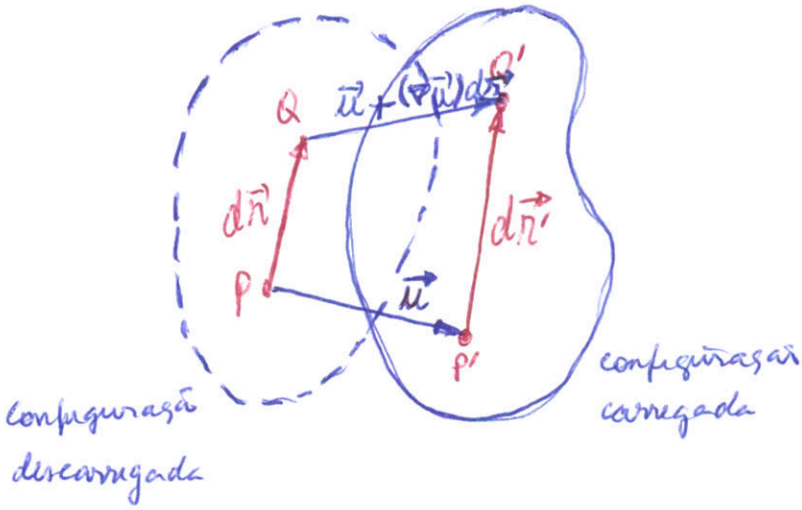
3.1. Campo de deslocamento de um sólido



Considere um sólido inicialmente descarregado. Nele definem-se duas partículas que correspondem aos pontos P e Q. O segmento material PQ, denotado por $d\vec{r}$, é formado pelas partículas posicionadas sobre ele será denominado segmento material infinitesimal. Seu comprimento na configuração descarregada será denotado por dr.

Quando o sólido é carregado e deslocado, todas as suas partículas se deslocam relativamente à sua posição na configuração descarregada. Na figura acima, por exemplo, a partícula em P se deslocou de $\vec{u}$, atingindo a posição P'. Pode-se, portanto, associar a cada ponto do sólido na configuração descarregada um vetor deslocamento como o da partícula em P. Tem-se assim um campo vetorial de deslocamento na região do espaço R^3 onde o sólido se encontrava na sua configuração descarregada.

Retornando ao segmento material infinitesimal, observe que ele adquiriu um novo comprimento e orientação no espaço na configuração carregada. Com o auxílio da figura, o vetor $d\vec{r}'$ que representa este segmento numa configuração carregada qualquer é:

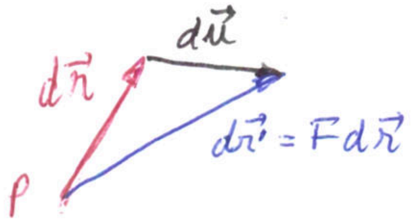
$$d\vec{r}' = d\vec{r} + \vec{u} + (\nabla\vec{u})\,d\vec{r} - \vec{u} = d\vec{r} + \nabla\vec{u}\,d\vec{r}$$

ou
$$d\vec{r}' = (I + \nabla\vec{u})\,d\vec{r}$$

Denominaremos de <u>tensor gradiente de deformação</u>, F, ao tensor $I + \nabla\vec{u}$, de modo que:

$$d\vec{r}' = F\,d\vec{r}$$

Portanto, o tensor gradiente de deformação F informa qual a orientação e comprimento do segmento material infinitesimal $d\vec{r}$ numa determinada configuração do sólido.



Observe que F está associado ao ponto P do espaço R^3 e, portanto, deve ser calculado aí, ou seja, no ponto de onde sai o vetor $d\vec{r}$.

3.2. <u>O tensor de deformação infinitesimal</u>

Tomando a diferença entre $d\vec{r}'$ e $d\vec{r}$, observa-se que:

$$d\vec{r}' - d\vec{r} = (\nabla\vec{u})\,d\vec{r} = d\vec{u}$$

ou seja, é a variação do deslocamento da partícula em P do ponto P para o Q.

Suponha que a magnitude da variação de deslocamento $d\vec{u}$ sejam bem menor que o comprimento de $d\vec{r}$ (condição de deformação infinitesimal) ustes termos, à componente simétrica do gradiente de deslocamento $\nabla\vec{u}$. denomina-se <u>tensor de deformação infinitesimal</u>, que será denotado por E:

$$E = \frac{1}{2}\left(\nabla\vec{u} + (\nabla\vec{u})^T\right)$$

Suas componentes cartesianas são:

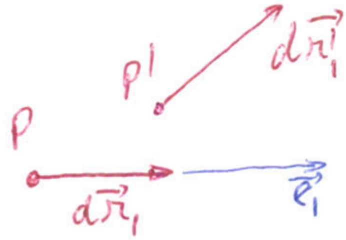
$$E_{ij} = \frac{1}{2}\left(u_{i,j} + u_{j,i}\right)$$

Matricialmente, tem-se para o tensor de deformação infinitesimal

$$[E] = \begin{bmatrix} u_{1,1} & \frac{1}{2}(u_{1,2}+u_{2,1}) & \frac{1}{2}(u_{1,3}+u_{3,1}) \\ \frac{1}{2}(u_{1,2}+u_{2,1}) & u_{2,2} & \frac{1}{2}(u_{2,3}+u_{3,2}) \\ \frac{1}{2}(u_{1,3}+u_{3,1}) & \frac{1}{2}(u_{2,3}+u_{3,2}) & u_{3,3} \end{bmatrix}$$

3.3. Significado físico do tensor de deformação infinitesimal

Para identificar o significado físico da componente simétrica do gradiente de deslocamento, considere um segmento material infinitesimal que sai de P e se orienta na direção $\vec{e}_1$ da base ortonormal $\{\vec{e}_i\}$:



Conforme a definição:

$$d\vec{r}_1 = dr_1\,\vec{e}_1$$

onde dr_1 é o comprimento desse segmento material infinitesimal.

Tomando o produto escalar de $d\vec{r}_1'$ por ele próprio:

$$d\vec{r}_1' \cdot d\vec{r}_1' = (I + \nabla\vec{u})\, d\vec{r}_1 \cdot (I + \nabla\vec{u})\, d\vec{r}_1$$

$$= d\vec{r}_1 \cdot (I + \nabla\vec{u})^T (I + \nabla\vec{u})\, d\vec{r}_1$$

$$= d\vec{r}_1 \cdot (I + (\nabla\vec{u})^T)(I + \nabla\vec{u})\, d\vec{r}_1$$

$$= dr_1 \vec{e}_1 \cdot (I + \nabla\vec{u} + (\nabla\vec{u})^T + (\nabla\vec{u})^T \nabla\vec{u})\, dr_1 \vec{e}_1$$

$$= dr_1^2\, \vec{e}_1 \cdot (I + 2E + (\nabla\vec{u})^T \nabla\vec{u})\, \vec{e}_1$$

Considerando que $u_{i,j}$ sejam muito pequenas, a parcela $(\nabla\vec{u})^T \nabla\vec{u}$ pode ser desprezada no termo entre parênteses na última linha da equação acima. Logo:

$$d\vec{r}_1' \cdot d\vec{r}_1' = dr_1^2\, \vec{e}_1 \cdot (I + 2E)\, \vec{e}_1 = dr_1^2 (1 + 2E_{11})$$

Como: $d\vec{r}_1' \cdot d\vec{r}_1' = (dr_1')^2$, então:

$$(dr_1')^2 = dr_1^2 (1 + 2E_{11})$$

Reescrevendo esta última equação:

$$\frac{(dr_1')^2 - dr_1^2}{dr_1^2} = 2E_{11}$$

Mas: $\dfrac{(dr_1')^2 - dr_1^2}{dr_1^2}$ $\quad \dfrac{(dr_1' + dr_1)(dr_1' - dr_1)}{dr_1^2} \cong \dfrac{2dr_1 (dr_1' - dr_1)}{dr_1^2} = \dfrac{2(dr_1' - dr_1)}{dr_1}$

Logo:

$$E_{11} = \frac{dr_1' - dr_1}{dr_1}$$

Ou seja, a componente E_{11} do tensor deformação infinitesimal (componente simétrica do tensor gradiente de deformação para pequenas deformações) é a diferença do comprimento do segmento material diferencial entre a configuração carregada e descarregada dividido pelo comprimento não deformado desse segmento.

Que fique claro que esta interpretação física vale apenas para pequenas deformações ($u_{i,j} = O(10^{-2})$).

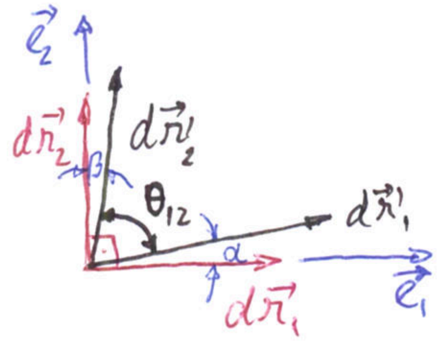
Por procedimento análogo para os segmentos $d\vec{r}_2 = dr_2 \vec{e}_2$ e $d\vec{r}_3 = dr_3 \vec{e}_3$ saindo do ponto P, pode-se mostrar que:

$$E_{22} = \frac{dr_2' - dr_2}{dr_2}$$

$$E_{33} = \frac{dr_3' - dr_3}{dr_3}$$

Estes coeficientes são denominados de deformações normais.

Para o significado físico das componentes fora da diagonal principal da matriz do tensor de deformação infinitesimal, considere agora dois elementos materiais infinitesimais dispostos nas direções $\vec{e}_1$ e $\vec{e}_2$ da base ortonormal $\{\vec{e}_i\}$ na configuração descarregada do sólido.



Tem-se, portanto:

$$d\vec{r}_1' = (I+\nabla\vec{u})\,d\vec{r}_1$$

$$d\vec{r}_2' = (I+\nabla\vec{u})\,d\vec{r}_2$$

Tomando o produto escalar entre os dois elementos materiais infinitesimais na configuração carregada do sólido:

$$d\vec{r}_1' \cdot d\vec{r}_2' = (I+\nabla\vec{u})\,d\vec{r}_1 \cdot (I+\nabla\vec{u})\,d\vec{r}_2$$

$$= d\vec{r}_2 \cdot (I+\nabla\vec{u})^T (I+\nabla\vec{u})\,d\vec{r}_1$$

Como visto anteriormente, para deformações infinitesimais $(I+\nabla\vec{u})^T(I+\nabla\vec{u}) \cong (I+2E)$. Portanto:

$$d\vec{r}_2 \cdot (I+\nabla\vec{u})^T(I+\nabla\vec{u})\,d\vec{r}_1 \cong d\vec{r}_2 \cdot (I+2E)\,d\vec{r}_1$$

Lembrando que $d\vec{r}_1 = dr_1\vec{e}_1$ e $d\vec{r}_2 = dr_2\vec{e}_2$, então:

$$d\vec{r}_1' \cdot d\vec{r}_2' = dr_1\,dr_2\;\vec{e}_2 \cdot (I+2E)\,\vec{e}_1$$

$$= dr_1\,dr_2\,(\delta_{21} + 2E_{21})$$

$$= 2E_{21}\,dr_1\,dr_2$$

Por outro lado:

$$d\vec{r}_1' \cdot d\vec{r}_2' = dr_1'\,dr_2' \cos\theta_{12}$$

$$= (1+E_{11})\,dr_1\,(1+E_{22})\,dr_2 \cos\theta_{12}$$

$$\cong dr_1\,dr_2 \cos\theta_{12}$$

Igualando as duas últimas equações:

$$2E_{12} = \cos\theta_{12} = \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} - \theta_{12}\right) \cong \frac{\pi}{2} - \theta_{12} = \gamma_{12}$$

ou

$$\gamma_{12} = 2E_{12} = u_{1,2} + u_{2,1}$$

onde, fisicamente, $u_{2,1}$ e $u_{1,2}$ são aproximadamente os ângulos α e β indicados na figura acima, respectivamente.

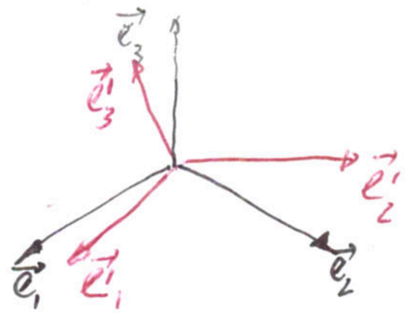
Portanto, o coeficiente E_{12} é a metade da variação do ângulo reto entre os dois segmentos materiais inicialmente orientados segundo as direções $\vec{e}_1$ e $\vec{e}_2$ na configuração descarregada. Valores positivos significam diminuição do ângulo reto e negativos o contrário.

Por procedimento análogo para os pares de segmentos $d\vec{r}_2 = dr_2\vec{e}_2$ e $d\vec{r}_3 = dr_3\vec{e}_3$ e $d\vec{r}_1 = dr_1\vec{e}_1$ e $d\vec{r}_3 = dr_3\vec{e}_3$ saindo de P, pode-se mostrar que $\gamma_{23} = 2E_{23}$ e $\gamma_{13} = 2E_{13}$, respectivamente.

Os ângulos γ_{ij} são denominados <u>deformações de cisalhamento</u>.

3.4 Transformação de deformação

Para conhecer como se deforma uma partícula em outras três direções ortogonais, recorre-se à transformação das componentes do tensor de deformação infinitesimal no novo sistema de coordenadas $\{\vec{e}_i'\}$. As novas componentes dão a interpretação física para o tensor E nessas novas direções, permitindo conhecer melhor o estado de deformação da partícula.



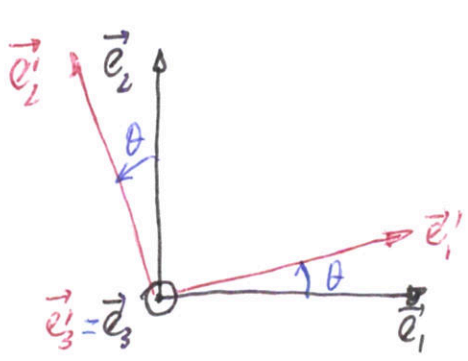
Como visto anteriormente, as componentes de um tensor de segunda ordem se transformam de um sistema ortonormal para outro segundo a expressão:

$$E'_{ij} = Q_{mi}\, Q_{nj}\, E_{mn}$$

onde Q_{ij} são as componentes da matriz de transformação de coordenadas entre os dois sistemas.

<u>Exemplo</u>: Dadas as componentes de um tensor de deformação infinitesimal num determinado ponto de um sólido no sistema ortonormal $\{\vec{e}_i\}$, determine as suas novas componentes no sistema $\{\vec{e}_i'\}$ obtido a partir do primeiro mediante a rotação de um ângulo θ no sentido anti-horário em torno do vetor $\vec{e}_3$. Interprete o significado físico das componentes nesse novo sistema.

$$[E]_{\vec{e}_i} = \begin{bmatrix} E_{11} & E_{12} & 0 \\ E_{12} & E_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$



Solução:

Matriz de transformação de coordenadas:

$$Q_{11} = \cos(\vec{e}_1, \vec{e}'_1) = \cos\theta$$

$$Q_{12} = \cos(\vec{e}_1, \vec{e}'_2) = -\operatorname{sen}\theta$$

$$Q_{13} = \cos(\vec{e}_1, \vec{e}'_3) = 0$$

$$Q_{21} = \cos(\vec{e}_2, \vec{e}'_1) = \operatorname{sen}\theta$$

$$Q_{22} = \cos(\vec{e}_2, \vec{e}'_2) = \cos\theta$$

$$Q_{23} = \cos(\vec{e}_2, \vec{e}'_3) = 0$$

$$Q_{31} = \cos(\vec{e}_3, \vec{e}'_1) = 0$$

$$Q_{32} = \cos(\vec{e}_3, \vec{e}'_2) = 0$$

$$Q_{33} = \cos(\vec{e}_3, \vec{e}'_3) = 1$$

$$[Q] = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta & 0 \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$[E]_{\vec{e}'_i} = [Q]^T [E]_{\vec{e}_i} [Q]$$

$$[E]_{\vec{e}'_i} = \begin{bmatrix} \cos\theta & \operatorname{sen}\theta & 0 \\ -\operatorname{sen}\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_{11} & E_{12} & 0 \\ E_{12} & E_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta & 0 \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$E'_{11} = \frac{E_{11}+E_{22}}{2} + \frac{E_{11}-E_{22}}{2}\cos 2\theta + E_{12}\operatorname{sen} 2\theta$$

$$E'_{12} = E'_{21} = \frac{E_{22}-E_{11}}{2}\operatorname{sen} 2\theta + E_{12}\cos 2\theta$$

$$E'_{22} = \frac{E_{11}+E_{22}}{2} - \frac{E_{11}-E_{22}}{2}\cos 2\theta - E_{12}\operatorname{sen} 2\theta$$

$$E'_{13} = E'_{23} = E'_{33} = 0$$

Interpretação física das componentes:

E'_{11}, E'_{22} e E'_{33} representam a variação no comprimento pelo comprimento não deformado de segmentos materiais infinitesimais segundo as direções $\vec{e}_1\,'$, $\vec{e}_2\,'$ e $\vec{e}_3\,'$, respectivamente. Neste caso não há deformação em $\vec{e}_3\,'$.

E'_{12} é a metade da variação do ângulo reto entre os segmentos orientados segundo $\vec{e}_1$ e $\vec{e}_2$. Como $E'_{13} = E'_{23} = 0$, não há variação do ângulo reto entre os segmentos materiais infinitesimais orientados segundo as direções $\vec{e}_1$ e $\vec{e}_3$ e $\vec{e}_2$ e $\vec{e}_3$.

3.5. Deformações principais

As deformações principais e respectivas direções correspondem aos auto-valores e auto-vetores do tensor deformação infinitesimal. Como visto, as deformações principais correspondem às raízes da equação característica:

$$\left|[E] - E[I]\right| = E^3 - I_1 E^2 + I_2 E - I_3 = 0$$

com os invariantes:

$$I_1 = \operatorname{tr} E$$

$$I_2 = \begin{vmatrix} E_{11} & E_{12} \\ E_{12} & E_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} E_{11} & E_{13} \\ E_{13} & E_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} E_{22} & E_{23} \\ E_{23} & E_{33} \end{vmatrix}$$

$$I_3 = \begin{vmatrix} E_{11} & E_{12} & E_{13} \\ E_{12} & E_{22} & E_{23} \\ E_{13} & E_{23} & E_{33} \end{vmatrix}$$

O primeiro invariante, I_1, é a dilatação volumétrica. Seu significado físico é a variação volumétrica da partícula do sólido.

A matriz do tensor deformação infinitesimal E no sistema de coordenadas correspondente às suas direções principais é:

$$[E]_{\vec{n}_i} = \begin{bmatrix} E_1 & 0 & 0 \\ 0 & E_2 & 0 \\ 0 & 0 & E_3 \end{bmatrix}$$

onde E_1, E_2 e E_3 são as deformações principais de E.

Tomando $E_1 \geq E_2 \geq E_3$, tem-se para qualquer direção $\vec{e}_i$ que:

$$E_1 \geq E'_{ii} \geq E_3 \quad \text{(desconsidere notação indicial)}$$

Observe que <u>segmentos materiais infinitesimais orientados segundo as direções principais</u> de deformação da partícula <u>permanecem ortogonais entre si</u>. A justificativa disto está nos coeficientes fora da diagonal da matriz $[E]_{\vec{n}_i}$ serem nulos.

<u>Exemplo</u>. O estado de deformação uniaxial é aquele cujo o tensor deformação infinitesimal no sistema de coordenadas principais é dado por:

$$[E]_{\vec{n}_i} = \begin{bmatrix} E_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Interprete fisicamente esse estado de deformação.

Solução:

Primeiramente, os auto-valores do tensor de deformação uniaxial são:

$$E_1 \text{ e } E_2 = E_3 = 0$$

Portanto, qualquer vetor ortogonal ao auto-vetor $\vec{n}_1$ associado a E_1 é auto-vetor de $E_2 = E_3 = 0$.

Tomando uma base ortonormal $\{\vec{e}_i\}$ de modo que $\vec{e}_1 = \vec{n}_1$ e $\vec{e}_2$ e $\vec{e}_3$ dois vetores unitários ortogonais entre si e ortogonais a $\vec{n}_1$, tem-se nessa base:

$$E_{11} = \vec{e}_1 \cdot E\vec{e}_1 = \vec{e}_1 \cdot E_1 \vec{e}_1 = E_1$$

$$E_{12} = E_{21} = \vec{e}_1 \cdot E\vec{e}_2 = 0$$

$$E_{13} = E_{31} = \vec{e}_1 \cdot E\vec{e}_3 = 0$$

$$E_{22} = \vec{e}_2 \cdot E\vec{e}_2 = 0$$

$$E_{23} = \vec{e}_2 \cdot E\vec{e}_3 = 0$$

$$E_{33} = \vec{e}_3 \cdot E\vec{e}_3 = 0$$

Logo, qualquer segmento material infinitesimal ortogonal a $\vec{n}_1$ não se deforma. E quaisquer dois segmentos materiais infinitesimais ortogonais entre si e a $\vec{n}_1$ permanecem ortogonais entre si com a deformação uniaxial.

3.6 Tensores de deformação infinitesimal esférico e desviador

O tensor de deformação infinitesimal pode ser decomposto em duas partes denominadas esférica e desviadora.

O tensor de deformação infinitesimal esférico é definido como:

$$\tilde{E} = \frac{1}{3}(\mathrm{tr}\, E)\, I$$

ou

$$\tilde{E}_{ij} = \frac{1}{3} E_{kk}\, \delta_{ij} = \frac{1}{3} I_1\, \delta_{ij}$$

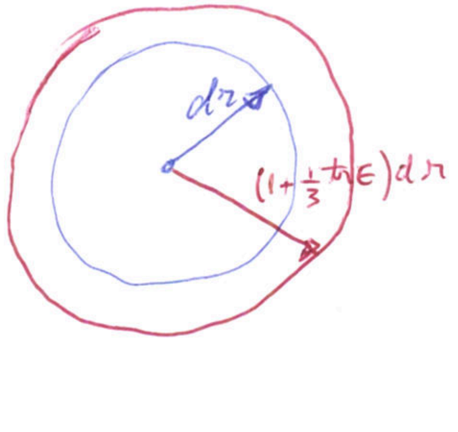
Como para este tensor qualquer direção é direção principal do único auto-valor $\frac{1}{3}\mathrm{tr}\,E$, tomando-se um segmento material infinitesimal qualquer $d\vec{r}$ tem-se:

$$\tilde{E}\, d\vec{r} = \frac{1}{3}(\mathrm{tr}\, E)\, d\vec{r}$$

e

$$d\vec{r} \circ \tilde{E}\, d\vec{r} = \frac{1}{3}(\mathrm{tr}\, E)\, dr^2$$

ou seja, o que na configuração descarregada é uma esfera, na configuração carregada continua uma esfera.

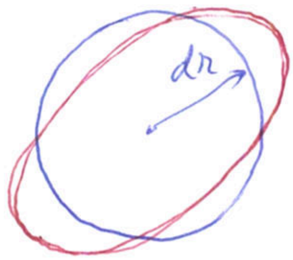


O tensor deformação infinitesimal desviador é definido como:

$$\hat{E} = E - \tilde{E} = E - \frac{1}{3}(\mathrm{tr}E)\, I$$

ou $$\hat{E}_{ij} = E_{ij} - \frac{1}{3}E_{kk}\delta_{ij}$$

Como este tensor tem traço nulo, ou seja, o seu primeiro invariante é nulo, ele preserva o volume. No entanto, ele representa a variação de forma de um elemento material volumétrico. Por exemplo, uma esfera material na configuração descarregada torna-se uma elipse de igual volume na configuração carregada.



Os tensores E e $\hat{E}$ têm as mesmas direções principais

Para justificar isto, considere o auto-valor e respectivo auto-vetor de E, λ e $\vec{n}$, de modo que:

$$E\vec{n} = \lambda\vec{n}$$

Logo:

$$\hat{E}\vec{n} = (E - \tilde{E})\vec{n} = E\vec{n} - \tilde{E}\vec{n} = E\vec{n} - \frac{1}{3}(\mathrm{tr}E)I\vec{n}$$

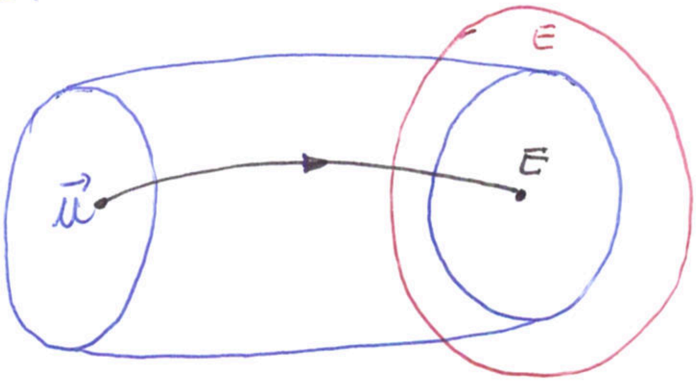
$$= \lambda\vec{n} - \frac{1}{3}(\mathrm{tr}E)\vec{n}$$

ou $$\hat{E}\vec{n} = (\lambda - \frac{1}{3}\mathrm{tr}E)\vec{n}$$

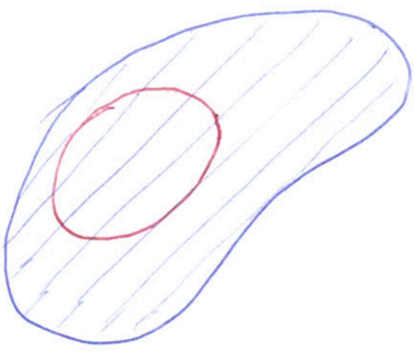
Isto é, $\vec{n}$ também é auto-vetor do auto-valor $\lambda - \frac{1}{3}\mathrm{tr}E$ do tensor $\tilde{E}$.

3.7. Condições de compatibilidade

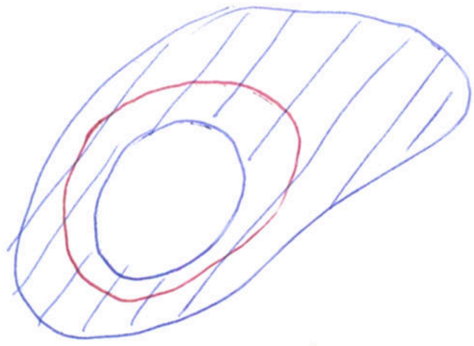
A todo campo de deslocamento corresponde um campo de tensor de deformação infinitesimal. Porém a recíproca é verdadeira sob determinadas condições denominadas <u>condições de compatibilidade</u>. O diagrama a seguir ilustra o problema.



Para que um campo de tensor de deformação infinitesimal E seja compatível com um campo de deslocamento $\vec{u}$ primeiro se exige que o sólido seja <u>simplesmente conexo</u>. Um sólido é simplesmente conexo se qualquer superfície fechada dentro do sólido pode ser colapsada num ponto sem cruzar a fronteira do sólido.



simplesmente conexo



multiplamente conexo.

Em segundo lugar se exige que as componentes do tensor de deformação infinitesimal verifiquem as seguintes relações:

$$E_{ij,kl} + E_{kl,ij} = E_{ik,jl} + E_{jl,ik}$$

Embora sejam 81 equações, muitas delas identidades do tipo $A = A$ ou meras repetições, apenas 6 equações são significativas:

$$E_{11,22} + E_{22,11} = 2E_{12,12}$$

$$E_{22,33} + E_{33,22} = 2E_{23,23}$$

$$E_{11,33} + E_{33,11} = 2E_{13,13}$$

$$E_{11,23} = E_{12,13} + E_{13,12} - E_{23,11}$$

$$E_{22,13} = E_{12,23} + E_{23,12} - E_{13,22}$$

$$E_{33,12} = E_{13,23} + E_{23,13} - E_{12,33}$$

Exemplo. Verifique se o campo ~~tensorial~~

$$[E] = A\begin{bmatrix} x_3 & 0 & 0 \\ 0 & x_3 & 0 \\ 0 & 0 & x_3 \end{bmatrix}$$

é compatível com um campo de deslocamento de um sólido simplesmente conexo. Caso afirmativo, determine esse campo de deslocamento.

Solução

$$E_{12,12} = E_{23,23} = E_{13,13} = E_{12,13} = E_{13,12} = E_{23,11} = E_{12,23} = E_{23,12} = E_{13,22} = E_{13,23} =$$

$$= E_{23,13} = E_{12,33} = E_{11,22} = E_{22,11} = E_{33,22} = E_{33,11} = E_{11,23} = E_{22,13} = E_{33,12} = E_{22,33} = E_{11,33} =$$

$$= 0$$

Portanto, todos os termos das equações de compatibilidade são nulos. Logo, todas elas se verificam. O campo tensorial dado é compatível com um campo de deslocamento num sólido simplesmente conexo.

Determinação do campo de deslocamento:

$$u_{1,1} = A x_3 \Rightarrow u_1 = A x_1 x_3 + f_1(x_2, x_3) \quad (1)$$

$$u_{2,2} = A x_3 \Rightarrow u_2 = A x_2 x_3 + f_2(x_1, x_3) \quad (2)$$

$$u_{3,3} = A x_3 \Rightarrow u_3 = \frac{A}{2} x_3^2 + f_3(x_1, x_2) \quad (3)$$

$u_{1,2} + u_{2,1} = 0 \Rightarrow f_{1,2} = -f_{2,1}$ e ambas dependem só de x_3

$$\Rightarrow f_1 = -x_2 f_{2,1} + g_1(x_3) \quad \text{e} \quad f_2 = -x_1 f_{1,2} + g_2(x_3)$$

$$u_{1,3} + u_{3,1} = 0 \Rightarrow A x_1 + f_{1,3} + f_{3,1} = 0 \quad (4)$$

Substituindo f_1 nesta última:

$$A x_1 + x_2 f_{2,13} + g_{1,3} + f_{3,1} = 0$$

ou

$$\underbrace{\underbrace{A x_1 + f_{3,1}}_{\text{depende de } (x_1, x_2)} - \underbrace{\frac{\partial}{\partial x_3}(x_2 f_{2,1} + g_1)}_{\text{depende de } (x_2, x_3)}}_{\text{só pode depender de } x_2 \text{, do contrário não verifica a igualdade}} = 0$$

Para que $\frac{\partial}{\partial x_3}(x_2 f_{2,1} + g_1)$ dependa só de x_2:

$$f_{2,1} = B x_3$$

$$g_1 = C$$

Assim $\frac{\partial}{\partial x_3}(B x_2 x_3 + C) = B x_2$

e $A x_1 + f_{3,1} = B x_2$

ou $f_{3,1} = B x_2 - A x_1 \Rightarrow f_3 = B x_1 x_2 - \frac{A}{2} x_1^2 + h_1(x_2) \quad (5)$

$$u_{2,3} + u_{3,2} = 0 \rightarrow Ax_2 + f_{2,3} + f_{3,2} = 0 \qquad (6)$$

Por meio de um procedimento análogo desenvolvido com a equação (4) chega-se a:

$$f_3 = Ex_1x_2 - \frac{A}{2}x_2^2 + h_2(x_1) \qquad (7)$$

com:

$$f_{1,2} = Ex_3$$

$$g_2 = D$$

Comparando (5) e (7) conclui-se que $B = D$, $h_1(x_2) = -\frac{A}{2}x_2^2$, $h_2(x_1) = -\frac{A}{2}x_1^2$, e portanto:

$$f_3(x_1, x_2) = -\frac{A}{2}x_1^2 + Bx_1x_2 - \frac{A}{2}x_2^2$$

$$f_1(x_2, x_3) = -Bx_2x_3 + C$$

$$f_2(x_1, x_3) = -Bx_1x_3 + D$$

Finalmente:

$$u_1 = Ax_1x_3 - Bx_2x_3 + C$$

$$u_2 = Ax_2x_3 - Bx_1x_3 + D$$

$$u_3 = \frac{A}{2}x_3^2 - \frac{A}{2}x_1^2 + Bx_1x_2 - \frac{A}{2}x_2^2$$