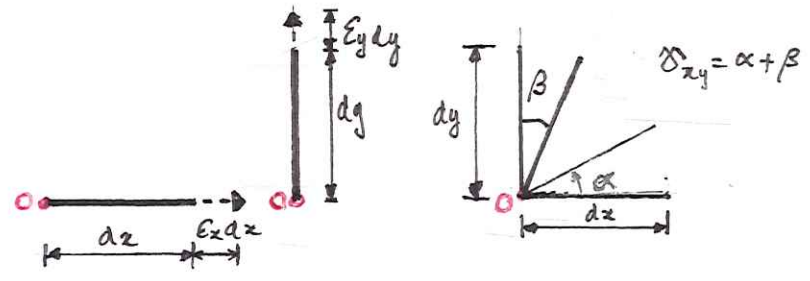


Estudaremos agora o estado de deformação plano, caso em que os segmentos materiais infinitesimais emanando do ponto na configuração não deformada e deformada mantêm-se no mesmo plano material.

Viremos a seguir que a deformação de um segmento infinitesimal qualquer que emana de um ponto se transforma de um módulo análogo ao das tensões num ponto.

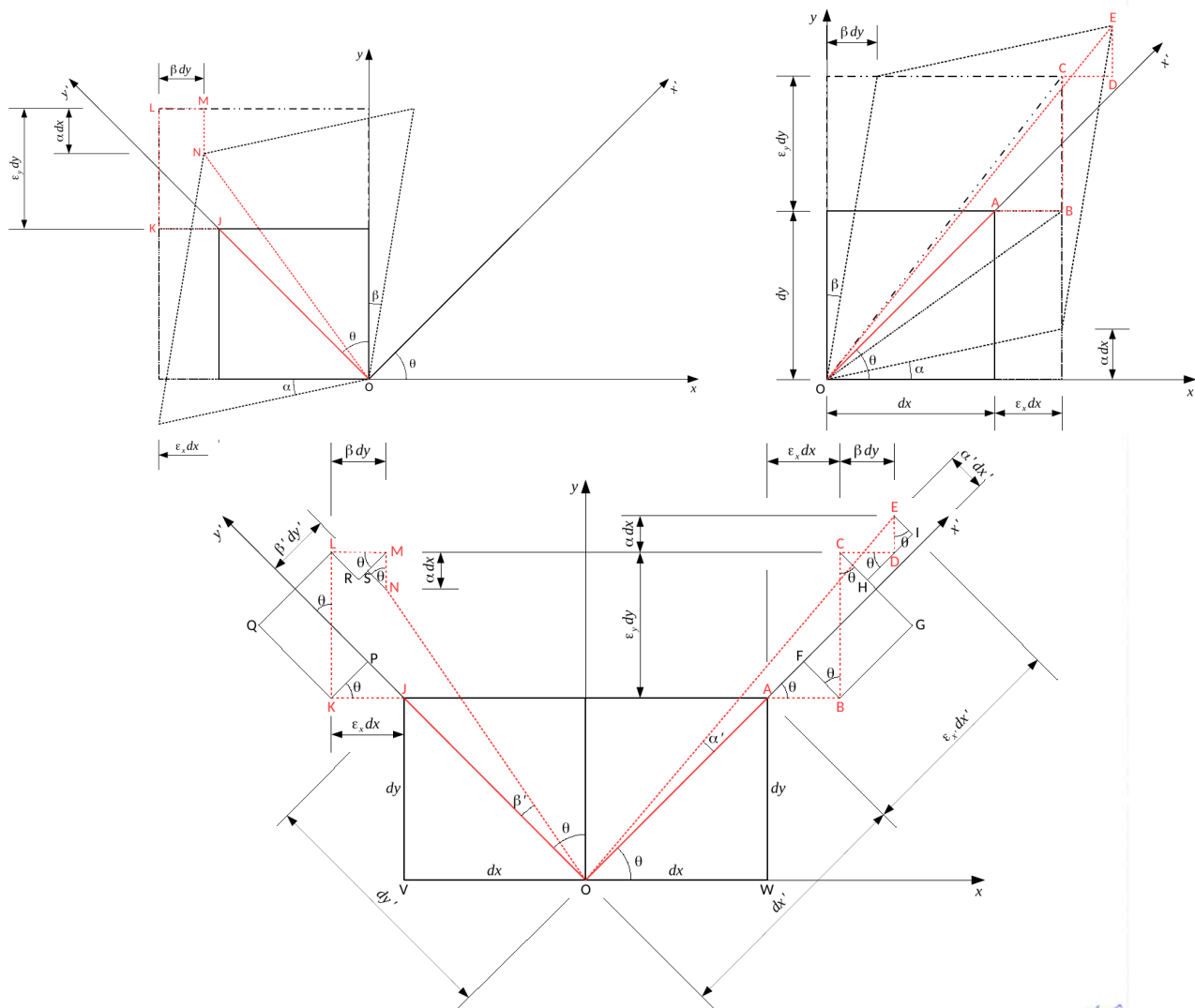
11.2 LEI DE TRANSFORMAÇÃO DO ESTADO PLANO DE DEFORMAÇÃO

Antes de mais nada, consideremos a deformação plana num ponto por meio de dois segmentos materiais infinitesimais emanando segundo as direções x e y de um ponto O :



O segmento em x alonga de $E_x dx$, o em y alonga de $E_y dy$ e o ângulo reto entre os dois segmentos diminui de δ_{xy} .

Agora vamos deduzir a lei de transformação de deformação. Considere dois segmentos materiais infinitesimais ortogonais entre si e orientado segundo os eixos x' e y' , conforme a figura abaixo. Observamos que a extremidade A



do segmento dx' descreve a trajetória $ABCDE$ e o segmento dy' a trajetória $JKLMN$ após o entorno do ponto O sofrer uma deformação normal em x , uma deformação normal em y e uma deformação cisalhante no plano xy , nesta sequência.

A projeção da trajetória $ABCDE$ na direção x' é o alongamento $E_x' dx'$

do segmento material dx' :

$$\begin{aligned}
 E_x' dx' &= \overline{AF} + \overline{BG} + \overline{DH} + \overline{DI} \\
 &= \overline{AB} \cos \theta + \overline{BC} \sin \theta + \overline{CD} \cos \theta + \overline{DE} \sin \theta \\
 &= E_x \cos \theta dx + E_y \sin \theta dy + \beta \cos \theta dy + \alpha \sin \theta dx \\
 E_x' &= E_x \cos \theta \frac{dx}{dx'} + E_y \sin \theta \frac{dy}{dx'} + \beta \cos \theta \frac{dy}{dx'} + \alpha \sin \theta \frac{dx}{dx'}
 \end{aligned}$$

Do $\triangle OAW$ tem-se:

$$\frac{dy}{dx'} = \sin \theta$$

$$\frac{dx}{dx'} = \cos \theta$$

Logo:

$$\begin{aligned}
 E_x' &= E_x \cos^2 \theta + E_y \sin^2 \theta + (\alpha + \beta) \sin \theta \cos \theta \\
 &= E_x \left(\frac{1 + \cos 2\theta}{2} \right) + E_y \left(\frac{1 - \cos 2\theta}{2} \right) + \frac{\gamma_{xy}}{2} \sin 2\theta
 \end{aligned}$$

ou, finalmente:

$$\epsilon_{x'} = \frac{\epsilon_x + \epsilon_y}{2} + \frac{\epsilon_x - \epsilon_y}{2} \cos 2\theta + \frac{\gamma_{xy}}{2} \sin 2\theta$$

A projeção da mesma trajetória ABCDE na direção y' é $\alpha' dx'$:

$$\alpha' dx' = -\overline{BF} + \overline{CG} - \overline{CH} + \overline{EI}$$

$$= -\overline{AB} \sin \theta + \overline{BC} \cos \theta - \overline{CD} \sin \theta + \overline{DE} \cos \theta$$

$$= -\epsilon_x \sin \theta dx + \epsilon_y \cos \theta dy - \beta \sin \theta dy + \alpha \cos \theta dx$$

$$\alpha' = -\epsilon_x \sin \theta \frac{dx}{dx'} + \epsilon_y \cos \theta \frac{dy}{dx'} - \beta \sin \theta \frac{dy}{dx'} + \alpha \cos \theta \frac{dx}{dx'}$$

$$= -\epsilon_x \sin \theta \cos \theta + \epsilon_y \sin \theta \cos \theta - \beta \sin^2 \theta + \alpha \cos^2 \theta$$

A projeção da trajetória JKLMN na direção x' é $\beta' dy'$:

$$\beta' dy' = -\overline{KP} + \overline{LQ} + \overline{NR} - \overline{NS}$$

$$= -\overline{JK} \cos \theta + \overline{KL} \sin \theta + \overline{LM} \cos \theta - \overline{MN} \sin \theta$$

$$= -\epsilon_x \cos \theta dx + \epsilon_y \sin \theta dy + \beta \cos \theta dy - \alpha \sin \theta dx$$

$$\beta' = -\epsilon_x \cos \theta \frac{dx}{dy'} + \epsilon_y \sin \theta \frac{dy}{dy'} + \beta \cos \theta \frac{dy}{dy'} - \alpha \sin \theta \frac{dx}{dy'}$$

$$= -\epsilon_x \cos \theta \sin \theta + \epsilon_y \sin \theta \cos \theta + \beta \cos^2 \theta - \alpha \sin^2 \theta$$

Logo:

$$\gamma_{x'y'} = \alpha' + \beta' = -2\epsilon_x \sin \theta \cos \theta + 2\epsilon_y \sin \theta \cos \theta + \alpha(\cos^2 \theta - \sin^2 \theta) + \beta(\cos^2 \theta - \sin^2 \theta)$$

$$= -(\epsilon_x - \epsilon_y) \sin 2\theta + \gamma_{xy} \cos 2\theta$$

ou, finalmente:

$$\frac{\gamma_{x'y'}}{2} = -\left(\frac{\epsilon_x - \epsilon_y}{2}\right) \sin 2\theta + \frac{\gamma_{xy}}{2} \cos 2\theta$$

Um π , pois, as equações de transformação de deformações:

$$\epsilon_{x'} = \frac{\epsilon_x + \epsilon_y}{2} + \frac{\epsilon_x - \epsilon_y}{2} \cos 2\theta + \frac{\gamma_{xy}}{2} \sin 2\theta$$

$$\frac{\gamma_{x'y'}}{2} = -\left(\frac{\epsilon_x - \epsilon_y}{2}\right) \sin 2\theta + \frac{\gamma_{xy}}{2} \cos 2\theta$$

Vale a pena comparar estas equações com as de transformações de tensões. Com isto observamos uma grande semelhança entre elas. Nelas, $\epsilon_x, \epsilon_y, \frac{\delta_{xy}}{2}$ são intercambiáveis por $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$, respectivamente.

O estado de deformação, tendo a mesma natureza matemática que o estado de tensão, tem um comportamento análogo a este último e, portanto, tudo o que foi visto para o estado de tensão pode-se aplicar ao estado de deformação: deformações principais, deformações axiais máximas e mínimas e círculo de Mohr.

11.3. DEFORMAÇÕES PRINCIPAIS E DEFORMAÇÕES CILHANTES MÁXIMA E MÍNIMA NO PLANO

11.3.1. Deformações principais no plano

Por analogia às Tensões principais as direções de deformações principais verificam a equação:

$$\text{tg } 2\theta_p = \frac{\delta_{xy}}{\epsilon_x - \epsilon_y}$$

cujas raízes são: $\theta_{p1} + \theta_{p2} = \theta_{p1} + 90^\circ$

As deformações principais são:

$$\epsilon_1 = \frac{\epsilon_x + \epsilon_y}{2} + \sqrt{\left(\frac{\epsilon_x - \epsilon_y}{2}\right)^2 + \left(\frac{\delta_{xy}}{2}\right)^2}$$

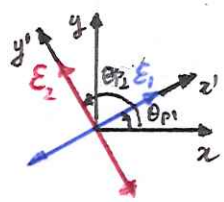
$$\epsilon_2 = \frac{\epsilon_x + \epsilon_y}{2} - \sqrt{\left(\frac{\epsilon_x - \epsilon_y}{2}\right)^2 + \left(\frac{\delta_{xy}}{2}\right)^2}$$

Em ambas direções a deformação cisalhante é nula:

$$\delta_{x'y'} = 0$$

Temos ainda que a soma das deformações normais de quaisquer dois segmentos materiais infinitesimais ortogonais entre si emanando de um ponto comum é igual a uma constante:

$$\epsilon_{x'} + \epsilon_{y'} = \epsilon_1 + \epsilon_2 = \text{cte}$$



11.3.2 Deformação cisalhante máxima no plano

Na análise da tensão de cisalhamento máxima as direções de deformação cisalhante máxima e mínima verificam a equação:

$$\operatorname{tg} 2\theta_s = - \frac{\epsilon_x - \epsilon_y}{\gamma_{xy}}$$

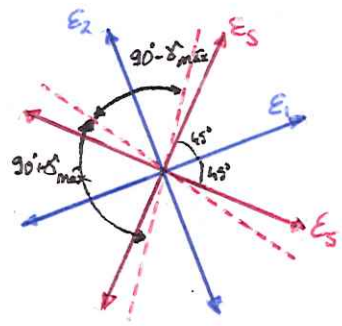
cujas raízes são:

$$\theta_{s1} \quad \text{e} \quad \theta_{s2} = \theta_{s1} + 90^\circ$$

Além disto, as direções de deformações principais e de cisalhamento máximo e mínimo estão inclinadas de 45° entre si:

$$\theta_{s1} = \theta_{p1} + 45^\circ$$

$$\theta_{s2} = \theta_{p2} + 45^\circ$$



As deformações cisalhantes máxima e mínima são:

$$\gamma_{\max} = -\gamma_{\min} = \sqrt{\left(\frac{\epsilon_x - \epsilon_y}{2}\right)^2 + \left(\frac{\gamma_{xy}}{2}\right)^2}$$

e nessas direções as deformações normais são iguais:

$$\epsilon_s = \epsilon_x'(\theta_{s1}) = \epsilon_x'(\theta_{s2}) = \frac{\epsilon_x + \epsilon_y}{2}$$

Vale observar ainda que:

$$\gamma_{\max} = \epsilon_1 - \epsilon_2$$

11.3.3. Convenção de sinal para deformação

Para deformação normal:

alongamento: +

encurtamento: -

Para deformação cisalhante:

diminuição do ângulo reto: +

aumento do ângulo reto: -

Exemplo 11.1: Um elemento material infinitesimal num ponto está sujeito ao estado plano de deformação dado por $\epsilon_x = 500 \cdot 10^{-6}$, $\epsilon_y = -300 \cdot 10^{-6}$ e $\gamma_{xy} = 200 \cdot 10^{-6}$. Determine as deformações de um elemento material infinitesimal inclinado de 30° no sentido horário em relação ao eixo x .

Solução

Neste caso $\theta = -30^\circ$

$$\epsilon_{x'}(-30^\circ) = \frac{500 + (-300)}{2} + \frac{500 - (-300)}{2} \cos(-60^\circ) + \frac{200}{2} \sin(-60^\circ)$$

$$\epsilon_{x'}(-30^\circ) = 213 \cdot 10^{-6}$$

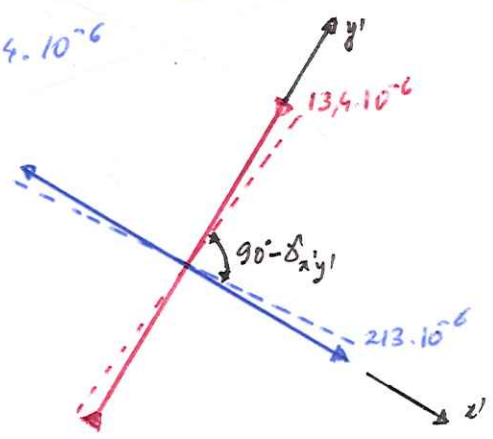
$$\gamma_{x'y'}(-30^\circ) = -(500 - (-300)) \sin(-60^\circ) + 200 \cos(-60^\circ)$$

$$\gamma_{x'y'}(-30^\circ) = 793 \cdot 10^{-6}$$

Na direção $\theta = -30^\circ + 90^\circ = 60^\circ$:

$$\epsilon_{x'}(60^\circ) = \frac{500 + (-300)}{2} + \frac{500 - (-300)}{2} \cos(120^\circ) + \frac{200}{2} \sin(120^\circ)$$

$$\epsilon_{x'}(60^\circ) = -13,4 \cdot 10^{-6}$$



Exemplo 11.2 Um elemento material infinitesimal num ponto está sujeito ao estado plano de deformação dado por $\epsilon_x = -350 \cdot 10^{-6}$, $\epsilon_y = 200 \cdot 10^{-6}$ e $\gamma_{xy} = 80 \cdot 10^{-6}$. Determine as deformações principais no ponto e as respectivas direções.

Solução

Primeiramente vamos determinar as direções de deformação principal:

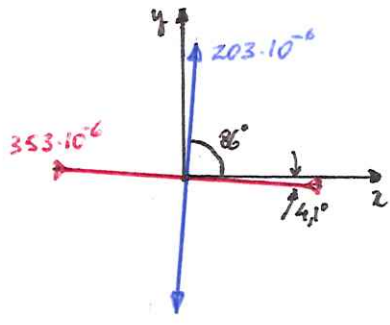
$$\tan 2\theta_p = \frac{80}{-350 - 200} = -0,145$$

$$\theta_{p1} = -4,1^\circ$$

$$\theta_{p2} = -4,1 + 90^\circ = 86^\circ$$

$$\epsilon_{x'}(-4,1^\circ) = \frac{-350 + 200}{2} + \frac{-350 - 200}{2} \cos(-8,2^\circ) + \frac{80}{2} \sin(-8,2^\circ) = -353 \cdot 10^{-6} = \epsilon_2$$

$$\epsilon_{x'}(86^\circ) = \frac{-350 + 200}{2} + \frac{-350 - 200}{2} \cos(172^\circ) + \frac{80}{2} \sin(172^\circ) = +203 \cdot 10^{-6} = \epsilon_1$$



Exemplo 11.3 Um elemento material infinitesimal num ponto está sujeito ao estado plano de deformação dado por $\epsilon_x = -250 \cdot 10^{-6}$, $\epsilon_y = -200 \cdot 10^{-6}$ e $\delta_{xy} = 150 \cdot 10^{-6}$. Determine a deformação cisalhante máxima e as direções em que ela ocorre.

Solução: Primeiramente vamos determinar as direções onde ela ocorre:

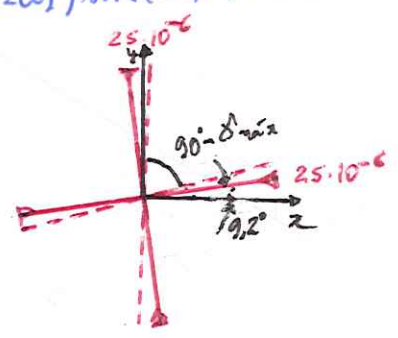
$$\tan 2\theta_s = - \frac{-250 - (-200)}{150} = \frac{1}{3}$$

$$\theta_{s1} = 9,2^\circ$$

$$\theta_{s2} = 9,2^\circ + 90 = 99,2^\circ$$

$$\delta'_{xy}(9,2^\circ) = (-250 - (-200)) \sin(18,4^\circ) + 150 \cos(18,4^\circ) = +158 \cdot 10^{-6} = \delta'_{\max}$$

$$\delta'_{xy}(99,2^\circ) = -(-250 - (-200)) \sin(198,4^\circ) + 150 \cos(198,4^\circ) = -158 \cdot 10^{-6}$$



$$\epsilon_s = \frac{-250 - (-200)}{2} = -25 \cdot 10^{-6}$$

11.4. CÍRCULO DE MOHR DO ESTADO PLANO DE DEFORMAÇÃO

Por analogia ao estado de tensão plano, a equação da circunferência no plano $\epsilon_x \frac{\delta}{2} \epsilon'$:

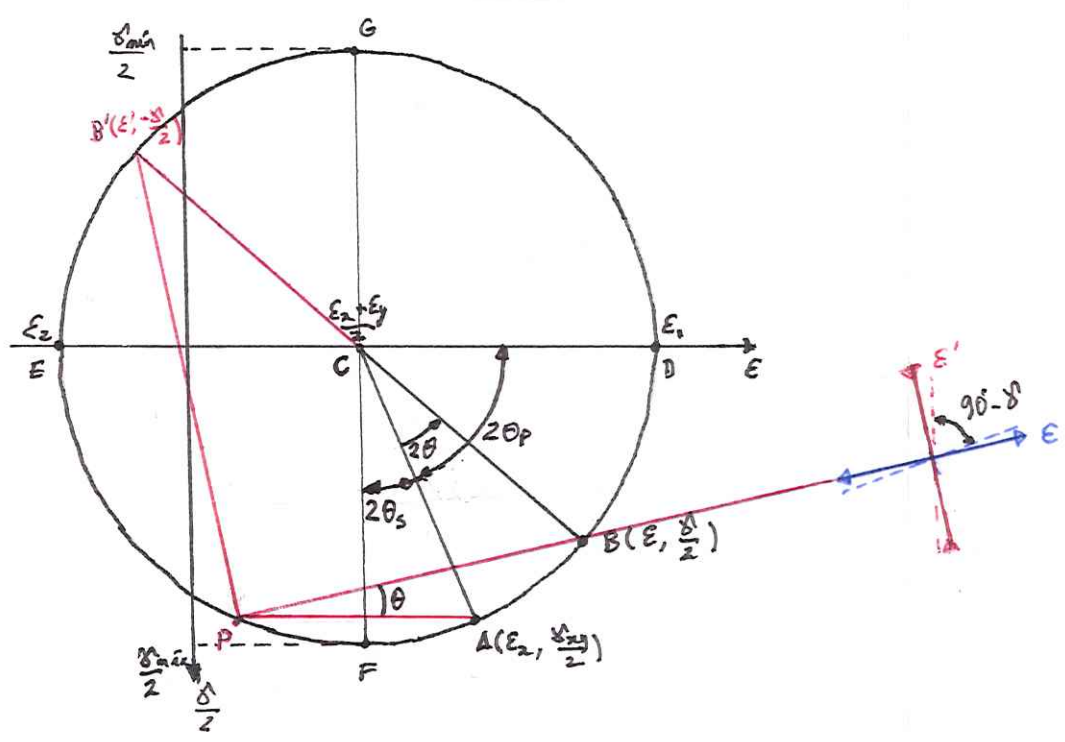
$$\left(\epsilon - \frac{\epsilon_x + \epsilon_y}{2} \right)^2 + \left(\frac{\delta}{2} \right)^2 = \left(\frac{\epsilon_x - \epsilon_y}{2} \right)^2 + \left(\frac{\delta_{xy}}{2} \right)^2$$

O centro e o raio desta circunferência são, respectivamente:

$$C: \left(\frac{\epsilon_x + \epsilon_y}{2}, 0 \right)$$

$$R = \sqrt{\left(\frac{\epsilon_x - \epsilon_y}{2} \right)^2 + \left(\frac{\delta_{xy}}{2} \right)^2}$$

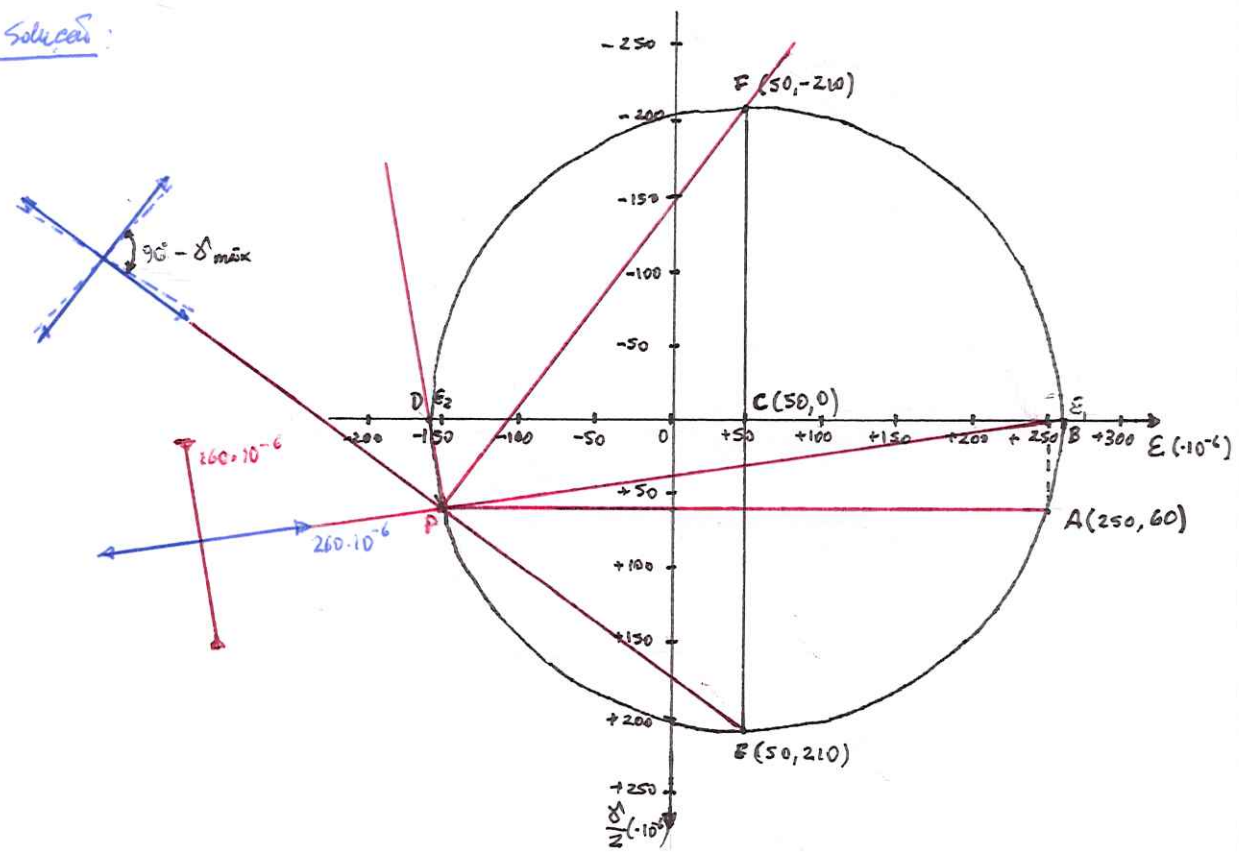
A construção do círculo de Mohr para o estado plano de deformação é análoga ao do estado plano de tensão. Deve-se apenas ter cuidado que o eixo das ordenadas é $\frac{\delta}{2}$.



- P : polo.
- B' : ponto diametralmente oposto a $B(\epsilon_y, \frac{\delta}{2})$.
- \vec{PB} : direção da deformação normal ϵ .
- \vec{PB}' : direção da deformação normal ϵ' .

Exemplo 11.4: O estado plano de deformação num ponto é representado pelas componentes $\epsilon_x = 250 \cdot 10^{-6}$, $\epsilon_y = -150 \cdot 10^{-6}$ e $\delta_{xy} = 120 \cdot 10^{-6}$. Determine graficamente pelo círculo de Mohr as deformações principais e o valor máximo e as respectivas direções.

Solução:



$$A: (250, 60)$$

$$C: (50, 0)$$

Do gráfico:

$$E_1 = 260 \cdot 10^{-6}$$

$$E_2 = -160 \cdot 10^{-6}$$

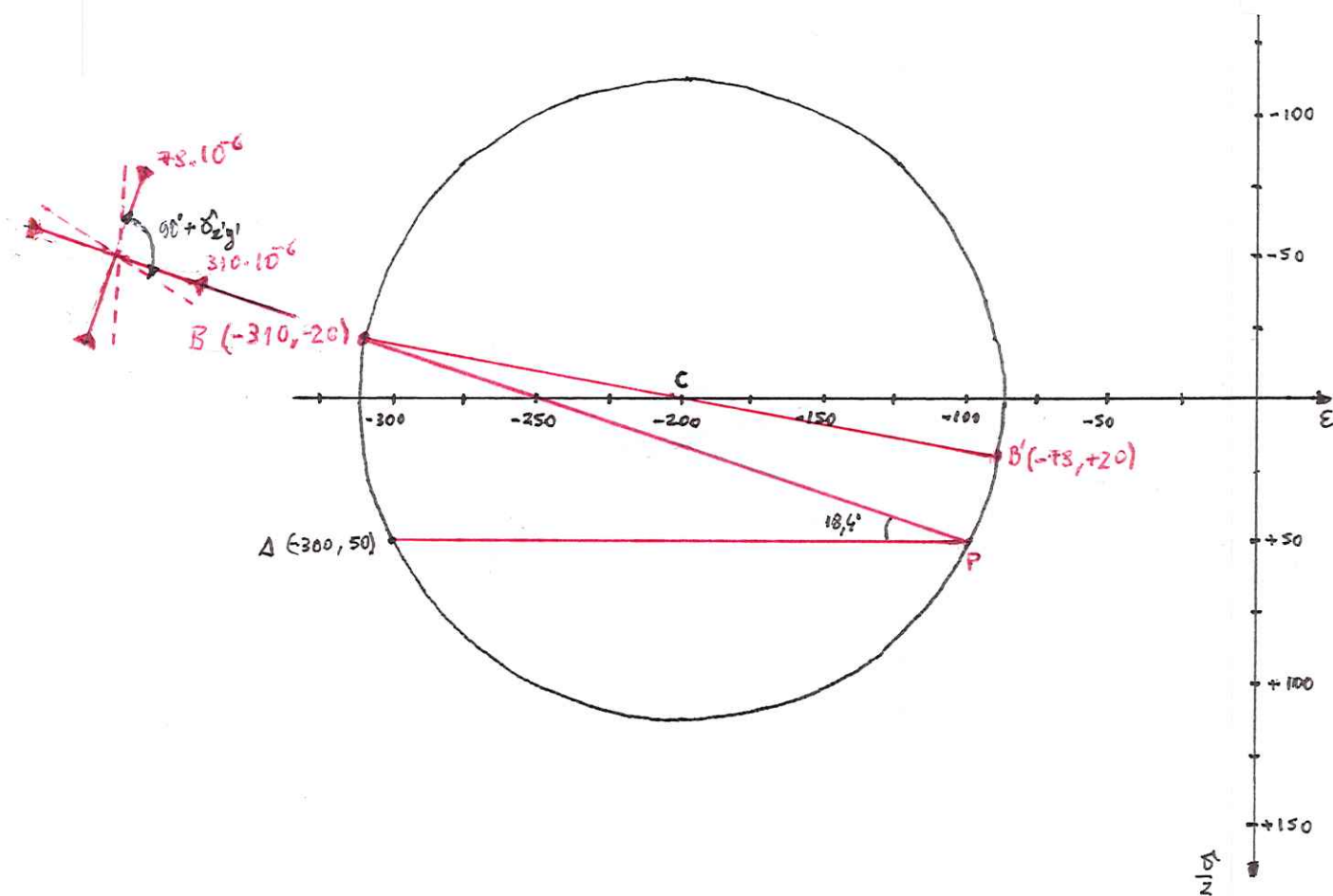
$$\gamma_{\max} = 420 \cdot 10^{-6}$$

Exemplo 11.5: O estado plano de deformação num ponto é representado sobre um elemento que tem as componentes $E_x = -300 \cdot 10^{-6}$, $E_y = -100 \cdot 10^{-6}$, $\gamma_{xy} = 100 \cdot 10^{-6}$. Determine o estado de deformação de um elemento orientado a $18,4^\circ$ em sentido horário em relação ao eixo x pelo círculo de Mohr. ($\tan 18,4^\circ = \frac{1}{3}$)

Solução:

$$C: (-200, 0)$$

$$A: (-300, 50)$$



Do gráfico:

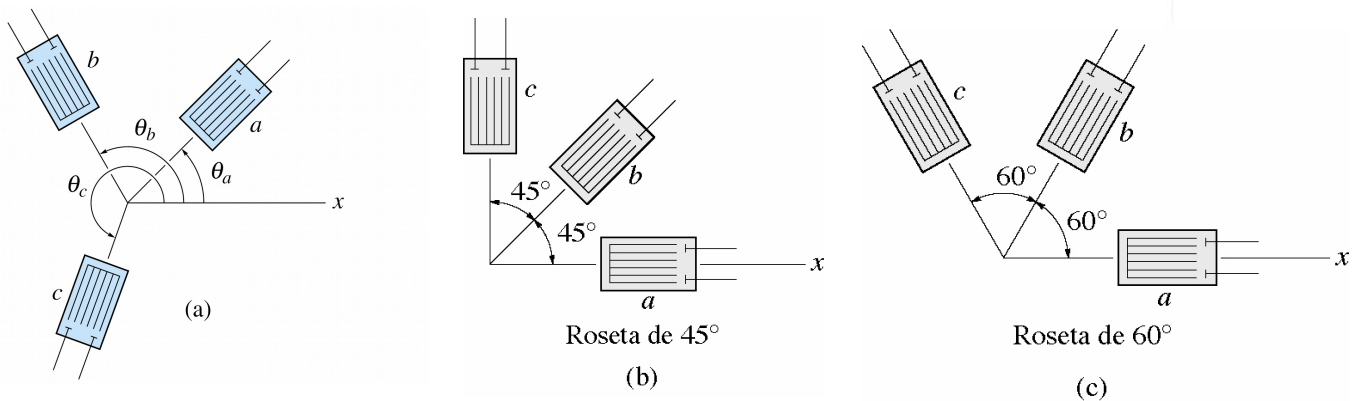
$$E_x' = -310 \cdot 10^{-6}$$

$$E_y' = -78 \cdot 10^{-6}$$

$$\gamma'_{xy} = -40 \cdot 10^{-6}$$

Na superfície livre de uma peça o estado de tensão é plano (o plano de tensão é o plano tangente à superfície da peça no ponto). No entanto, o estado de deformação não é plano. Mas isto não é problema para medir o estado de tensão por meio de três extensômetros dispostos na vizinhança do ponto onde se deseja realizar a medição. Esse arranjo dos extensômetros é chamado de roseta de deformação e a disposição dos extensômetros entre si é padronizada para facilitar os cálculos que levam ao conhecimento do estado de tensão. A figura abaixo ilustra rosetas com arranjo dos extensômetros a 45° e 60° .

Slides cap. 10 b 10.24-10.26



O extensômetro (strain-gage) é um dispositivo formado por um filamento metálico colado a uma membrana muito fina e flexível. Quando o extensômetro é colado à superfície da peça, o filamento se deforma junto com a superfície da peça, fazendo com que a resistência elétrica do extensômetro varie. Como há uma correlação entre a tensão elétrica nos terminais do extensômetro e a sua deformação segundo o eixo do extensômetro, é possível medir a deformação segundo esse eixo.

Viremos agora como relacionar as medidas nos três extensômetros com as deformações normais e cisalhantes segundo os eixos x e y . Considerando um arranjo qualquer dos extensômetros (item (a) da figura acima) temos:

$$E_a = \frac{E_x + E_y}{2} + \frac{E_x - E_y}{2} \cos 2\theta_a + \frac{\gamma_{xy}}{2} \sin 2\theta_a$$

$$E_b = \frac{E_x + E_y}{2} + \frac{E_x - E_y}{2} \cos 2\theta_b + \frac{\gamma_{xy}}{2} \sin 2\theta_b$$

$$E_c = \frac{E_x + E_y}{2} + \frac{E_x - E_y}{2} \cos 2\theta_c + \frac{\gamma_{xy}}{2} \sin 2\theta_c$$

São três equações onde as incógnitas são E_x , E_y e γ_{xy} , pois E_a , E_b , E_c , θ_a , θ_b e θ_c são conhecidos. Resolvendo um sistema, obtemos as deformações desejadas, E_x , E_y e γ_{xy} .

Para os arranjos padronizados a 45° e a 60° temos respectivamente:

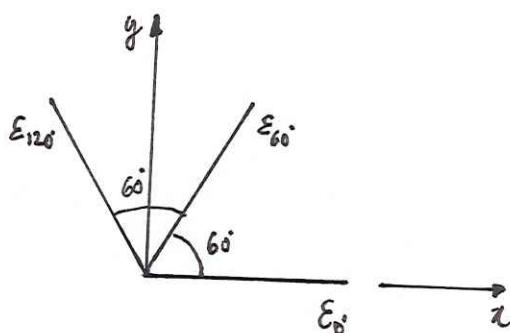
$$\begin{aligned} \epsilon_x &= \epsilon_a \\ \epsilon_y &= \epsilon_c \\ \gamma_{xy} &= 2\epsilon_b - (\epsilon_a + \epsilon_c) \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \epsilon_x &= \epsilon_a \\ \epsilon_y &= \frac{2\epsilon_b + 2\epsilon_c - \epsilon_a}{3} \\ \gamma_{xy} &= \frac{2\sqrt{3}}{3} (\epsilon_b - \epsilon_c) \end{aligned}$$

Exemplo 11.6: As medidas de deformação nos extensômetros de uma roleta a 60° colada num ponto da superfície de uma peça são $\epsilon_{0^\circ} = 60 \cdot 10^{-6}$, $\epsilon_{60^\circ} = 135 \cdot 10^{-6}$ e $\epsilon_{120^\circ} = 264 \cdot 10^{-6}$. Determine as deformações principais no plano da superfície e as direções em que elas ocorrem.

Solução:



$$\begin{aligned} \epsilon_x &= 60 \cdot 10^{-6} \\ \epsilon_y &= \frac{2 \cdot 135 + 2 \cdot 264 - 60}{3} = 246 \cdot 10^{-6} \\ \gamma_{xy} &= \frac{2\sqrt{3}}{3} (135 - 264) = -149 \cdot 10^{-6} \end{aligned}$$

Direções principais de deformação:

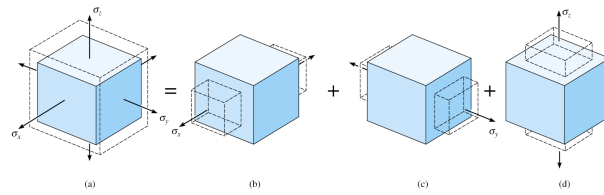
$$\operatorname{tg} 2\theta_p = \frac{-149}{60 - 246} = 0,788$$

$$\theta_{p1} = 19,1^\circ$$

$$\theta_{p2} = 19,1^\circ + 90 = 109,1^\circ$$

$$\epsilon_{x'}(19,1^\circ) = \frac{60 + 246}{2} + \frac{60 - 246}{2} \cos(38,2^\circ) - \frac{149}{2} \sin(38,2^\circ) = 34 \cdot 10^{-6} = \epsilon_2$$

$$\epsilon_{x'}(109,1^\circ) = \frac{60 + 246}{2} + \frac{60 - 246}{2} \cos(218,2^\circ) - \frac{149}{2} \sin(218,2^\circ) = 272 \cdot 10^{-6} = \epsilon_1$$



Considere um elemento prismático infinitesimal orientado segundo x, y, z e sujeito a tensões normais nas seis faces. Pelo princípio da superposição, o carregamento do elemento pode ser decomposto em três estados de tensões uniaxiais, conforme a figura acima. Pelo princípio da superposição, a deformação normal na direção x será:

$$\epsilon_x = \frac{\sigma_x}{E} - \nu \frac{\sigma_y}{E} - \nu \frac{\sigma_z}{E}$$

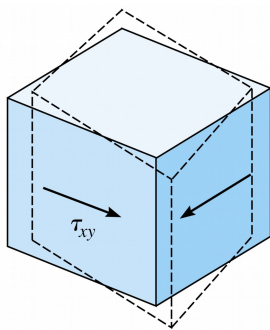
na direção y :

$$\epsilon_y = -\nu \frac{\sigma_x}{E} + \frac{\sigma_y}{E} - \nu \frac{\sigma_z}{E}$$

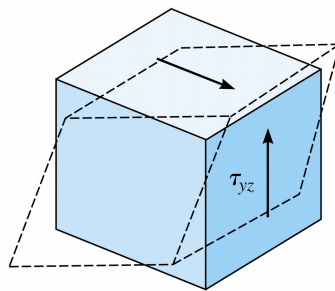
e na direção z :

$$\epsilon_z = -\nu \frac{\sigma_x}{E} - \nu \frac{\sigma_y}{E} + \frac{\sigma_z}{E}$$

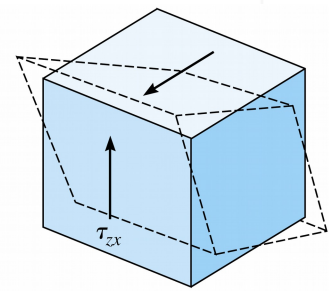
slides cap.10.C 10.9-10.11



(a)



(b)



(c)

Por outro lado, o mesmo elemento prismático submetido ao esalhamento puro nos planos xy, xz e yz simultaneamente (conforme a figura acima) levam a:

$$\gamma_{xy} = \frac{\sigma_{xy}}{G}$$

$$\gamma_{xz} = \frac{\sigma_{xz}}{G}$$

$$\gamma_{yz} = \frac{\sigma_{yz}}{G}$$

As seis equações acima podem ser escritas matricialmente como:

$$\begin{pmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{zx} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{E} & -\frac{\nu}{E} & -\frac{\nu}{E} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu}{E} & \frac{1}{E} & -\frac{\nu}{E} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu}{E} & -\frac{\nu}{E} & \frac{1}{E} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & G & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & G & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & G \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \tau_{xy} \\ \tau_{yz} \\ \tau_{zx} \end{pmatrix}$$

A sua forma inversa é:

$$\begin{pmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \tau_{xy} \\ \tau_{yz} \\ \tau_{zx} \end{pmatrix} = \frac{E}{(2\nu-1)(1+\nu)} \begin{bmatrix} \nu-1 & -\nu & -\nu & 0 & 0 & 0 \\ -\nu & \nu-1 & -\nu & 0 & 0 & 0 \\ -\nu & -\nu & \nu-1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & G & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & G & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & G \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{zx} \end{pmatrix}$$

Ambas as equações acima expressam a lei de Hooke generalizada para um material linear elástico isotrópico.

11.6.1. Relações entre tensões e deformações principais para material linear elástico isotrópico

A deformação axialmente nas direções de deformação principais são nulas. Logo, pela lei de Hooke generalizada as tensões de cisalhamento em planos cuja normal coincide com as direções de deformação principal são nulas. Consequentemente as direções de tensões principais coincidem com as direções de deformação principais.

Sejam σ_1, σ_2 e σ_3 as tensões principais num ponto. Então, pela lei de Hooke generalizada:

$$\varepsilon_1 = \frac{\sigma_1}{E} - \frac{\nu}{E} \sigma_2 - \frac{\nu}{E} \sigma_3$$

$$\varepsilon_2 = -\frac{\nu}{E} \sigma_1 + \frac{\sigma_2}{E} - \frac{\nu}{E} \sigma_3$$

$$\varepsilon_3 = -\frac{\nu}{E} \sigma_1 - \frac{\nu}{E} \sigma_2 + \frac{\sigma_3}{E}$$

$$\sigma_1 = \frac{E}{(2\nu-1)(1+\nu)} (\nu-1)\epsilon_1 - \nu\epsilon_2 - \nu\epsilon_3$$

$$\sigma_2 = \frac{E}{(2\nu-1)(1+\nu)} (-\nu\epsilon_1 + (\nu-1)\epsilon_2 - \nu\epsilon_3)$$

$$\sigma_3 = \frac{E}{(2\nu-1)(1+\nu)} (-\nu\epsilon_1 - \nu\epsilon_2 + (\nu-1)\epsilon_3)$$

11.6.2. A lei de Hooke para o estado plano de tensão

Considere o estado plano de tensão num ponto. Se escolhermos o sistema de coordenadas x, y, z de modo que x e y estejam no plano de tensão, então teremos que as tensões normais e de cisalhamento na direção z serão todas nulas, ou seja:

$$\sigma_z = \tau_{xz} = \tau_{yz} = 0$$

Desta forma temos:

$$\epsilon_x = \frac{\sigma_x}{E} - \frac{\nu}{E} \sigma_y$$

$$\epsilon_y = -\frac{\nu}{E} \sigma_x + \frac{\sigma_y}{E}$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{G}$$

ou

$$\sigma_x = \frac{E}{1-\nu^2} (\epsilon_x + \nu\epsilon_y)$$

$$\sigma_y = \frac{E}{1-\nu^2} (\nu\epsilon_x + \epsilon_y)$$

$$\tau_{xy} = G\gamma_{xy}$$

Destas últimas três equações, pode-se obter o estado de tensão num ponto da superfície de uma peça por meio das deformações medidas nos extensômetros de uma roseta de deformação.

Exemplo 11.7: No exemplo 11.6, se o material da peça em que se mediu as deformações for o aço, quais as tensões principais e de cisalhamento máximas. O módulo de elasticidade e o coeficiente de Poisson do aço são respectivamente 200 GPa e 0,32. Qual a tensão de cisalhamento máxima absoluta nesse ponto?

Solução: Como as direções principais de deformação são ortogonais entre si, pode-

mos tomar $\epsilon_x = \epsilon_1$ e $\epsilon_y = \epsilon_2$. Logo:

$$\epsilon_1 = 272 \cdot 10^{-6}$$

$$\epsilon_2 = 34 \cdot 10^{-6}$$

$$\sigma_1 = \sigma_2 = \frac{E}{1-\nu^2} (\epsilon_1 + \nu \epsilon_2) = \frac{200 \cdot 10^9}{1-0,32^2} (272 \cdot 10^{-6} + 0,32 \cdot 34 \cdot 10^{-6}) = +63 \text{ MPa} \quad 11.15$$

$$\sigma_2 = \sigma_y = \frac{E}{1-\nu^2} (\nu \epsilon_1 + \epsilon_2) = \frac{200 \cdot 10^9}{1-0,32^2} (0,32 \cdot 272 \cdot 10^{-6} + 34 \cdot 10^{-6}) = +27 \text{ MPa}$$

$$\sigma_{\max} = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} = \frac{63 - 27}{2} = +18 \text{ MPa}$$

Tensão de cisalhamento máxima absoluta no ponto: como a terceira tensão principal é nula (plano da superfície livre da peça), tem-se:

$$\sigma_{\max} = +63 \text{ MPa}$$

$$\sigma_{\min} = 0$$

Portanto:

$$\tau_{\max} = \frac{63 - 0}{2} = 32 \text{ MPa} \quad \square$$

Exemplo 11.8: Mostre que a relação entre E , ν e G para um material elástico linear isotrópico é $G = \frac{E}{2(1+\nu)}$.

Solução:

Segundo pela lei de Hooke de um material elástico linear isotrópico:

$$\sigma_1 = \frac{E}{1-\nu^2} (\epsilon_1 + \nu \epsilon_2)$$

$$\sigma_2 = \frac{E}{1-\nu^2} (\nu \epsilon_1 + \epsilon_2)$$

Como:

$$\tau_{\max} = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} = G \gamma_{\max} \quad (1)$$

mas:

$$\frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} = \frac{E}{2(1-\nu^2)} (\epsilon_1 + \nu \epsilon_2 - \nu \epsilon_1 - \epsilon_2) = \frac{E}{2(1-\nu^2)} (1-\nu)(\epsilon_1 - \epsilon_2)$$

$$= \frac{E}{2(1+\nu)} (\epsilon_1 - \epsilon_2) = \frac{E}{2(1+\nu)} \gamma_{\max} \quad (2)$$

Comparando as equações (1) e (2) conclui-se que:

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)} \quad \square$$

EXERCÍCIOS PROPOSTOS: 10.2, 10.5, 10.6, 10.7, 10.8, 10.11, 10.12, 10.16, 10.17, 10.20, 10.22, 10.28, 10.29, 10.30, 10.31, 10.32