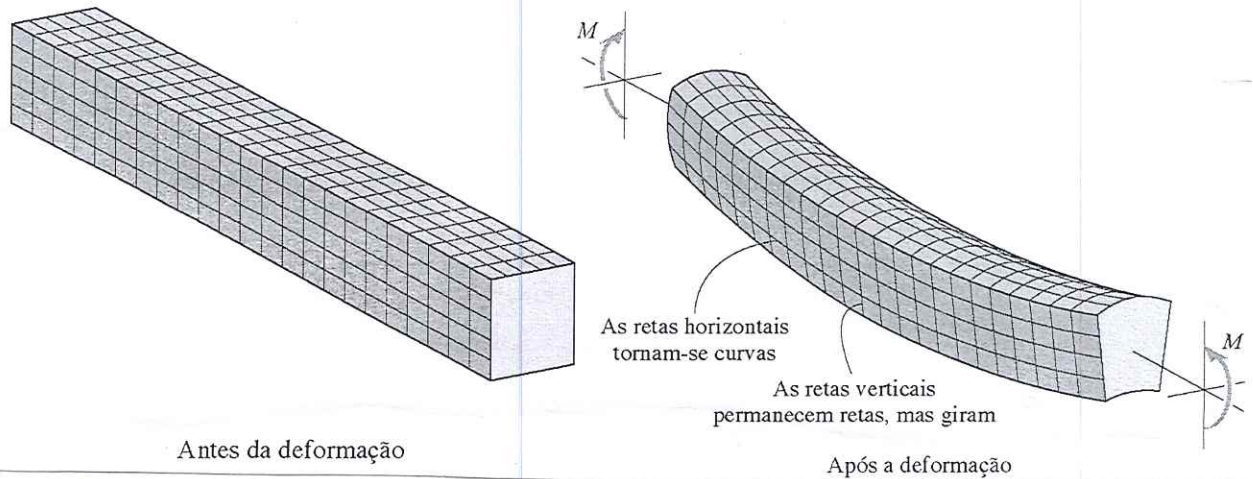


6.1. INTRODUÇÃO

Estudaremos aqui o efeito da flexão de um elemento prismático reto. A flexão é causada pela aplicação de momentos fletores no elemento.

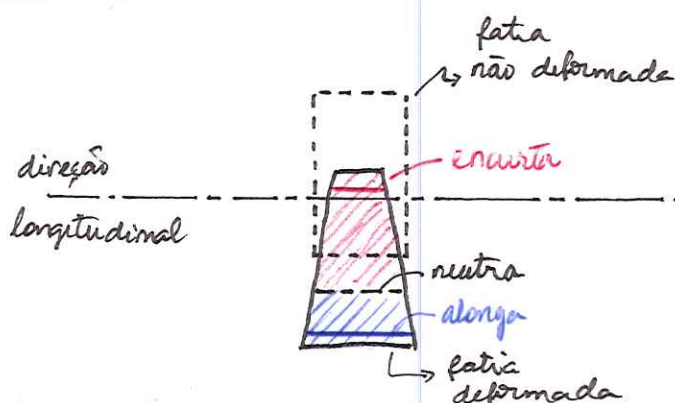
6.2. FLEXÃO DE UM ELEMENTO PRISMÁTICO RETO

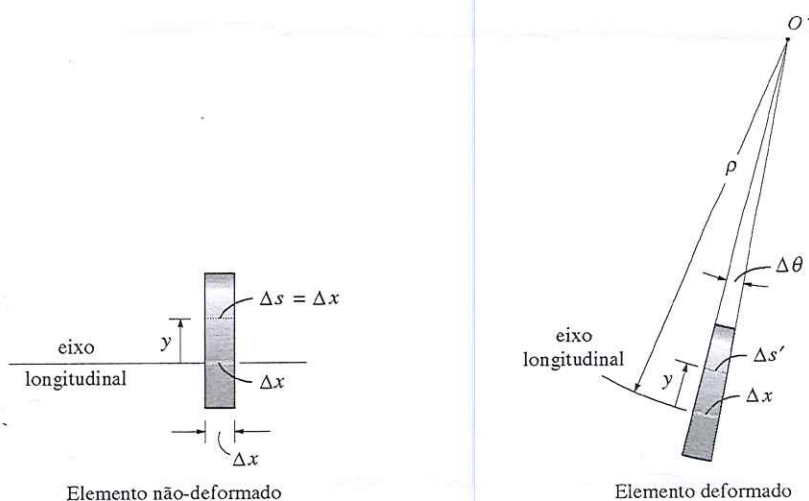
Algumas considerações sobre a flexão do elemento:

slides 6.8-6.13 cap 6-d

- as linhas horizontais curvam-se;
- as seções transversais permanecem planas;
- as seções transversais giram no plano de flexão;
- o elemento é simétrico;
- a flexão ocorre no plano de simetria do elemento.

Como numa fatia transversal as fibras giram entre si no plano de flexão, uma parte da fatia encurta e outra alonga na direção axial do elemento. Conseqüentemente há uma superfície em que o material permanece indeformado. Esta superfície se denomina superfície neutra, e se estende ao longo de todo elemento.





slide 6.14 cap06-d

Na figura acima a fibra longitudinal da fatura, de comprimento Δs e coordenada y , deforma-se com a flexão, passando a ter um comprimento $\Delta s'$. Por outro lado, as duas faces da fatura estão inclinadas de $\Delta \theta$ na flexão e os prolongamentos delas se encontram no ponto O' , chamado de centro de curvatura da fatura. A distância que vai de O' até a superfície neutra, ρ , é chamada de raio de curvatura da fatura.

A deformação sofrida pela fibra destacada na figura acima é:

$$\bar{\epsilon} = \frac{\Delta s' - \Delta s}{\Delta s} = \frac{(\rho - y)\Delta\theta - \rho\Delta\theta}{\rho\Delta\theta}$$

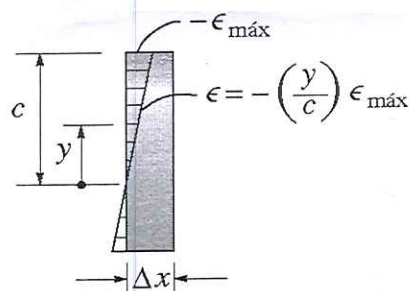
Tomando o limite para Δx (espessura de fatura) tendendo a zero:

$$\epsilon_x = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta s' - \Delta s}{\Delta x} = -\frac{y}{\rho}$$

Ou seja, a deformação normal das fibras da fatura dispostas longitudinalmente varia linearmente com a coordenada y relativa à superfície neutra.

Da figura abaixo tem-se:

$$\epsilon_x = -\frac{y}{c} \epsilon_{\text{máx}}$$



Distribuição da deformação normal

slide 6.15 cap06-d

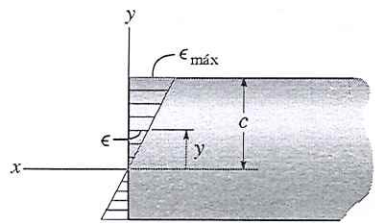
Considerando pequenas deformações, pode-se supor válida a lei de

Hooke:

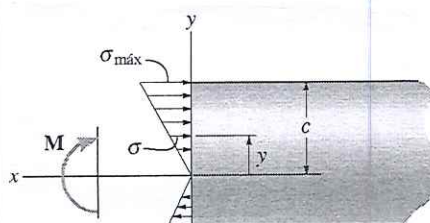
$$\sigma_x = E \epsilon_x = -\frac{y}{c} E \epsilon_{\text{máx}} = -\frac{y}{c} \sigma_{\text{máx}}$$

Assim, as tensões normais desenvolvidas nas faces da fatia (seções transversais do elemento reto) variam linearmente com a coordenada y relativa à superfície neutra. Nos pontos da fatia sobre a superfície neutra não há tensão normal σ_x . A tensão normal nas faces é máxima no(s) ponto(s) mais afastado(s) da superfície neutra (à distância c desta).

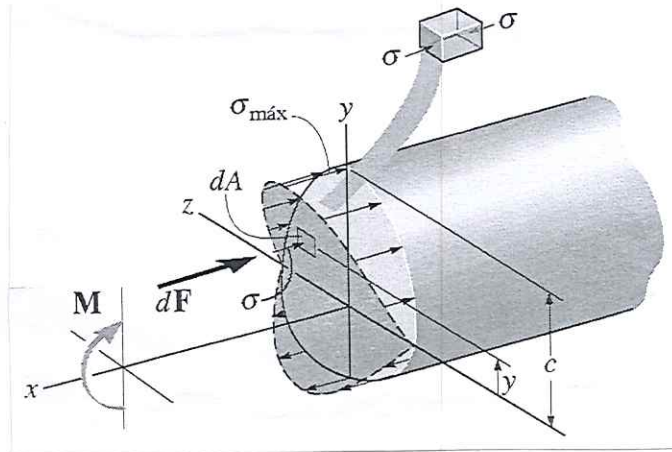
Slide 6.77 - 18 cap 6 - d



Variação da deformação normal



Variação da tensão de flexão



A força normal à superfície do elemento de área infinitesimal dA indicado na figura acima é:

$$dF_x = \sigma_x dA = -\frac{y}{c} \sigma_{\text{máx}} dA$$

e o seu momento em relação ao eixo neutro z é:

$$dM_z = y dF_x = -\frac{y^2}{c} \sigma_{\text{máx}} dA$$

A força normal resultante na seção mostrada na figura é nula por hipótese, pois só momento flexor é aplicado ao elemento prismático. Logo:

$$N = \int_A dF_x = \int_A -\frac{y}{c} \sigma_{\text{máx}} dA = 0 \quad \text{ou} \quad \frac{\sigma_{\text{máx}}}{c} \int_A y dA = 0$$

Portanto:

$$\int_A y dA = 0$$

De onde se pode concluir que o eixo neutro, além de ser ortogonal ao plano de flexão (plano de simetria), contém também o centroide da figura geométrica que a seção transversal forma.

Já o momento fletor total na seção é:

$$M_z = \int_A dM_z = \int_A \frac{\sigma_{x\text{máx}}}{c} y^2 dA = \frac{\sigma_{x\text{máx}}}{c} \int_A y^2 dA$$

O momento de inércia em relação ao eixo neutro z da figura formada pela seção transversal é:

$$I_z = \int_A y^2 dA$$

Logo:

$$M_z = \frac{\sigma_{x\text{máx}}}{c} I_z$$

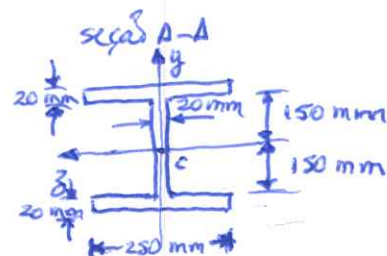
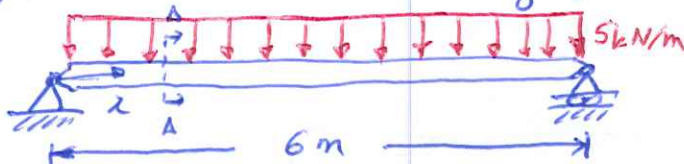
ou $\sigma_{x\text{máx}} = \frac{M_z}{I_z} c$

e $\sigma_x = -\frac{M_z}{I_z} y$

que é a fórmula da flexão.

Observe que acima do eixo neutro a tensão normal linearmente distribuída na seção tem um sinal e, abaixo, tem outro sinal. Se o momento fletor for positivo na seção, por exemplo, acima do eixo neutro tem-se tensão de compressão, e, abaixo, tensão de tração.

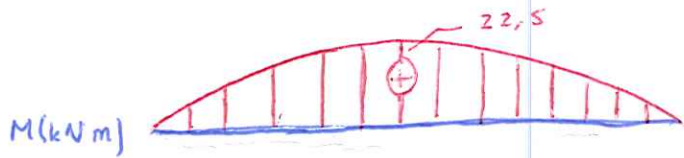
Exemplo 6.1 A viga de perfil "I" é apoiada conforme a figura abaixo. Determine a tensão de flexão máxima absoluta na viga e represente a distribuição de tensão na seção transversal numa localização



Solução:

Momento de inércia em relação ao eixo neutro: $2 \left(\frac{250 \cdot 340^3}{12} - \frac{115 \cdot 300^3}{12} \right)$

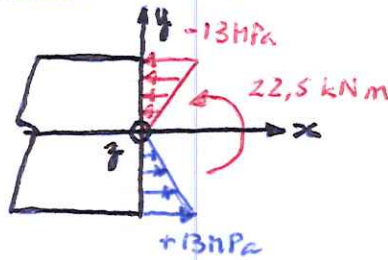
$$I_z = \frac{250 \cdot 340^3}{12} - 2 \cdot \frac{115 \cdot 300^3}{12} = 3,0 \cdot 10^8 \text{ mm}^4 \text{ ou } 3,0 \cdot 10^{-6} \text{ m}^4$$



Tensão de flexão máxima absoluta. Por inspeção, o valor máximo do quociente $\frac{Mc}{I}$ ao longo da viga ocorre no meio.

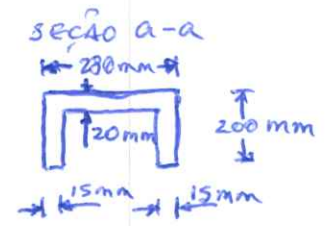
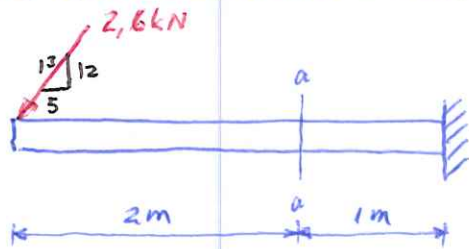
$$\sigma_{\max} = \frac{Mc}{I} = \frac{22,5 \cdot 10^3 \cdot 0,170}{3,0 \cdot 10^{-4}} = 13 \text{ MPa}$$

Distribuição de tensões na seção transversal no meio da viga:



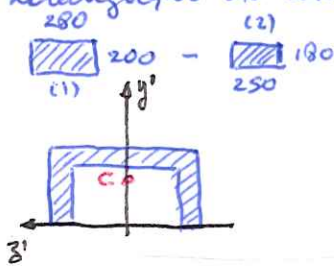
Slide 16-26 cap 06-d

Exemplo 6.2 A viga de perfil "U" está apoiada em balanço e recebe uma força inclinada na extremidade livre. Determine a tensão de flexão máxima que ocorre na seção a-a.



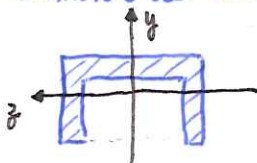
Solução:

Localização do centroide e eixo neutro da seção transversal:



$$y'_c = \frac{280 \cdot 200 \cdot 100 + 250 \cdot 180 \cdot 90}{280 \cdot 200 + 250 \cdot 180} = 141 \text{ mm}$$

Momento de inércia em relação ao eixo neutro z:



$$(I_z)_1 = \frac{b_1 h_1^3}{12} + b_1 h_1 (y_c - y_{c1})^2 = \frac{280 \cdot 200^3}{12} + 280 \cdot 200 (141 - 100)^2 = 2,81 \cdot 10^8 \text{ mm}^4$$

$$(I_z)_2 = \frac{b_2 h_2^3}{12} + b_2 h_2 (y_c - y_{c2})^2 = \frac{250 \cdot 180^3}{12} + 250 \cdot 180 (141 - 90)^2 = 2,39 \cdot 10^8 \text{ mm}^4$$

$$I_z = (I_z)_1 - (I_z)_2 = 2,81 \cdot 10^8 - 2,39 \cdot 10^8 = 4,2 \cdot 10^7 \text{ mm}^4 \text{ ou } 4,2 \cdot 10^{-5} \text{ m}^4$$

Momento fletor na seção a-a:



$$M_z = -2,4 \cdot 2 - 1,0 \cdot 0,059 = -4,86 \text{ kN}\cdot\text{m}$$

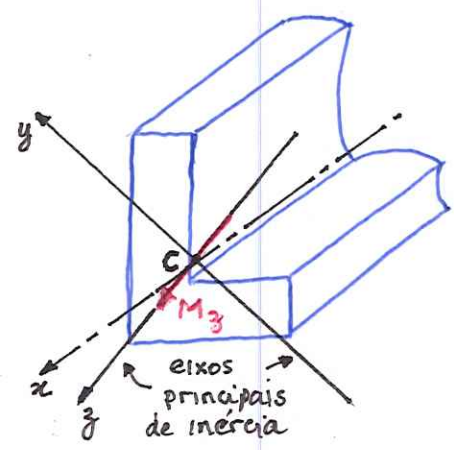
Insião de flexão máxima na seção a-a:

$$\sigma_{max} = \frac{M c}{I} = \frac{4,86 \cdot 10^3 \cdot 0,141}{4,2 \cdot 10^{-5}} = 16 \text{ MPa}$$

6.4. FLEXÃO ASSIMÉTRICA

Anteriormente assumimos que a figura formada pela seção transversal fosse simétrica e que o plano de aplicação do carregamento coincidisse com esse plano. Agora vamos tratar de elementos simétricos nos quais o carregamento não está aplicado no plano de simetria ou de elementos que não são simétricos.

Nestes casos, temos que analisar a flexão em torno dos eixos principais de inércia da seção transversal. Considere um elemento não simétrico em que o carregamento ocorre num dos planos de inércia principais.



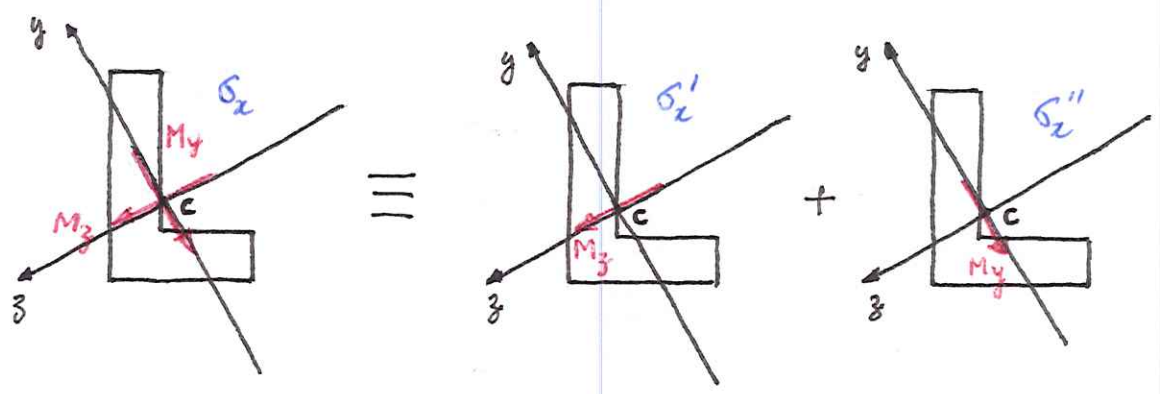
Slides 6.12 cap 06-f
6.13
6.14 - 6.20

A distribuição de tensões devido ao momento fletor M_z é:

$$\sigma_x = -\frac{M_z}{I_z} y$$

Observe por esta expressão que o eixo principal z é o eixo neutro da seção representada na figura acima. Assim desse eixo as tensões normais têm um sinal +, abaixo, um sinal oposto. Além disso, a tensão normal varia linearmente com a coordenada y .

Quando o plano de flexão não coincide com os planos de inércia prin-
cipais, deve-se decompor o momento fletor na direção transversal na direção dos
 eixos principais de inércia e obter a distribuição de tensão normal pelo prin-
 cípio da superposição, ou seja, somando a distribuição de tensão causada
 por uma e outra componentes do momento fletor.



$$\sigma'_x = \frac{-M_z}{I_z} y$$

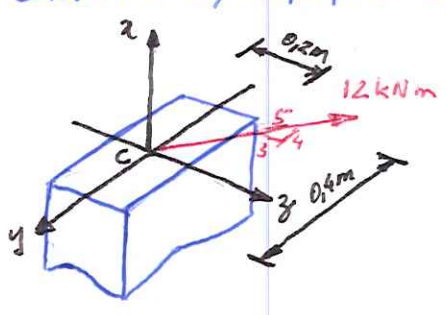
$$\sigma''_x = \frac{-M_y}{I_y} z$$

Pelo princípio da superposição :

$$\sigma_x = \sigma'_x + \sigma''_x = \frac{-M_z}{I_z} y + \frac{-M_y}{I_y} z$$

Deve-se tomar cuidado nesta última expressão com o sinal das
componentes de momento fletor na seção. Pela subentende-se que M_z é positivo
 se traciona na região de y negativo e vice-versa, e que M_y é positivo se tra-
 ciona na região de z negativo e vice-versa.

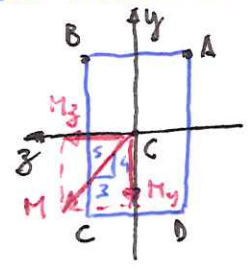
Exemplo 6.3: A seção transversal de uma viga está sujeita ao momento fletor
 indicado de 12 kNm. Determine a expressão da distribuição de tensão normal,
 as tensões nos quatro cantos e especifique a orientação do eixo neutro nesta
 seção.



Solução:

Como todo eixo de simetria é eixo principal de inércia, não é necessário determiná-los. Correspondem aos eixos y e z da figura.

Componentes do momento fletor:



$$M_y = \frac{4}{5} M = +9,6 \text{ kN}\cdot\text{m} \quad (\text{traciona em } z \text{ negativo})$$

$$M_z = \frac{3}{5} M = +7,2 \text{ kN}\cdot\text{m} \quad (\text{traciona em } y \text{ negativo})$$

Momentos de inércia:

$$I_y = \frac{1}{12} 0,4 \cdot 0,2^3 = 2,7 \cdot 10^{-4} \text{ m}^4$$

$$I_z = \frac{1}{12} 0,2 \cdot 0,4^3 = 1,1 \cdot 10^{-3} \text{ m}^4$$

Lei de flexão:

$$\sigma_z = -\frac{M_z}{I_z} y + -\frac{M_y}{I_y} z = -\frac{7,2 \cdot 10^3}{1,1 \cdot 10^{-3}} y + -\frac{9,6 \cdot 10^3}{2,7 \cdot 10^{-4}} z$$

$$\sigma_z = -6,5 \cdot 10^6 y - 36 \cdot 10^6 z \quad [\text{Pa}]$$

Lei de flexão nos 4 cantos:

$$\text{Canto A: } \sigma_{zA} = -6,5 \cdot 10^6 \cdot 0,2 - 36 \cdot 10^6 \cdot -0,1 = 2,3 \text{ MPa (tração)}$$

$$\text{Canto B: } \sigma_{zB} = -6,5 \cdot 10^6 \cdot 0,2 - 36 \cdot 10^6 \cdot 0,1 = -4,9 \text{ MPa (compressão)}$$

$$\text{Canto C: } \sigma_{zC} = -6,5 \cdot 10^6 \cdot -0,2 - 36 \cdot 10^6 \cdot 0,1 = -2,3 \text{ MPa (compressão)}$$

$$\text{Canto D: } \sigma_{zD} = -6,5 \cdot 10^6 \cdot -0,2 - 36 \cdot 10^6 \cdot -0,1 = 4,9 \text{ MPa (tração)}$$

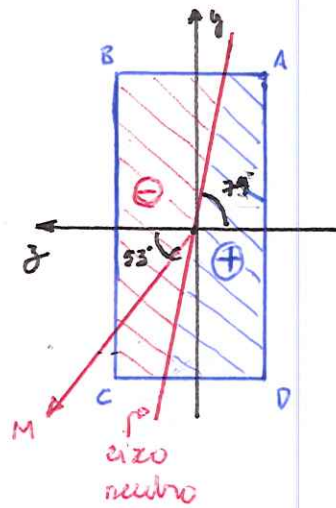
Orientação do eixo neutro:

$$\sigma_x = 0 \quad \text{ou} \quad -6,5 \cdot 10^6 y - 36 \cdot 10^6 z = 0$$

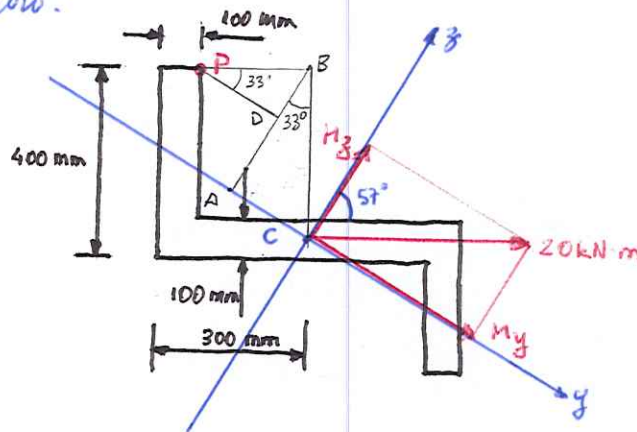
que é a equação de uma reta pela origem do plano yz . Para desenhar essa reta:

$$y = 0,2 \Rightarrow z = -0,036 \quad (\text{ponto E})$$

$$y = -0,2 \Rightarrow z = +0,036 \quad (\text{ponto F})$$



Exemplo 6.4: A seção transversal de uma viga é em forma de "Z" e está sujeita ao momento fletor de 20 kN.m indicado. São dados na figura abaixo os eixos principais de inércia e os respectivos momentos principais de inércia são $I_y = 9,60 \cdot 10^{-4} \text{ m}^4$ e $I_z = 7,54 \cdot 10^{-3} \text{ m}^4$. Determine a tensão normal no ponto P e a orientação do eixo neutro.



Solução:

Componentes do momento fletor:

$$M_y = -20 \cdot \sin 57^\circ = -17 \text{ kN}\cdot\text{m}$$

$$M_z = +20 \cdot \cos 57^\circ = +11 \text{ kN}\cdot\text{m}$$

Coordenadas do ponto P:

$\triangle ABC$ e $\triangle DBP$:

$$y_p = -BC \sin 33^\circ - PB \cos 33^\circ = -0,350 \cdot \sin 33^\circ - 0,200 \cdot \cos 33^\circ = -0,358 \text{ m}$$

$$z_p = BC \cos 33^\circ - PB \sin 33^\circ = 0,350 \cdot \cos 33^\circ - 0,200 \cdot \sin 33^\circ = +0,185 \text{ m}$$

Distribuição de tensão de flexão:

$$\sigma_z = -\frac{M_z}{I_z} y - \frac{M_y}{I_y} z = -\frac{11 \cdot 10^3}{7,54 \cdot 10^{-3}} y - \frac{-17 \cdot 10^3}{9,60 \cdot 10^{-4}} z = -1,46 \cdot 10^6 y + 17,7 \cdot 10^6 z$$

Tensão normal no ponto P:

$$\sigma_p = -1,46 \cdot 10^6 \cdot (-0,358) + 17,7 \cdot 10^6 \cdot 0,185 = +3,8 \text{ MPa (tração)}$$

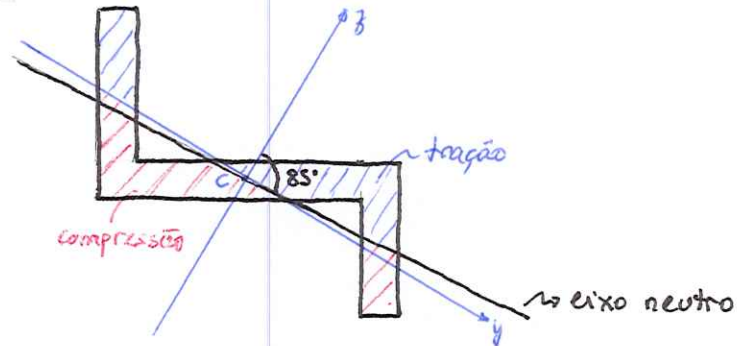
Localização do eixo neutro:

$$\sigma_x = 0$$

$$-1,46 \cdot 10^6 y + 17,7 \cdot 10^6 z = 0$$

ou $y = 12,1 z = (\operatorname{tg} \alpha) z$

$$\alpha = \operatorname{arctg} 12,1 = 85^\circ$$



EXERCÍCIOS PROPOSTOS: 6.3, 6.10, 6.23, 6.25, 6.46, 6.51, 6.58, 6.62, 6.73, 6.76, 6.79, 6.83, 6.94, 6.95,
6.107, 6.109, 6.112, 6.114.