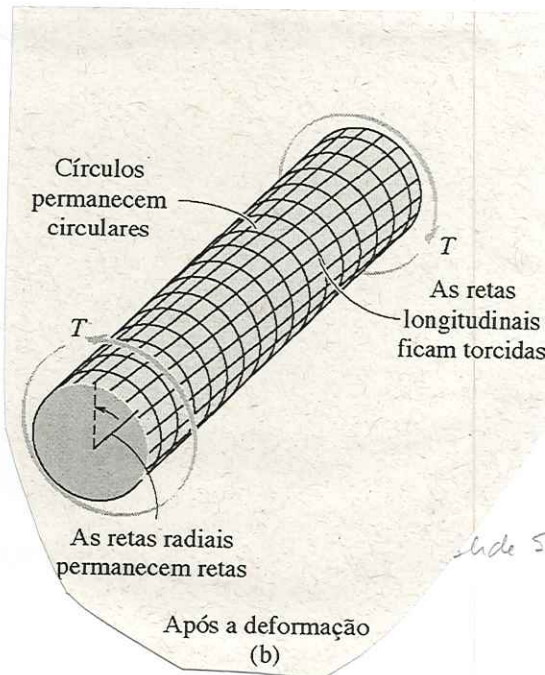
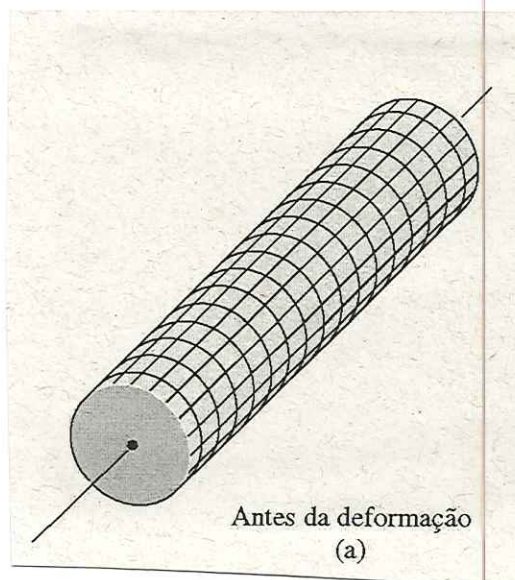


5.1. INTRODUÇÃO

Será tratado o efeito da torção de eixos cilíndricos maciços e tubulares, os mais comuns na transmissão de potência em máquinas.

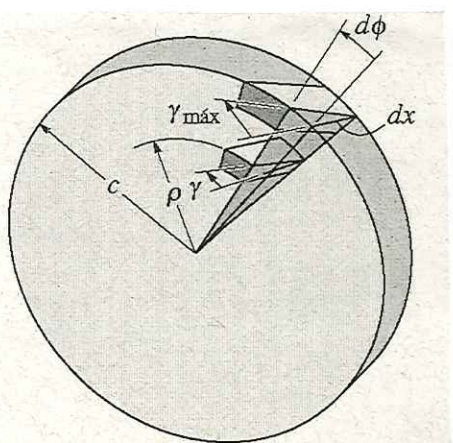
5.2. TORÇÃO DE UM EIXO CILÍNDRICO



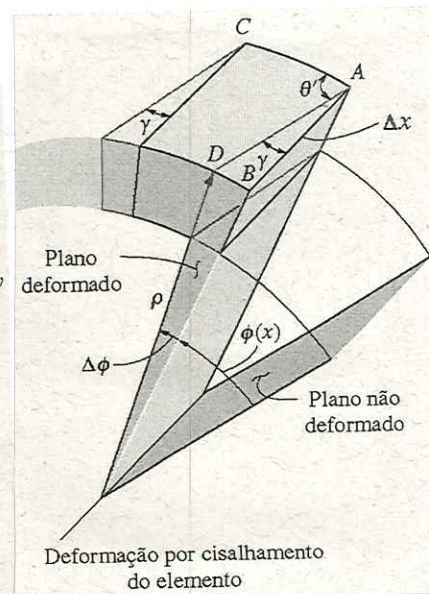
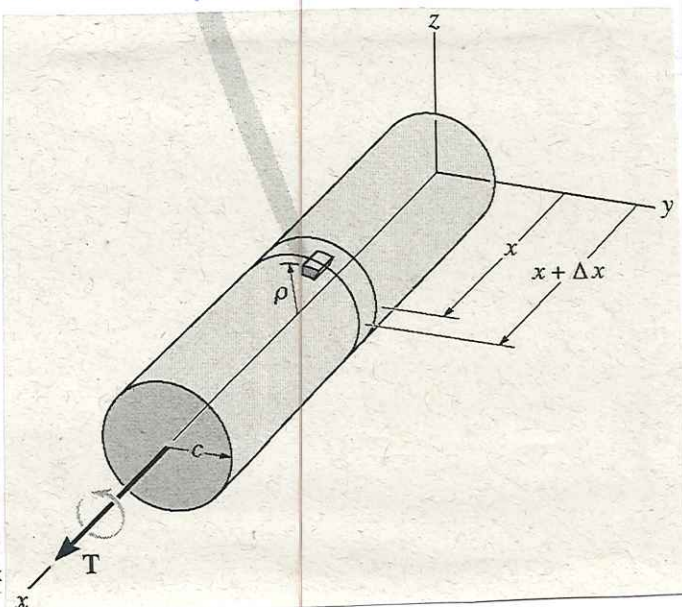
slide 5.3 - 5.4
cap. 05.2

Considerações:

- as fatias transversais permanecem cilíndricas;
- as seções transversais permanecem planas;
- o comprimento e o raio do eixo não se alteram;
- as retas longitudinais torcem.
- as retas radiais permanecem retas.



A deformação por cisalhamento do material aumenta linearmente de acordo com ρ , isto é, $\gamma = (\rho/c)\gamma_{\text{máx}}$



slide 5.8 - 5.9
cap. 05.2

Da figura acima, tem-se que o comprimento do arco \widehat{BD} é:

$$\widehat{BD} = \rho \Delta\phi$$

Por outro lado, o segmento BD é:

$$\overline{BD} = \gamma \Delta x$$

Considerando o ângulo de rotação relativa entre as faces da fatia, $\Delta\phi$, suficientemente pequeno, pode-se igualar \widehat{BD} a \overline{BD} . Logo:

$$\rho \Delta\phi = \gamma \Delta x$$

$$\text{ou } \frac{\Delta\phi}{\Delta x} = \frac{\gamma}{\rho}$$

Tomando o limite para $\Delta x \rightarrow 0$:

$$\frac{d\phi}{dx} = \frac{\gamma}{\rho}$$

Observe que $\frac{d\phi}{dx}$ é constante para cada fatia transversal infinitesimal. Portanto, qualquer que seja o cilindro coaxial de raio ρ da fatia, a razão γ/ρ não varia, ou

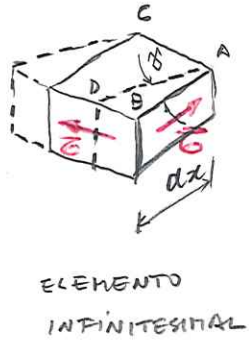
$$\frac{\gamma}{\rho} = \frac{\gamma_{\text{máx}}}{c} = \text{constante}$$

ou seja:

$$\gamma = \frac{\rho}{c} \gamma_{\text{máx}}$$

onde c é o raio da fatia, ρ é o raio do cilindro coaxial à fatia ($0 \leq \rho \leq c$) e $\gamma_{\text{máx}}$ é a deformação cisalhante em $\rho = c$ (o cilindro coaxial coincide com a fatia transversal). Portanto, a deformação cisalhante γ varia linearmente com o raio do cilindro coaxial à fatia desde o valor 0 em $\rho = 0$ (eixo da fatia) até $\gamma_{\text{máx}}$ em $\rho = c$ (o cilindro coaxial coincide com a fatia).

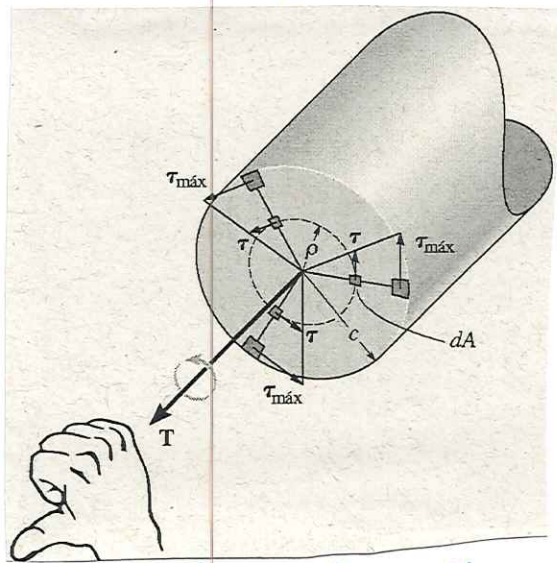
5.3. A FÓRMULA DA TORÇÃO



Slide 5.8 cap 05.6

Como se sabe que o material é elástico linear e isotrópico, vale a lei de Hooke. Logo:

$$\bar{\sigma} = G\gamma = \frac{\rho}{c} G \gamma_{\text{máx}} = \frac{\rho}{c} \bar{\sigma}_{\text{máx}}$$



Slide 5.10 cap 05.6

A distribuição de tensão de cisalhamento na seção transversal do eixo cilíndrico varia linearmente na direção radial e é constante ao longo de qualquer circunferência concêntrica a O de raio rho entre 0 e C.
 A tensão de cisalhamento é nula no centro da seção e é máxima sobre a circunferência de raio C concêntrica a O.

Vejamos como determinar o momento torçor resultante na seção transversal. Considere o elemento de área dA indicado na figura acima. A força sobre ele devida à tensão de cisalhamento é:

$$dF = \bar{\sigma} dA$$

e o momento desta força em relação ao centro O é:

$$dT = \bar{\sigma} \rho dA = \frac{\bar{\sigma}_{\text{máx}}}{c} \rho^2 dA$$

Integrando este momento ao longo de toda área A da seção transversal obtém-se o momento torçor na seção:

$$T = \int_A dT = \int_A \frac{\sigma_{m\acute{a}x}}{c} \rho^2 dA = \frac{\sigma_{m\acute{a}x}}{c} \underbrace{\int_A \rho^2 dA}_{I_0} = \frac{\sigma_{m\acute{a}x} I_0}{c}$$

onde I_0 é o momento de inércia polar de área relativa ao centro O do círculo de raio c.

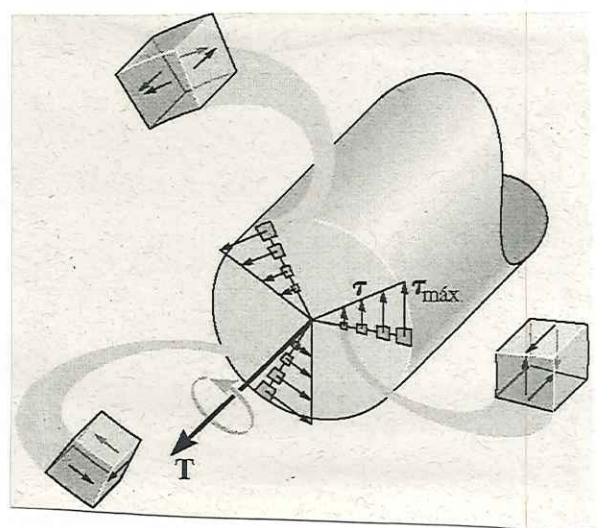
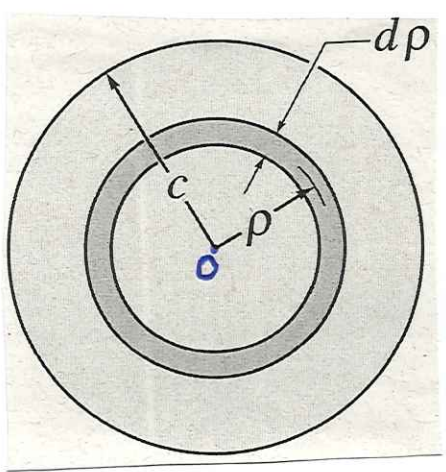
Desta última equação segue-se que:

$$\sigma_{m\acute{a}x} = \frac{Tc}{I_0}$$

e a distribuição de tensão na seção transversal:

$$\sigma = \frac{T\rho}{I_0}$$

Eixo maciço



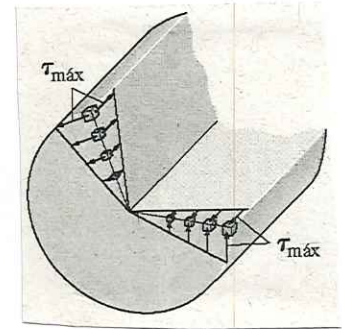
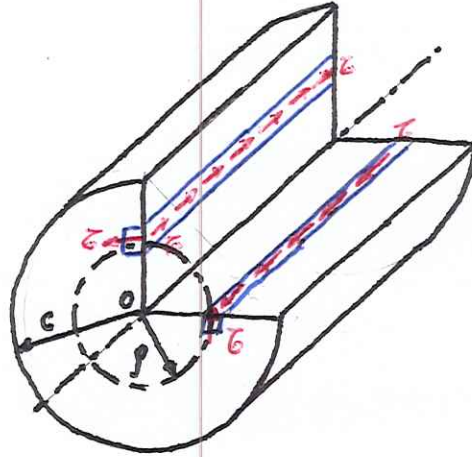
Sudo, S.11 Cap.05.6

Para um eixo cilíndrico maciço, o momento de inércia polar pode ser obtido a partir da figura acima. Nela o anel concêntrico a O (hachurado na figura) tem área $dA = 2\pi\rho d\rho$, portanto:

$$I_0 = \int_A \rho^2 dA = \int_0^c \rho^2 2\pi\rho d\rho = 2\pi \int_0^c \rho^3 d\rho = \frac{\pi c^4}{2}$$

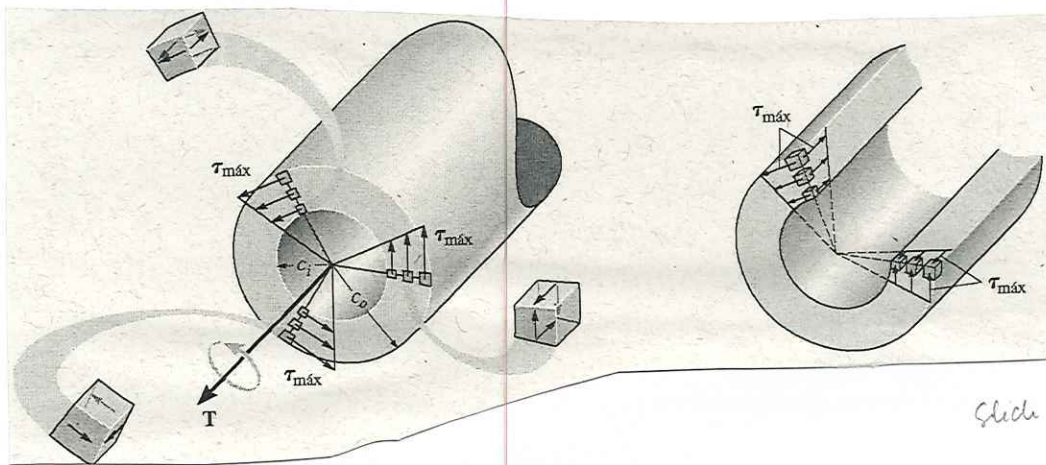
Suas dimensões são $[L^4]$, portanto, é dado em m^4 no SI.

A última figura (b) mostra elementos infinitesimais dispostos ao longo de um segmento radial. Nesses elementos observam-se iguais tensões de cisalhamento em planos ortogonais, no plano transversal e no plano axial. Portanto, se num plano axial percorrermos as partículas seccionadas por ele que estão à mesma distância radial do eixo do cilindro, encontraremos nelas iguais tensões de cisalhamento orientadas paralelamente ao eixo do cilindro.



Slides 5.12-5.13
Cap. 05.2

Eixo tubular



Slide 5.2 Cap. 05.2

A distribuição de tensão de cisalhamento nos planos transversal e axial de um eixo cilíndrico tubular é regida pela mesma expressão:

$$\tau = \frac{T\rho}{I_o}$$

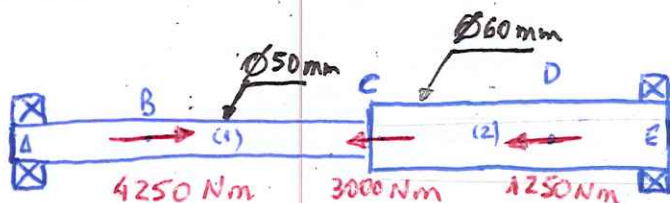
porém o momento de inércia polar passa a ser:

$$I_o = \frac{\pi}{2} (c_o^2 - c_i^2)$$

Tensão de torção máxima absoluta

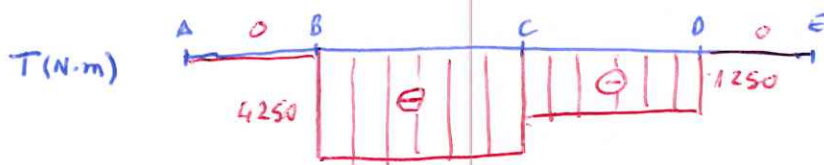
Para projetar um eixo ou verificar se ele resistirá a um dado carregamento torsional, deve-se investigar em que seção transversal a razão $\frac{T C}{I_0}$ é máxima. Aí a tensão de cisalhamento máxima será a tensão de torção máxima absoluta do eixo cilíndrico.

Exemplo 5.1: Um eixo cilíndrico maciço apoiado por mancais nas extremidades é submetido a três torques. Determine a tensão de torção máxima absoluta desenvolvida no eixo.



Solução

Diagrama de momentos torques ao longo do eixo:

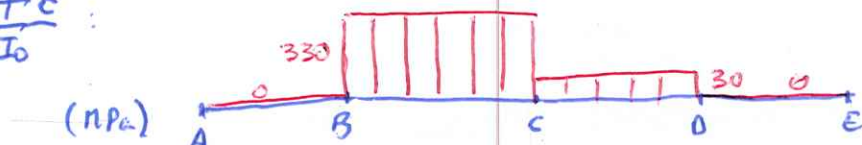


Momento de inércia polar:

$$\text{trecho AC: } (I_0)_1 = \frac{\pi}{2} C_1^4 = \frac{\pi}{2} \cdot 0,025^4 = 6,1 \cdot 10^{-7} \text{ m}^4$$

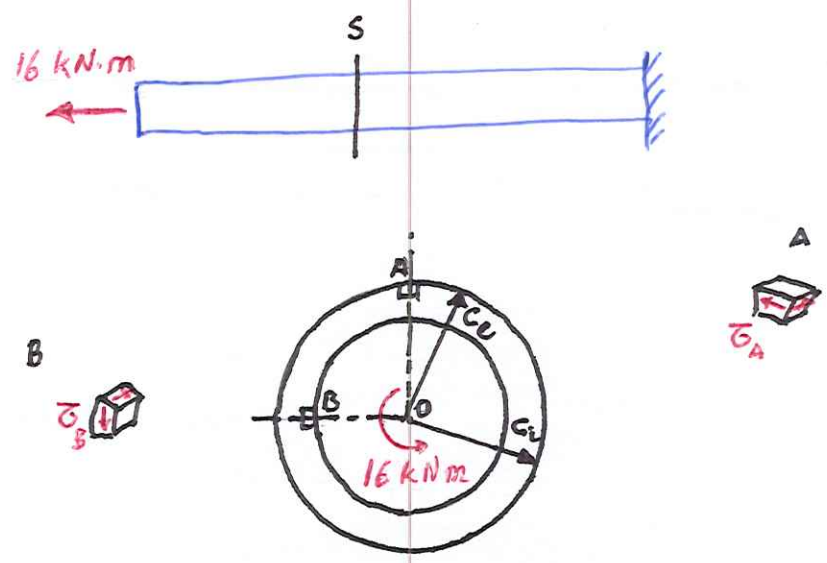
$$\text{trecho CE: } (I_0)_2 = \frac{\pi}{2} C_2^4 = \frac{\pi}{2} \cdot 0,030^4 = 13 \cdot 10^{-7} \text{ m}^4$$

razão $\frac{T C}{I_0}$:



Inspecionando o gráfico acima tem-se que a tensão de torção máxima absoluta é 330 MPa, que ocorre no trecho BC. ■

Exemplo 5.2 O tubo abaixo tem diâmetro interno de 80 mm e externo de 100 mm. Determine a tensão de cisalhamento desenvolvida nas paredes interna e externa ao longo da seção transversal do tubo.



Solução:

Momento de inércia polar da seção:

$$I_0 = \frac{\pi}{2} (0,05^4 - 0,04^4) = 5,80 \cdot 10^{-6} \text{ m}^4$$

Tensões de cisalhamento:

$$\tau_A = \frac{T r_o}{I_0} = \frac{16 \cdot 10^3 \cdot 0,05}{5,80 \cdot 10^{-6}} = 140 \text{ MPa}$$

$$\tau_B = \frac{T r_i}{I_0} = \frac{16 \cdot 10^3 \cdot 0,04}{5,80 \cdot 10^{-6}} = 110 \text{ MPa}$$

5.3. TRANSMISSÃO DE POTÊNCIA

O torque no eixo de saída ou entrada de uma máquina é implicitamente dado em termos da potência e da rotação transmitida pelo eixo.

A potência transmitida por um eixo é:

$$P = T \omega = 2\pi f T$$

onde T é o torque, ω a velocidade angular e f é a frequência de rotação.

Projeto do eixo de entrada ou saída de uma máquina

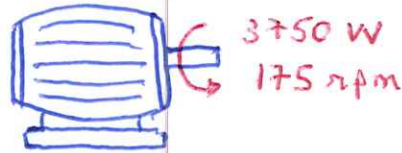
Deve-se impor que a tensão de cisalhamento máxima desenvolvida na seção transversal do eixo seja igual a tensão de cisalhamento admissível:

$$\tau_{\text{máx}} = \tau_{\text{adm}}$$

ou

$$\frac{I_0}{C} = \frac{T}{\tau_{adm}}$$

Exemplo 5.3: Um motor elétrico fornece 3750 W à rotação de 175 rpm no eixo de saída. Dimensione o eixo maciço em aço para o motor. Dada a tensão de cisalhamento admissível do aço 100 MPa.



Solução:

Velocidade angular:

$$\omega = 2\pi f = 2\pi \frac{175}{60} = 18,3 \text{ rad/s}$$

Torque do motor:

$$T = \frac{P}{\omega} = \frac{3750}{18,3} = 205 \text{ Nm}$$

Para eixo maciço:

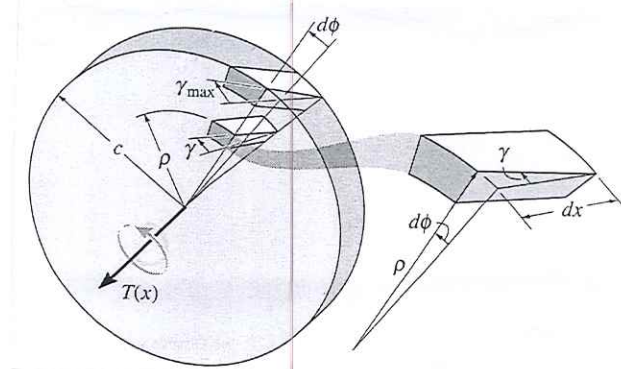
$$\frac{I_0}{C} = \frac{\pi}{2} \frac{C^4}{C} = \frac{T}{\tau_{adm}}$$

$$C = \sqrt[3]{\frac{2T}{\pi \tau_{adm}}} = \sqrt[3]{\frac{2 \cdot 205}{\pi \cdot 100 \cdot 10^6}} = 0,011 \text{ m ou } 11 \text{ mm}$$

5.4. ÂNGULO DE TORÇÃO

Foi deduzido anteriormente que a taxa de variação do ângulo de torção ao longo de um eixo cilíndrico é:

$$\frac{d\phi}{dx} = \frac{\gamma}{\rho}$$

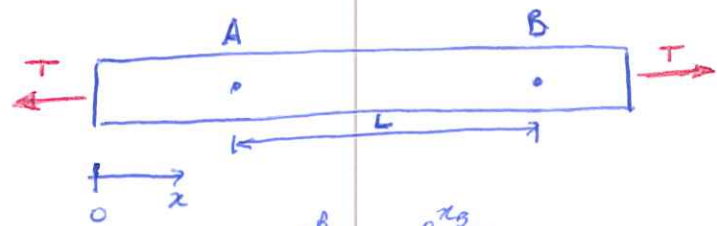


Sendo em conta a lei de Hooke e a fórmula da torção, esta última equação torna-se:

$$\frac{d\phi}{dx} = \frac{\tau}{\rho G} = \frac{T \rho}{\rho G I_0} = \frac{T}{G I_0}$$

Logo, a taxa de variação do ângulo de torção ao longo do eixo numa determinada seção depende do momento torçor, do módulo de elasticidade de cisalhamento e do momento de inércia polar da seção.

Para obter a rotação relativa entre duas seções quaisquer do eixo basta integrar a taxa de variação do ângulo de torção ao longo do trecho entre as duas seções.

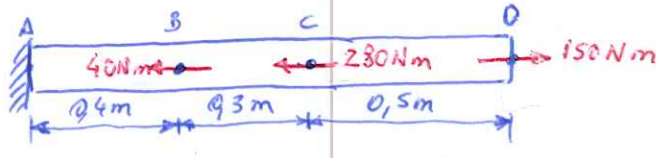


$$\Delta\phi = \phi_B - \phi_A = \int_A^B d\phi = \int_{x_A}^{x_B} \frac{T}{G I_0} dx$$

No caso em que no trecho AB o momento torçor, o momento polar de inércia e módulo de elasticidade de cisalhamento sejam constantes, o ângulo de torção relativo entre as duas seções torna-se:

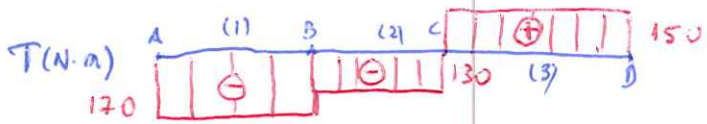
$$\Delta\phi = \phi_B - \phi_A = \frac{TL}{G I_0}$$

Exemplo 5.4: O eixo de aço está sujeito aos torques indicados. O diâmetro do eixo é uniforme e tem diâmetro de 14 mm. O módulo de elasticidade de cisalhamento do aço é 80 GPa. Determine a rotação das seções B, C e D.



Solução:

Diagrama de momento torçor:



Momento de inércia polar:

$$I_0 = \frac{\pi}{2} (0,007)^4 = 3,77 \cdot 10^{-9} m^4$$

Ângulos de torção:

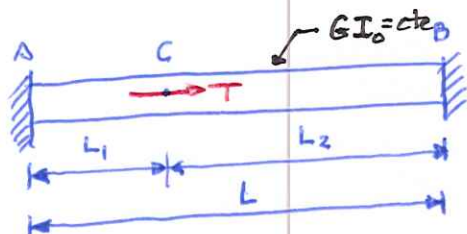
$$\text{Seção B: } \phi_B = \phi_A + \Delta\phi_1 = 0 + \frac{T_1 L_1}{G I_0} = \frac{-170 \cdot 0,4}{80 \cdot 10^9 \cdot 3,77 \cdot 10^{-9}} = -0,23 \text{ rad (horário)}$$

$$\text{Seção C: } \phi_C = \phi_B + \Delta\phi_2 = \phi_B + \frac{T_2 L_2}{G I_0} = -0,23 + \frac{-130 \cdot 0,3}{80 \cdot 10^9 \cdot 3,77 \cdot 10^{-9}} = -0,36 \text{ rad (horário)}$$

$$\text{Seção D: } \phi_D = \phi_C + \Delta\phi_3 = \phi_C + \frac{T_3 L_3}{G I_0} = -0,36 + \frac{150 \cdot 0,5}{80 \cdot 10^9 \cdot 3,77 \cdot 10^{-9}} = -0,11 \text{ rad (horário)}$$

5.5. EIXOS ESTATICAMENTE CARREGADOS

Considere um eixo engastado nas duas extremidades e submetido a um torque T :



O seu diagrama de corpo livre é:



Do equilíbrio de momento em relação ao eixo geométrico:

$$T_A + T_B = -T$$

que é a única equação disponível do equilíbrio do sistema de forças. Como são duas as incógnitas, falta uma equação para determinar as reações.

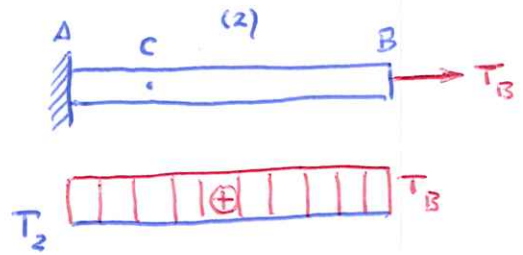
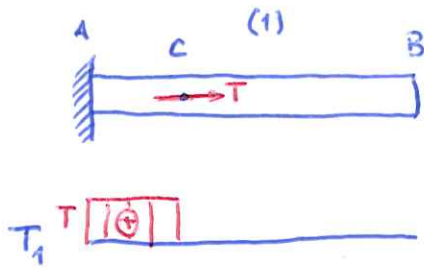
Vamos, então, retirar um vínculo relativo de um dos apoios, por exemplo, o vínculo de torção no apoio B , e obter a estrutura fundamental:



Para tornar compatível a estrutura fundamental carregada com a estrutura e carregamento originais, é necessário impor que o ângulo de torção em B seja nulo. Obtém-se assim a equação de compatibilidade:

$$\phi_B = 0$$

Agora vamos determinar a rotação em B da estrutura fundamental decompondo o carregamento e empregando o princípio da superposição.



Ângulo de torção em B devido a T aplicado em C:

$$\phi_{BC} = \phi_{AC} + \Delta\phi_C = 0 + \int_{x_A}^{x_B} \frac{T}{GI_0} dx = \frac{TL_1}{GI_0}$$

Ângulo de torção em B devido a T_B aplicado em B:

$$\phi_{BB} = \phi_{AB} + \Delta\phi_B = 0 + \int_{z_A}^{z_B} \frac{T}{GI_0} dz = \frac{T_B L}{GI_0}$$

Pelo princípio da superposição:

$$\phi_B = \phi_{BC} + \phi_{BB} = \frac{TL_1}{GI_0} + \frac{T_B L}{GI_0} = 0 \quad \text{ou} \quad T_B = -\frac{L_1}{L} T$$

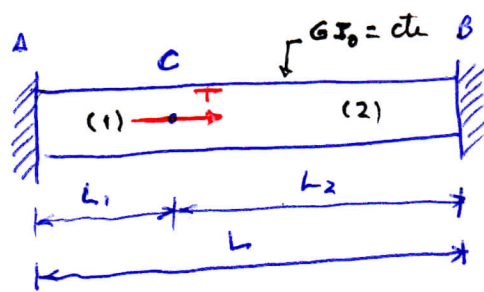
Esta última é a equação que faltava para determinar as reações. Resolvendo o sistema de equações:

$$T_A + T_B = -T$$

$$T_B = -\frac{L_1}{L} T \quad \leftarrow$$

$$T_A = -\frac{L_2}{L} T \quad \leftarrow$$

EXERCÍCIOS PROPOSTOS: 5.1, 5.4, 5.5, 5.7, 5.9, 5.12, 5.13, 5.16, 5.18, 5.23, 5.29, 5.32, 5.38, 5.39, 5.41, 5.44, 5.47, 5.49, 5.53, 5.59, 5.62, 5.66, 5.68, 5.77, 5.79, 5.80, 5.83.



DCL:



Equilíbrio de momentos:

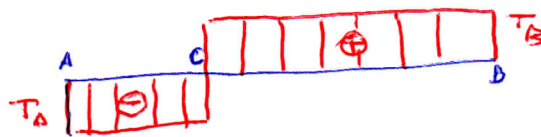
$$T_A + T_B = -T \quad (1)$$

Equação de compatibilidade:

$$\phi_{B/A} = 0$$

$$\phi_{B/A} = \phi_{C/A} + \phi_{B/C} = 0 \quad (2)$$

Diagrama de momento torção:



$$\phi_{C/A} = \frac{T_1 L_1}{(GI_0)_1} = \frac{-T_A L_1}{GI_0}$$

$$\phi_{B/C} = \frac{T_2 L_2}{(GI_0)_2} = \frac{T_B L_2}{GI_0}$$

$$\phi_{B/A} = -\frac{T_A L_1}{GI_0} + \frac{T_B L_2}{GI_0} = 0 \quad (3)$$

Logo, de (3):

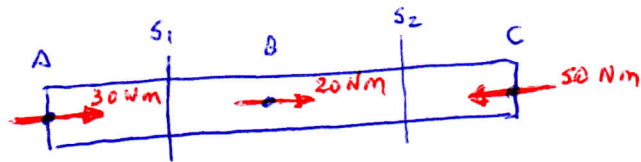
$$T_A = \frac{L_2}{L_1} T_B \quad (4)$$

Substituído (4) em (1):

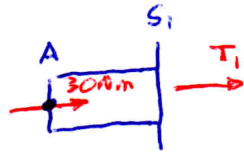
$$T_B = -\frac{L_1}{L} T \quad \leftarrow \text{(sentido horário)}$$

$$T_A = -\frac{L_2}{L} T \quad \leftarrow \text{(sentido anti-horário)}$$

Diagrama de momento torçor

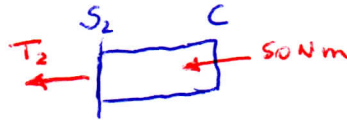


Trecho AB (seção S₁):



$$T_1 = -30 \text{ Nm} \quad (\text{sentido horário})$$

Trecho BC (seção S₂):



$$T_2 = -50 \text{ Nm} \quad (\text{sentido horário})$$

Diagrama:

