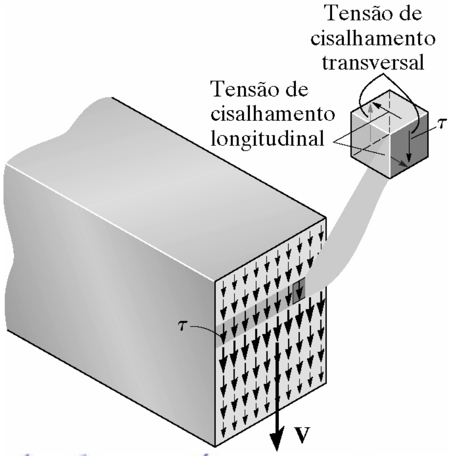
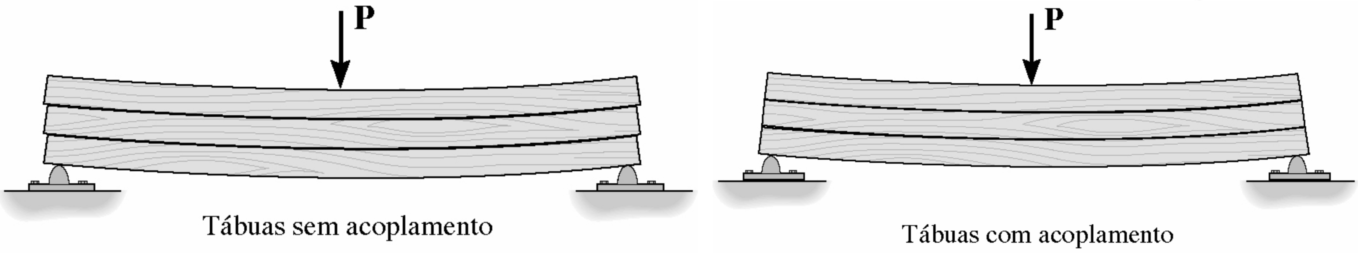
7.1 CISALHAMENTO EM ELEMENTOS RETOS



Slide 7.3 cap07_a

A ação de forças transversais causam força cortante na seção transversal de uma viga. Esta, por sua vez, é a resultante de uma distribuição de tensão de cisalhamento nessa mesma seção.

Como as tensões de cisalhamento atuantes em planos ortogonais sobre uma partícula infinitesimal, pode-se deduzir que tensões de cisalhamento se distribuem em planos longitudinais da viga. Isto fica claro se considerarmos uma viga formada por pranchas dispostas longitudinalmente umas sobre as outras, como um sanduíche. Quando carregada transversalmente, as pranchas deslizam umas sobre as outras, por estarem soltas. Porém, se coladas entre si, já não deslizam, e esta restrição causa tensões de cisalhamento ao longo da interface entre as pranchas. A figura abaixo ilustra este fenômeno.



Tábuas sem acoplamento
(a)

Tábuas com acoplamento
(b)

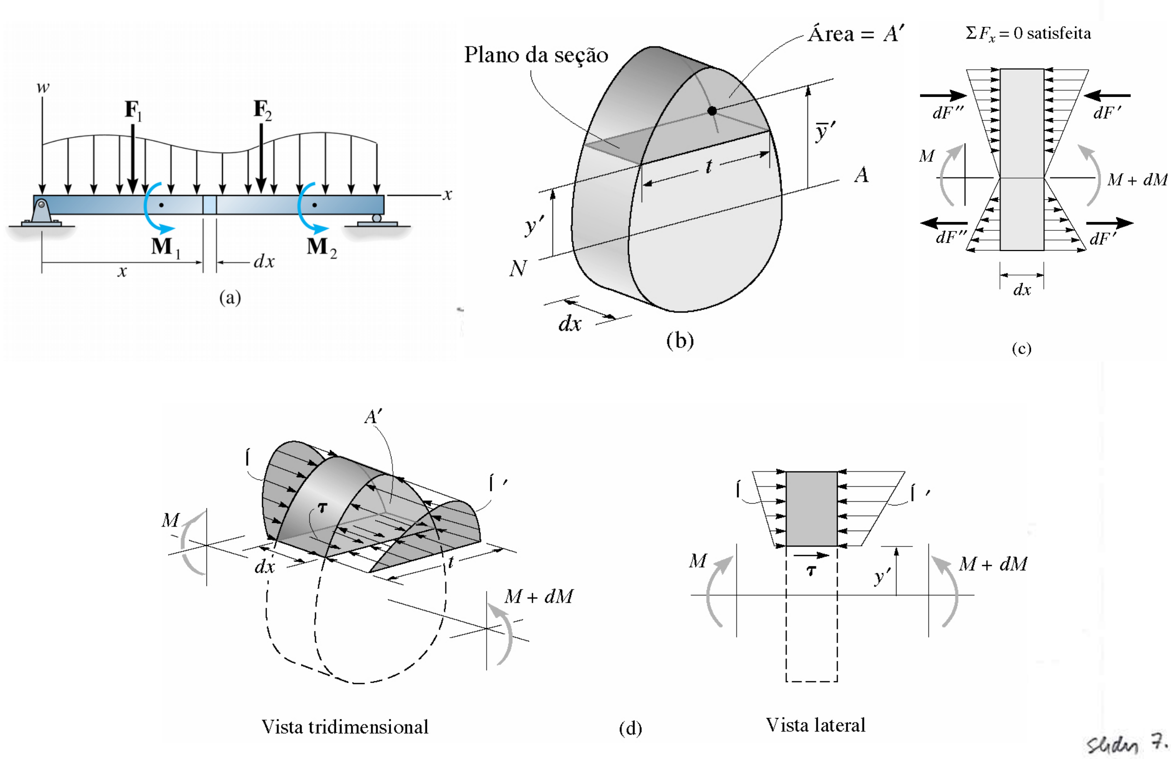
slides 7.5 cap.07_a
7.6

7.2. A FÓRMULA DO CISALHAMENTO

Pode-se mostrar que a presença de força cortante na seção transversal de uma viga é inseparável da variação do momento fletor ao longo da viga. Isto se traduz matematicamente pela relação:

$$V = \frac{dM}{dx}$$

Como veremos a seguir, a variação longitudinal do momento fletor é a chave que permite identificar a distribuição de tensão de cisalhamento na seção transversal da viga transversalmente carregada. Para tanto, vamos utilizar a figura abaixo, que mostra a distribuição de tensão normal nas faces de uma fatia transversal de uma viga que é seccionada paralelamente à superfície neutra da fatia (item b e d da figura abaixo).



slides 7.8 a 7.12
cap. 07-a

Considerando o elemento hachurado no item (d) da figura acima, a resultante de forças na direção longitudinal x leva a:

$$\tau t\, dx = \int_{A'} \sigma' dA' - \int_{A'} \sigma\, dA' = \int_{A'} d\sigma\, dA = \int_{A'} \frac{d\sigma}{dx} dA\, dx$$

Como $\sigma = \frac{M_z}{I_z} y$ e supondo que a viga tem seção transversal uniforme:

$$\frac{d\sigma}{dx} = \frac{y}{I_z}\frac{dM}{dx} = \frac{V}{I_z} y$$

Logo:

$$\tau t\, dx = \int_{A'} \frac{V}{I_z} y\, dA\, dx = \frac{V}{I_z}\int_{A'} y\, dA\, dx$$

ou seja:

$$\tau = \frac{VQ}{I_z t}$$

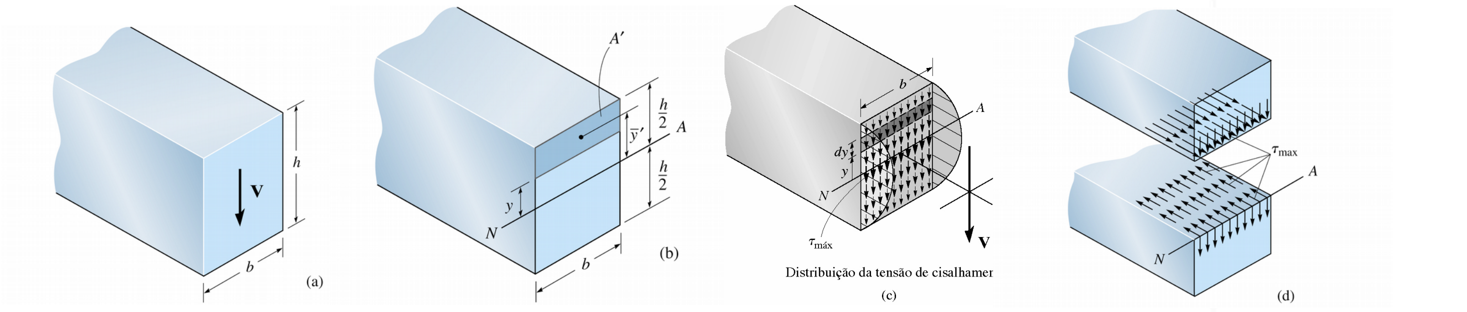
onde Q é o momento estático da figura de área A' relativo ao eixo neutro da seção transversal:

$$Q = \int_{A'} y\, dA = \bar{y}' A'$$

onde $\bar{y}$ é a distância do centroide da figura de área Δ' até o eixo neutro.

7.3. TENSÕES DE CISALHAMENTO EM VIGAS

Viga de seção transversal retangular



Slides 7.14 a 7.17
cap-7_a

A figura acima representa a seção de uma viga. No item (b) está hachurada a faixa de área Δ', genérica. A aresta inferior desta, paralela ao eixo neutro, tem coordenada y, de modo que o momento estático da faixa relativo ao eixo neutro z é:

$$Q = \bar{y}\Delta' = \left[y + \frac{1}{2}\left(\frac{h}{2} - y\right)\right]\left(\frac{h}{2} - y\right) b$$

ou $$Q = \frac{b}{2}\left(\frac{h^2}{4} - y^2\right)$$

Da fórmula da distribuição de cisalhamento na seção transversal:

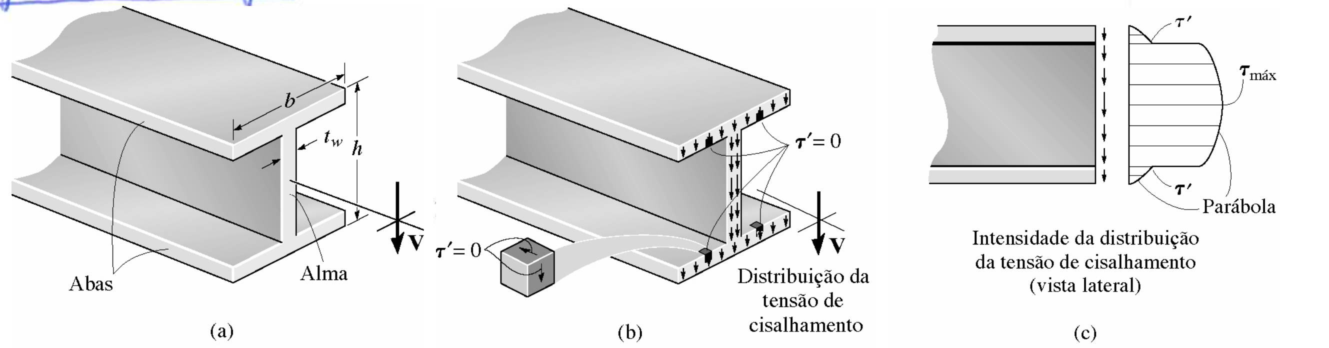
$$\tau = \frac{VQ}{I_z t} = \frac{V \frac{b}{2}\left(\frac{h^2}{4} - y^2\right)}{\frac{bh^3}{12} \cdot b}$$

ou $$\tau = \frac{6V}{bh^3}\left(\frac{h^2}{4} - y^2\right)$$

Observe que a distribuição de tensão de cisalhamento é parabólica na direção y e constante na direção z (item c da figura acima). A tensão de cisalhamento é nula nas arestas superior e inferior da seção ($y = \pm \frac{h}{2}$) e máxima sobre o eixo neutro dela:

$$\tau_{máx} = \frac{3}{2}\frac{V}{A} = \frac{3}{2}\frac{V}{bh}$$

Viga de abas largas



slides 7.19 – 7.21 cap07_a

Uma viga de abas largas consiste em duas "abas" largas (pranchas horizontais na figura acima) e uma "alma" (prancha vertical na figura acima).

Por uma análise análoga à anterior, pode-se mostrar que a tensão de cisalhamento é constante ao longo de um segmento material paralelo ao eixo neutro z e varia parabolicamente, porém descontinuadamente, na direção y. A tensão de cisalhamento é nula nas arestas superior e inferior da seção e máxima sobre o eixo neutro dela (itens b e c da figura acima).

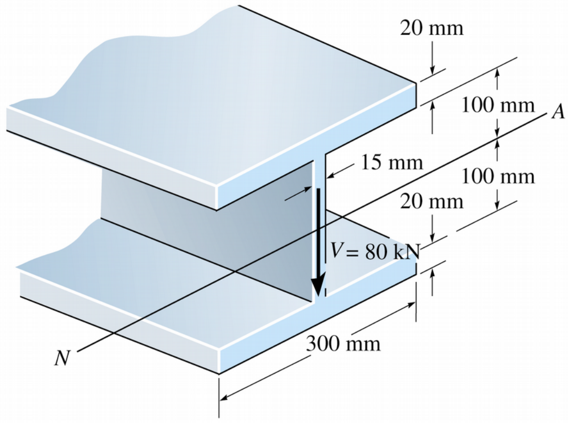
Limitações da fórmula do cisalhamento

Há algumas simplificações no desenvolvimento da fórmula do cisalhamento como a de considerar a tensão de cisalhamento média ao longo do segmento material paralelo ao eixo neutro. Na prática a tensão de cisalhamento não é uniforme ao longo desse segmento.

Por outro lado, a fórmula do cisalhamento leva a algumas inconsistências como, por exemplo, aquela observada na aresta inferior da alma superior ou na aresta superior da alma inferior da viga em "I" da figura acima. Na parte livre dessas arestas a tensão de cisalhamento é nula, ao contrário do resultado obtido pela fórmula.

Resumindo, a fórmula do cisalhamento não dá bons resultados quando aplicada a vigas cujas seções transversais são achatadas (seção mais larga do que alta), ou em pontos em que a seção transversal sofre mudança geométrica abrupta.

Exemplo 7.1: Uma viga "I" de aço tem as dimensões indicadas abaixo. Ela é submetida a uma força cortante uniforme $V = 80$ kN. Determine a distribuição de de tensão de cisalhamento na seção transversal da viga e a força cortante resultante na alma da seção.

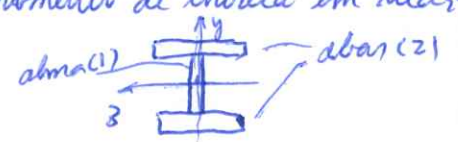


(a)

slides 7.30 cap-7a
7.1 a 7.4 cap 7-b

Solução:

Momento de inércia em relação ao eixo neutro:



$$I_z = (I_z)_1 + (I_z)_2$$

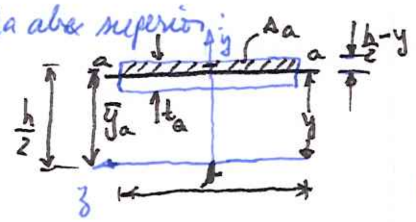
$$(I_z)_1 = \frac{b_1 h_1^3}{12} = \frac{0{,}015 \cdot 0{,}200^3}{12} = 1{,}0 \cdot 10^{-5}\ m^4$$

$$(I_z)_2 = 2\left[\frac{b_2 h_2^3}{12} + b_2 h_2 y_{c2}^2\right] = 2\left[\frac{0{,}300 \cdot 0{,}02^3}{12} + 0{,}300 \cdot 0{,}02 \cdot 0{,}110^2\right] = 146 \cdot 10^{-6}\ m^4$$

$$I_z = 156 \cdot 10^{-6}\ m^4$$

Momentos estáticos em relação ao eixo neutro:

Na aba superior:

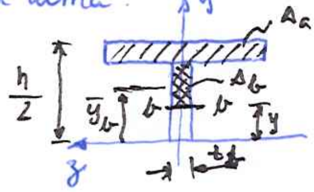


$$Q_s = \left[y + \frac{1}{2}\left(\frac{h}{2} - y\right)\right]\left(\frac{h}{2} - y\right) \cdot b = \frac{b}{2}\left(\frac{h^2}{4} - y^2\right)$$

ou $Q_s = \frac{0{,}300}{2}(0{,}120^2 - y^2) = 0{,}150(0{,}0144 - y^2)$

$$Q_s = 0{,}00216 - 0{,}150\, y^2$$

Na alma:



$$Q_A = Q_a + Q_b$$

$$Q_b = \left[y + \frac{1}{2}\left(\frac{h}{2} - t_a - y\right)\right]\left(\frac{h}{2} - t_a - y\right) t_b$$

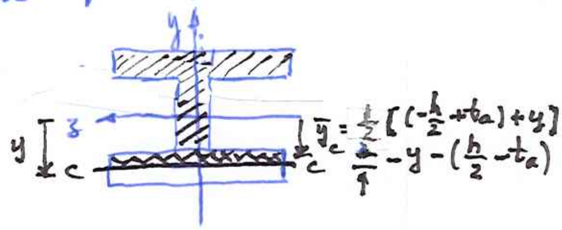
$$= \frac{t_b}{2}\left[\left(\frac{h}{2} - t_a\right)^2 - y^2\right] = \frac{0{,}015}{2}\left[0{,}100^2 - y^2\right]$$

$$= 0{,}0075(0{,}0100 - y^2)$$

$$Q_a = 0{,}150(0{,}0144 - 0{,}100^2) = 0{,}00066\ m^3$$

$$Q_A = 0{,}000735 - 0{,}0075\, y^2$$

Na alma inferior:



$$Q_I = Q_b + Q_c$$

$$Q_c = \frac{1}{2}\left[\left(-\frac{h}{2}+t_a\right)-y\right] b \left[\left(-\frac{h}{2}+t_a\right)-y\right] = \frac{b}{2}\left[\left(\frac{h}{2}-t_a\right)^2 - y^2\right]$$

$$= \frac{0{,}300}{2}\left[0{,}100^2 - y^2\right] = 0{,}0015 - 0{,}150\,y^2$$

$$Q_b = 0{,}000735 - 0{,}0075\cdot(-0{,}100)^2 = 0{,}00066 \text{ m}^3$$

$$Q_I = 0{,}00066 + 0{,}0015 - 0{,}150\,y^2 = 0{,}00216 - 0{,}150\,y^2 \quad (= Q_S)$$

Distribuição de tensão de cisalhamento:

Na aba superior:

$$\tau_s = \frac{VQ_s}{I_z t_s} = \frac{80\cdot 10^3\cdot(0{,}00216 - 0{,}150\,y^2)}{156\cdot 10^{-6}\cdot 0{,}300} = 3{,}69\cdot 10^6 - 256\cdot 10^6\,y^2 \quad [\text{Pa}]$$

na alma:

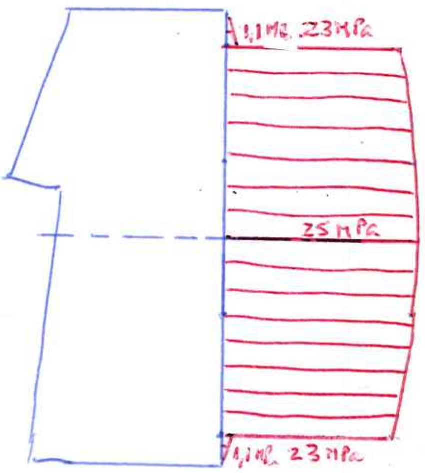
$$\tau_A = \frac{VQ_A}{I_z t_A} = \frac{80\cdot 10^3\cdot(0{,}000735 - 0{,}0075\,y^2)}{156\cdot 10^{-6}\cdot 0{,}015} = 25{,}1\cdot 10^6 - 256\cdot 10^6\,y^2 \quad [\text{Pa}]$$

na aba inferior:

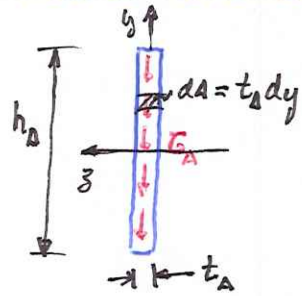
$$\tau_I = \frac{VQ_I}{I_z t_I} = \frac{80\cdot 10^3\cdot(0{,}00216 - 0{,}150\,y^2)}{156\cdot 10^{-6}\cdot 0{,}300} = 3{,}69\cdot 10^6 - 256\cdot 10^6\,y^2 \quad [\text{Pa}]$$

$\tau_I = \tau_s$ por simetria.

y (m)	τ (MPa)
0,120	0
0,100	1,1 (aba) 23 (alma)
0,040	25
0,000	25 (eixo neutro)
-0,040	25
-0,100	23 (alma) 1,1 (aba)
-0,120	0



Força cortante resultante na alma V_A:



$$V_A = \int_{A_A} \tau_A \, dA = \int_{-\frac{h_A}{2}}^{+\frac{h_A}{2}} \tau_A t_A \, dy$$

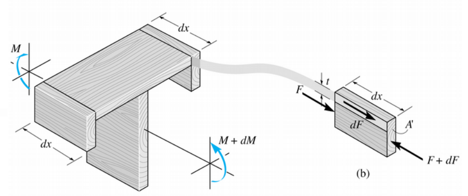
$$= \int_{-0,100}^{+0,100} 0,015 \cdot (25,1 \cdot 10^6 - 256 \cdot 10^6 y^2) \, dy$$

$$V_A \simeq 73 \text{ kN}$$

A alma suporta 91% da força cortante ■

7.4. FLUXO DE CISALHAMENTO

Como visto anteriormente, forças transversais induzem tensões de cisalhamento em planos longitudinais da viga, ou seja, ocorrem forças nesses planos. Portanto, pode-se falar de uma distribuição dessas forças longitudinais por unidade de comprimento da viga, também chamada de fluxo de cisalhamento q.



(a)

Slide 7-1 cap 7-E

Para determinar o fluxo de cisalhamento, considere uma fatia infinitesimal de viga (figura acima), que, por sua vez, é cortada por um plano longitudinal. Ao separar a parte seccionada por este corte, identifica-se no plano de corte uma força dF, que é a diferença da resultante de tensões normais nas faces transversais desta parte (item (b) da figura).

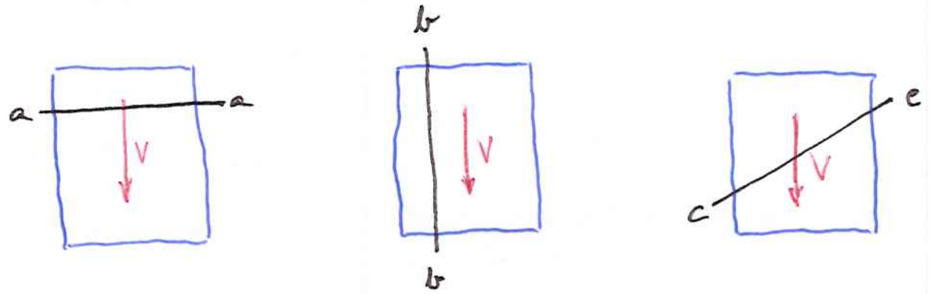
$$dF = \int_{A'} \sigma' dA - \int_{A'} \sigma dA = \int_{A'} d\sigma \, dA = \int_{A'} \frac{d\sigma}{dx} dA \, dx$$

$$= \frac{V}{I_z} \int_{A'} y \, dA \, dx = \frac{VQ}{I_z} dx$$

ou $$q = \frac{dF}{dx} = \frac{VQ}{I_z}$$

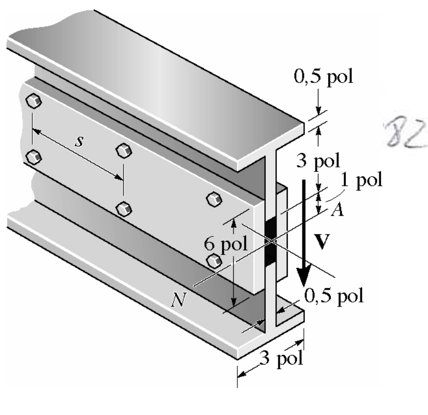
onde Q é o momento estático da figura de área A' em relação ao eixo neutro da seção, I_z é o momento de inércia de toda a seção em relação ao mesmo eixo neutro e V é a força cortante na seção transversal. Portanto, a distribuição de força por unidade de comprimento ao longo do plano longitudinal indicado na figura é dado pela expressão do fluxo de cisalhamento acima. Observe que, conforme o plano longitudinal que se escolha, obtêm-se diferentes fluxos de cisalhamento, pois diferentes momentos estáticos devem ser determinados.

Costuma-se representar o plano de corte longitudinal na seção transversal da viga. Por exemplo:



De modo geral, o fluxo de cisalhamento se presta ao projeto de vigas compostas por vários elementos unidos entre si. Mais especificamente, serve para especificar a união entre esses elementos (espaçamento longitudinal e dimensões de parafusos, rebites, soldas ou colas).

Exemplo 7.2: A viga abaixo é constituída por dois "T" e duas barras chatas iguais. As barras têm seção transversal de 150 mm × 12 mm. Se a viga for submetida à força cortante uniforme de 250 kN indicada na figura, determine o espaçamento longitudinal entre os parafusos para garantir a união. Cada parafuso admite uma força cortante de 75 kN.



82

Slide 7-18 cap7_C

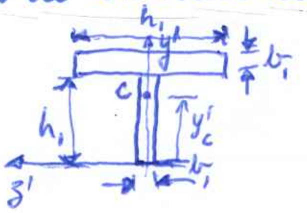
Solução: 7.9

Cada parafuso tem duas secções resistentes ao cisalhamento na união.

Como há simetria, não é necessário analisar as duas fileiras de parafuso.

Vamos denotar por (1) os "T" e por (2) as barras.

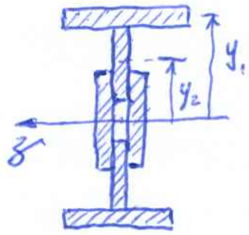
Localização do centroide do "T":



$$y'_c = \frac{\frac{h_1}{2}\cdot(b_1 h_1) + \left(h_1 + \frac{b_1}{2}\right)(b_1 h_1)}{2 b_1 h_1} = \frac{b_1 + 3h_1}{4}$$

$$y'_c = \frac{12 + 3\cdot 75}{4} = 59{,}25 \text{ mm}$$

Momento de inércia da figura composta:



$$I_z = 2(I_z)_1 + 2(I_z)_2$$

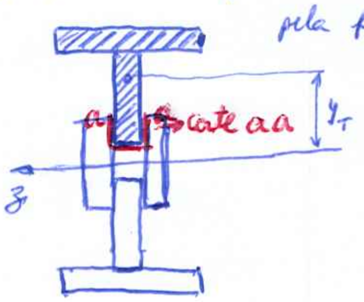
$$(I_z)_1 = \frac{b_1 h_1^3}{12} + b_1 h_1 y_2^2 + \frac{h_1 b_1^3}{12} + b_1 h_1 y_1^2 = \frac{b_1 h_1}{12}\left[h_1^2 + b_1^2 + 12(y_1^2 + y_2^2)\right]$$

$$(I_z)_1 = \frac{12\cdot 75}{12}\left[75^2 + 12^2 + 12(106^2 + 62{,}5^2)\right] = 1{,}41\cdot 10^7 \text{ mm}^4 \text{ ou } 1{,}41\cdot 10^{-5} \text{ m}^4$$

$$(I_z)_2 = \frac{b_2 h_2^3}{12} = \frac{12\cdot 150^3}{12} = 3{,}38\cdot 10^6 \text{ mm}^4 \text{ ou } 3{,}38\cdot 10^{-6} \text{ m}^4$$

$$I_z = 2\cdot(1{,}41\cdot 10^{-5} + 0{,}338\cdot 10^{-5}) = 3{,}50\cdot 10^{-5} \text{ m}^4$$

Definição do corte: corresponde ao corte que separa as duas partes unidas pela fileira de parafusos superior.



Momento estático do "T" superior:

$$Q_a = y_T \cdot A_T = 84{,}25 \cdot 2\cdot 12\cdot 75 = 1{,}52\cdot 10^5 \text{ mm}^3 \text{ ou } 1{,}52\cdot 10^{-4} \text{ m}^3$$

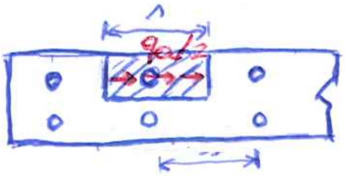
Comprimento da interface entre as duas partes do corte a-a:

$$t_a = 2\cdot 50 = 100 \text{ mm ou } 0{,}100 \text{ m}$$

Fluxo de cisalhamento no corte a-a:

$$q_a = \frac{VQ_a}{I_z} = \frac{250\cdot 10^3 \cdot 1{,}52\cdot 10^{-4}}{3{,}50\cdot 10^{-5}} = 1{,}09 \text{ MN}$$

Espaçamento entre parafusos na fileira

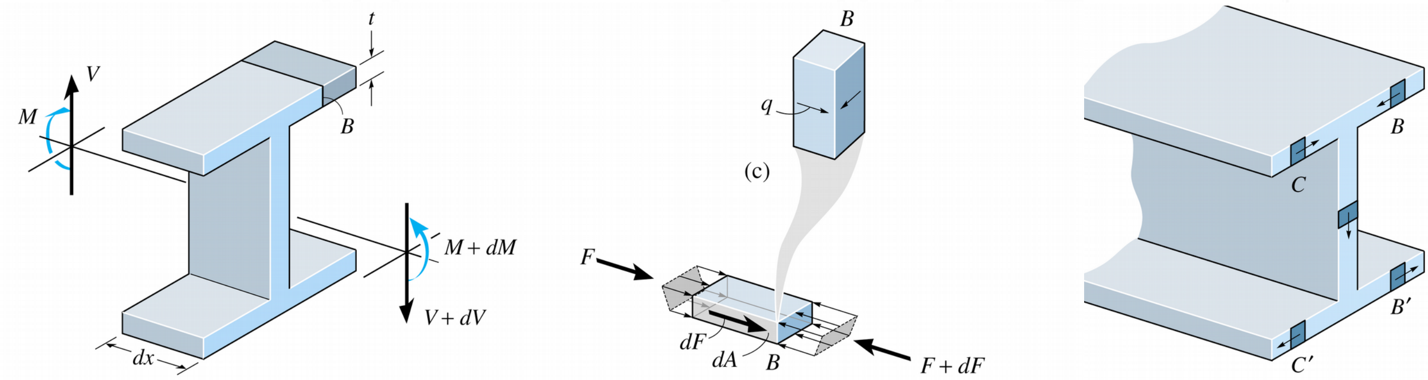


$$F_{adm} = \frac{q_a s}{2} \quad \text{ou} \quad s = \frac{2 F_{adm}}{q_a} = 0{,}14 \text{ m} \quad \text{ou} \quad 140 \text{ mm}$$

7.5 FLUXO DE CISALHAMENTO EM ELEMENTOS DE PAREDES FINAS

O fluxo de cisalhamento foi definido em planos longitudinais da viga. Porém, como a tensão de cisalhamento é a mesma em planos ortogonais de um elemento infinitesimal, haverá fluxo de cisalhamento também na seção transversal (item (b) da figura abaixo).

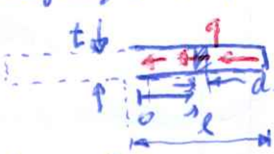
slides 7.28 - 7.30 cap.7-c / 7.1 - 7.2 cap 7-d



(a) (b) (g)

O fluxo de cisalhamento é mais intenso em cortes na direção da espessura da figura da seção transversal. Como fluxo é perpendicular ao plano de corte, o vetor fluxo segue o "caminho" formado pela figura (item (g) da figura acima).

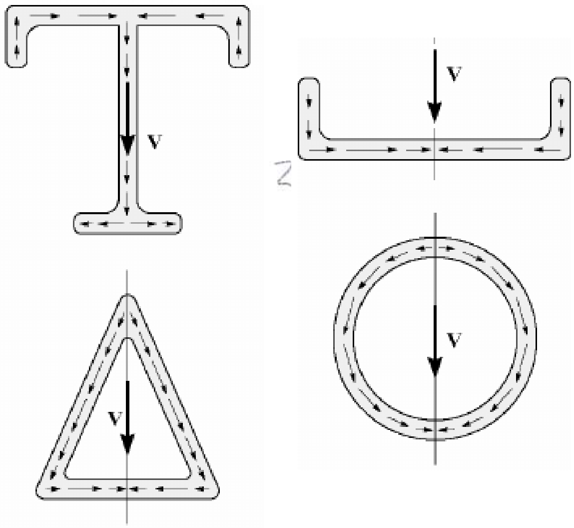
A força resultante nas partes direita ou esquerda de uma aba é determinada por integração do fluxo de cisalhamento ao longo da parte.



Por exemplo, a resultante de força na parte direita da aba acima é:

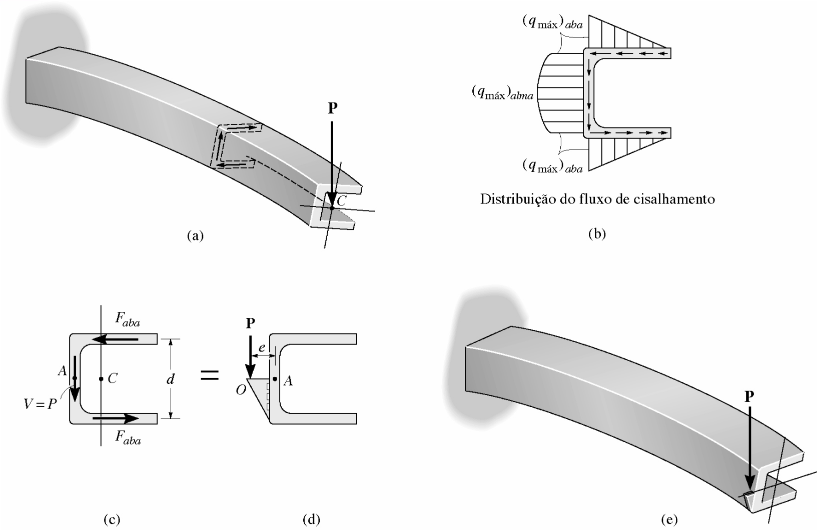
$$F = \int_0^l q \, ds$$

De igual forma, a força resultante na alma é dada pela mesma integral ao longo dela.



slide 7.8 cap7-d

7.6 CENTRO DE TORÇÃO PARA PERFIS DE PAREDE FINA ABERTOS

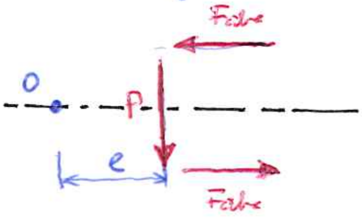


slide 7.14 cap.7-d

Considere sem perda de generalidade a viga de perfil "C" da figura acima submetida à força transversal indicada. As resultantes de força nas abas e na alma (item (c) da figura acima) não verificam equilíbrio de momentos. Para que haja equilíbrio de momentos é necessário posicionar adequadamente a força externa P, do contrário, um momento torçor será induzido na seção de modo a garantir o equilíbrio de momentos.

Para posicionar corretamente a força externa P de modo a não induzir momento torçor na seção transversal, a sua linha de ação deve cruzar o centro de torção do perfil, que é aquele ponto em que o sistema de forças induzido nas abas e alma do perfil é reduzido a apenas uma força (item (d) na figura acima), ou seja, é aquele para o qual o momento dessas forças é nulo:

$$M_0 = 0$$



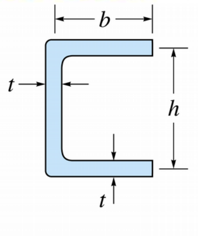
$$F_{aba}\, d - Pe = 0$$

ou

$$e = \frac{F_{aba}\, d}{P}$$

Uma <u>propriedade do centro de torção</u> é que ele pertence ao eixo de simetria da seção, se houver.

<u>Exemplo 7.3</u> Determine a localização do centro de torção para o perfil "U" de paredes finas cujas dimensões são mostradas abaixo. Dados $b = 100$ mm, $h = 200$ mm e $t = 3$ mm.

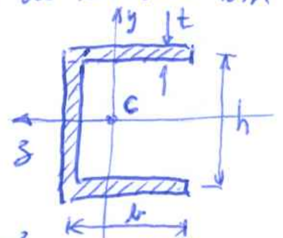


(a)

<u>Solução</u>:

sade 7.19 cap7-d

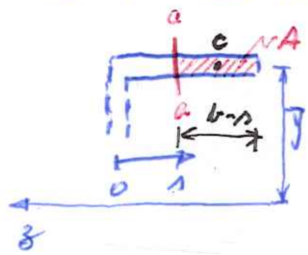
Momento de inércia em relação ao eixo de simetria:



$$I_z = \frac{th^3}{12} + 2\left[\frac{bt^3}{12} + bt\left(\frac{h}{2}\right)^2\right] = \frac{3\cdot 200^3}{12} + 2\left[\frac{100\cdot 3^3}{12} + 100\cdot 3\cdot 100^2\right] = 8{,}0\cdot 10^6\,mm^4 \text{ ou}$$

$$I_z = 8{,}0\cdot 10^{-6}\,m^4$$

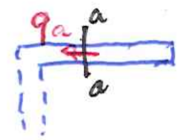
Momento estático na aba superior:



$$Q_a = \bar{y}\,A = \frac{h}{2}\cdot(b-s)\,t = \frac{0{,}200}{2}\cdot(0{,}100-s)\,0{,}003$$

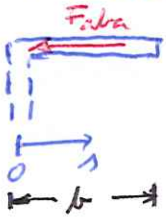
$$Q_a = 3{,}0\cdot 10^{-5}\,(0{,}100-s)$$

Fluxo de cisalhamento na aba superior:



$$q_a = \frac{VQ_a}{I} = \frac{3{,}0\cdot 10^{-5}\,(0{,}100-s)\,V}{8{,}0\cdot 10^{-6}} = 3{,}75\,(0{,}100-s)\,V$$

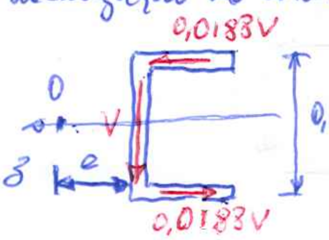
Força resultante na aba superior



$$F_{aba} = \int_0^{0{,}100} 3{,}75\,(0{,}100-s)\,V\,ds = 3{,}75\,V\int_0^{0{,}100}(0{,}100-s)\,ds$$

$$F_{aba} = 3{,}75\,V\cdot\frac{0{,}100^2}{2} = 0{,}0188\,V$$

Localização do centro de torção:



$$M_O = 0$$

$$0{,}0188V\cdot 0{,}200 - Ve = 0$$

$$e = 0{,}0188\cdot 0{,}200 = 0{,}00376\,m \text{ ou } 3{,}76\,mm \;\blacksquare$$

EXERCÍCIOS PROPOSTOS: 7.1, 7.3, 7.6, 7.10, 7.12, 7.14, 7.18, 7.19, 7.27, 7.29, 7.36, 7.38, 7.39, 7.45, 7.47, 7.50, 7.56, 7.59, 7.62, 7.68, 7.70, 7.71, 7.75, 7.78