

## EQUILÍBRIO EM DUAS DIMENSÕES

## 5.2 DIAGRAMAS DE CORPO LIVRE

Para uma aplicação bem-sucedida das equações de equilíbrio, é preciso uma completa especificação de *todas* as forças externas conhecidas e desconhecidas que atuam *no* corpo. A melhor maneira de fazer isso é construindo o diagrama de corpo livre para esse corpo. O diagrama é um esboço da forma do corpo, representado *isolado* ou 'livre' dos elementos vizinhos, isto é, como um 'corpo livre'. Nesse esboço é necessário mostrar *todas* as forças e momentos que as vizinhanças exercem *sobre o corpo* para que esses efeitos sejam levados em consideração quando as equações de equilíbrio forem aplicadas. Por essa razão, *saber bem como desenhar um diagrama de corpo livre é de primordial importância na resolução de problemas de mecânica.*

TABELA 5.1 APOIOS DE CORPOS RÍGIDOS SUJEITOS A SISTEMAS DE FORÇAS BIDIMENSIONAIS


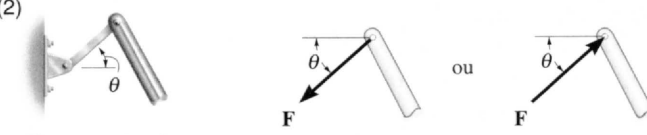

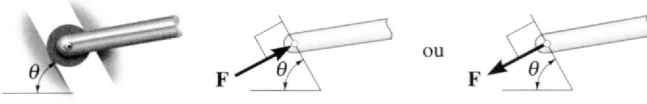


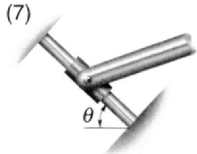
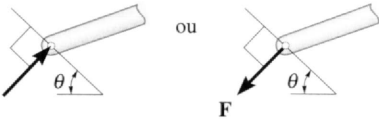
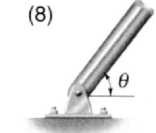

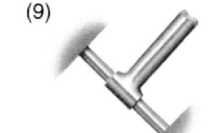
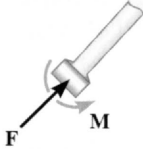
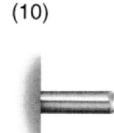
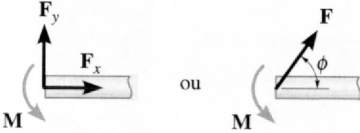
Tipos de ligação	Reação	Número de incógnitas
(1)  Cabo		Uma incógnita. A reação é uma força de tensão que atua no sentido de afastamento do elemento, puxando-o ao longo do cabo.
(2)  Haste ou vínculo sem peso		Uma incógnita. A reação é uma força que atua ao longo do eixo da haste.
(3)  Rolete		Uma incógnita. A reação é uma força que atua perpendicularmente à superfície no ponto de contato.
(4)  Rolete ou pino confinado em uma guia sem atrito		Uma incógnita. A reação é uma força que atua perpendicularmente à guia.
(5)  Balancim		Uma incógnita. A reação é uma força que atua perpendicularmente à superfície no ponto de contato.
(6)  Superfície de contato sem atrito		Uma incógnita. A reação é uma força que atua perpendicularmente à superfície no ponto de contato.

TABELA 5.1 APOIOS DE CORPOS RÍGIDOS SUJEITOS A SISTEMAS DE FORÇAS BIDIMENSIONAIS (CONTINUAÇÃO)

Tipos de ligação	Reação	Número de incógnitas
<p>(7)</p>  <p>Elemento em forma de cavilha conectado ao colar deslizando por uma barra sem atrito</p>		<p>Uma incógnita. A reação é uma força que atua perpendicularmente à barra.</p>
<p>(8)</p>  <p>Pino sem atrito ou articulação</p>		<p>Duas incógnitas. As reações são dois componentes de força, ou a intensidade e direção <math>\phi</math> da força resultante. Note que <math>\phi</math> e <math>\theta</math> não são necessariamente iguais (geralmente não são, a menos que a barra mostrada seja vinculada como em (2)).</p>
<p>(9)</p>  <p>Elemento fixo a um colar deslizando sobre uma barra sem atrito</p>		<p>Duas incógnitas. As reações são o momento e a força que atua perpendicularmente à barra.</p>
<p>(10)</p>  <p>Apoio fixo ou engaste</p>		<p>Três incógnitas. As reações são o momento e os dois componentes de força, ou o momento e a intensidade e direção <math>\phi</math> da força resultante.</p>

**Reações de Apoio.** Antes de apresentar um procedimento formal de como desenhar um diagrama de corpo livre, vamos considerar primeiramente os vários tipos de reações que ocorrem nos apoios e nos pontos de apoio entre os corpos submetidos a sistemas de forças coplanares. *Como regra geral, se um apoio impede a translação de um corpo em dada direção, então uma força é desenvolvida sobre o corpo naquela direção. Da mesma forma, se a rotação é impedida, um momento é aplicado sobre o corpo.*

Para exemplificarmos, vamos considerar três maneiras pelas quais um elemento horizontal, tal como uma viga, é apoiado em suas extremidades. Um primeiro exemplo é um rolete ou cilindro (Figura 5.2a). Como esse apoio impede apenas a translação da viga na direção vertical, o rolete pode exercer uma força sobre ela apenas nessa direção (Figura 5.2b).

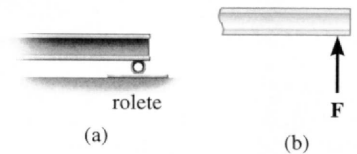


Figura 5.2

A viga pode ser apoiada de uma maneira mais restritiva usando-se um pino (Figura 5.3a). O pino passa por um furo na viga e por duas chapas que são fixadas no solo. Nesse caso, ele pode impedir a translação da viga em qualquer direção  $\phi$  (Figura 5.3b) e então deve exercer uma força  $\mathbf{F}$  sobre a viga nessa direção. Para fins de análise, em geral é mais fácil representar essa força  $\mathbf{F}$  resultante pelos seus dois componentes  $\mathbf{F}_x$  e  $\mathbf{F}_y$ , como visto na Figura 5.3c. Se  $\mathbf{F}_x$  e  $\mathbf{F}_y$  são conhecidos, então  $F$  e  $\phi$  podem ser calculados.

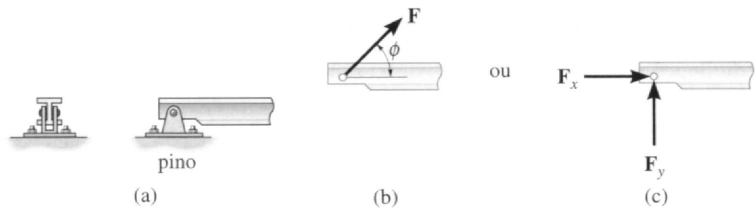


Figura 5.3

A forma mais restritiva de apoiar a viga é empregando um *apoio fixo* (Figura 5.4a). Esse apoio impedirá *tanto a translação quanto a rotação* da viga e, para isso, devem ser desenvolvidos *uma força e um momento* sobre a viga nesse ponto (Figura 5.4b). Como no caso do pino, a força costuma ser representada pelos seus componentes  $F_x$  e  $F_y$ .

Na Tabela 5.1 são mostrados outros tipos comuns de apoios para corpos sujeitos a sistemas de forças coplanares. (Em todos os casos, consideramos que o ângulo  $\theta$  é conhecido.) Observe com atenção cada um dos símbolos utilizados para representar esses apoios e os tipos de reações que eles exercem sobre seus elementos de contato. Ainda que as forças e os momentos concentrados sejam mostrados nessa tabela, eles realmente representam as *resultantes* de pequenas *superfícies de cargas distribuídas* que existem entre cada apoio e seus correspondentes elementos de contato. Essas *resultantes* serão determinadas das equações de equilíbrio.

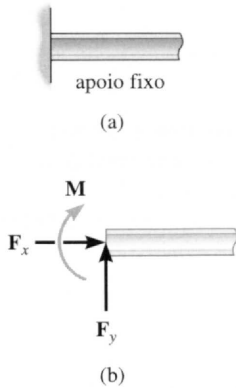
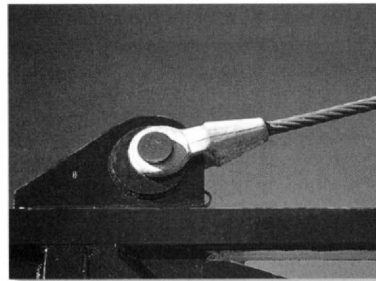
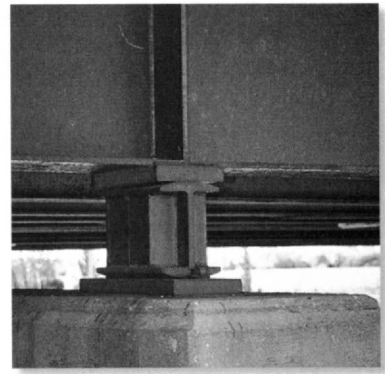


Figura 5.4

Exemplos de apoios mostrados na Tabela 5.1 são apresentados na seqüência de fotos a seguir.



Os cabos exercem uma força sobre o apoio na direção dele. (1)



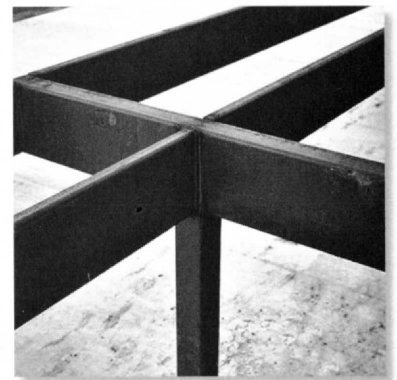
O apoio da viga-mestra dessa ponte permite movimento horizontal, de forma que a ponte tenha liberdade de expansão e contração devido às variações de temperatura. (5)



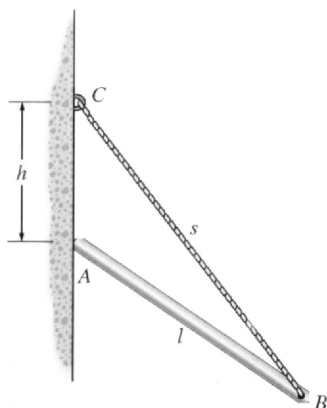
Essa viga-mestra de concreto se apóia na saliência, que se pretende que atue como uma superfície de contato sem atrito. (6)



A estrutura mostrada na foto é sustentada por pinos colocados nas extremidades das colunas. (8)

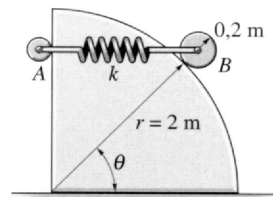


As vigas do piso desse prédio são engastadas entre si e formam uma conexão fixa. (10)



Problema 5.61

5.62. O disco  $B$  tem massa de 20 kg e permanece apoiado na superfície cilíndrica lisa por meio de uma mola de rigidez  $k = 400 \text{ N/m}$  e comprimento não distendido  $l_0 = 1 \text{ m}$ . A mola permanecerá na posição horizontal, uma vez que sua extremidade em  $A$  está presa ao pequeno rolete-guia, de peso desprezível. Determine o ângulo  $\theta$  para o limiar de equilíbrio do rolete.



Problema 5.62

## EQUILÍBRIO EM TRÊS DIMENSÕES

### 5.5 DIAGRAMAS DE CORPO LIVRE

O primeiro passo na resolução de problemas de equilíbrio em três dimensões, assim como em duas dimensões, é desenhar o diagrama de corpo livre do corpo (ou do grupo de corpos considerados como um sistema). Antes de mostrarmos esse procedimento, no entanto, é necessário discutir os tipos de reações que podem ocorrer nos apoios.

**Reações de Apoio.** As forças e os momentos de reações que atuam nos vários tipos de apoios e conexões, quando os elementos são vistos em três dimensões, são apresentados na Tabela 5.2. É importante reconhecer os símbolos utilizados para representar cada um desses apoios e entender claramente como as forças e os momentos são desenvolvidos por cada apoio. Como no caso de duas dimensões, a força é desenvolvida por um apoio que restringe a translação do elemento, uma vez que o momento ocorre quando a rotação do elemento ligado é impedida. Por exemplo, na Tabela 5.2, a junta esférica (4) impede qualquer translação do elemento no ponto de conexão. Essa força tem três componentes com intensidades incógnitas  $F_x$ ,  $F_y$  e  $F_z$ . Após se determinarem os valores desses componentes, pode-se obter a intensidade da força,  $F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2 + F_z^2}$ , com sua orientação definida pelos ângulos diretores coordenados  $\alpha$ ,  $\beta$  e  $\gamma$ , conforme as equações 2.7.<sup>1</sup> Como os componentes de conexão podem girar livremente em torno de qualquer eixo, não há resistência a nenhum momento por uma junta esférica.

Deve ser observado que os apoios com mancal simples (5) e (7), com o pino ou articulação simples (8) e a dobradiça simples (9) são apresentados como apoios que estão sujeitos aos componentes de forças e momentos. Se, no entanto, esses apoios são usados em combinação com outros mancais, pinos ou dobradiças para sustentar o equilíbrio de um corpo rígido e se estão adequadamente alinhados ao corpo, então as reações das forças nesses apoios devem ser adequadas *por si só* para sustentar o corpo. Em outras palavras, os momentos se tornam redundantes e não são apresentados no diagrama de corpo livre. O motivo disso ficará claro após os exemplos a seguir.

<sup>1</sup> As três incógnitas podem também ser representadas como uma força desconhecida de intensidade  $F$  e dois ângulos diretores coordenados desconhecidos. O terceiro ângulo é obtido com a utilização da identidade  $\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1$  (Equação 2.10).

TABELA 5.2 APOIOS DE CORPOS RÍGIDOS SUJEITOS A SISTEMAS DE FORÇAS TRIDIMENSIONAIS





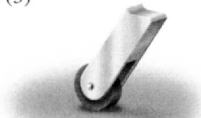
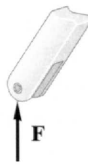

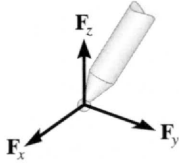
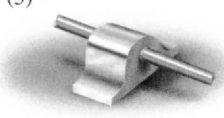
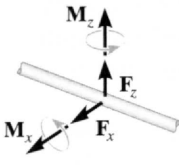
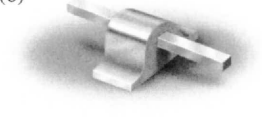
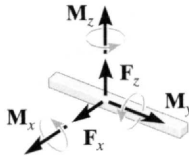
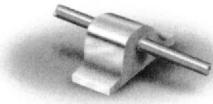
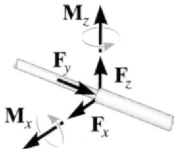

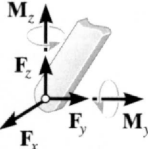
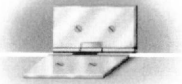
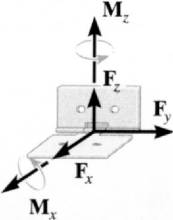
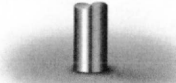
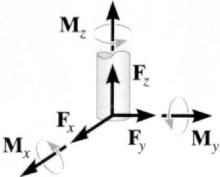
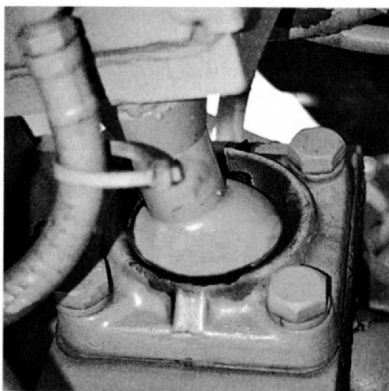
Tipos de ligação	Reação	Número de incógnitas
(1)  cabo		Uma incógnita. A reação é uma força de tração que atua no sentido de afastamento do elemento, puxando-o ao longo do cabo.
(2)  apoio de superfície lisa		Uma incógnita. A reação é uma força que atua perpendicularmente à superfície no ponto de contato.
(3)  rolete		Uma incógnita. A reação é uma força que atua perpendicularmente à superfície no ponto de contato.
(4)  junta esférica		Três incógnitas. As reações são três componentes retangulares da força.
(5)  mancal radial simples		Quatro incógnitas. As reações são dois componentes de força e dois componentes de momento perpendiculares ao eixo.
(6)  mancal simples com eixo de seção transversal quadrada		Cinco incógnitas. As reações são dois componentes de força e três componentes de momento.

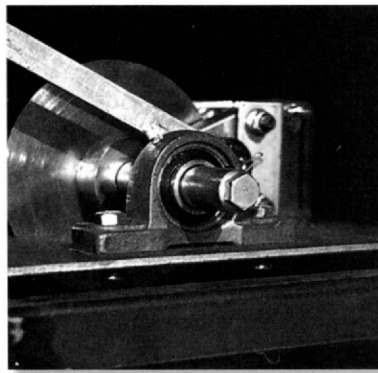
TABELA 5.2 APOIOS DE CORPOS RÍGIDOS SUJEITOS A SISTEMAS DE FORÇAS TRIDIMENSIONAIS (CONTINUAÇÃO)

Tipos de ligação	Reação	Número de incógnitas
<p>(7)</p>  <p>mancal axial ou de encosto</p>		<p>Cinco incógnitas. As reações são três componentes de força e dois componentes de momento.</p>
<p>(8)</p>  <p>pino sem atrito ou articulação</p>		<p>Cinco incógnitas. As reações são três componentes de força e dois componentes de momento.</p>
<p>(9)</p>  <p>dobradiça simples</p>		<p>Cinco incógnitas. As reações são três componentes de força e dois componentes de momento.</p>
<p>(10)</p>  <p>apoio fixo ou engaste</p>		<p>Seis incógnitas. As reações são três componentes de forças e três componentes de momento.</p>

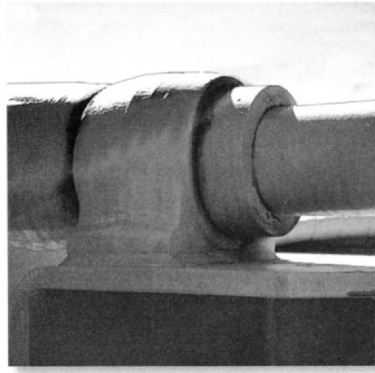
Exemplos típicos de apoios reais citados na Tabela 5.2 são mostrados na seguinte seqüência de fotos.



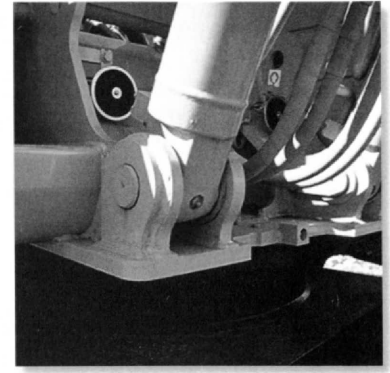
Esta junta esférica permite uma conexão entre o protetor de uma máquina niveladora de terreno e sua estrutura. (4)



Este mancal simples apóia uma extremidade do eixo. (5)

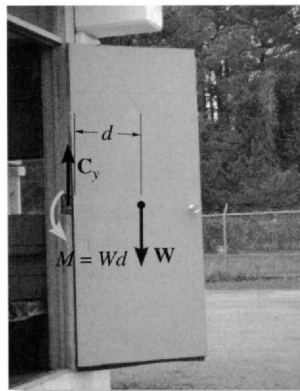


Este mancal de encosto é usado para apoiar o eixo da caixa de transmissão de uma máquina. (7)

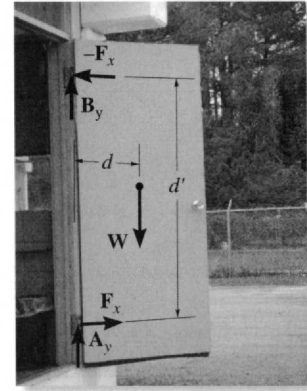


Esta articulação é usada para apoiar uma extremidade de um braço da estrutura de um trator. (8)

**Diagramas de Corpo Livre.** O procedimento geral para desenhar o diagrama de corpo livre para um corpo rígido foi apresentado na Seção 5.2. Essencialmente, é necessário em primeiro lugar 'isolar' o corpo desenhando seu contorno. Feito isso, *identifica-se* com cuidado *todas* as forças e momentos em relação a um sistema de coordenadas  $x, y, z$ . Como regra geral, os *componentes de reação* que tenham *intensidades desconhecidas* são apresentados no diagrama de corpo livre atuando no *sentido positivo*. Dessa maneira, se qualquer valor negativo for obtido, será um indicativo de que, na verdade, os componentes atuam no sentido negativo no mesmo sistema de coordenadas.



(a)



(b)

É um engano utilizar uma única dobradiça para apoiar uma porta, porque a dobradiça deve criar uma força  $C_y$  para equilibrar o peso  $W$  da porta e um momento  $M$  para equilibrar o momento de  $W$ , isto é,  $M = Wd$ . Se, em vez disso, forem utilizadas duas dobradiças adequadamente alinhadas, então o peso será distribuído para ambas, tal que  $A_y + B_y = W$ , e a resistência ao momento da porta será fornecida pelas duas forças das dobradiças,  $F_x$  e  $-F_y$ . Essas forças formam um binário, de tal forma que  $F_x d' = Wd$ . Em outras palavras, nenhum momento é gerado pelas dobradiças na porta, porque elas estão adequadamente alinhadas. Em vez disso, as forças  $F_x$  e  $-F_x$  resistirão à rotação provocada por  $W$ .

## EXEMPLO 5.14

Exemplos de objetos e seus diagramas de corpo livre associados são mostrados na Figura 5.25. Em todos os casos, os eixos  $x, y, z$  são estabelecidos e os componentes de reação incógnitos são indicados no sentido positivo. Os pesos dos objetos são desconsiderados.