

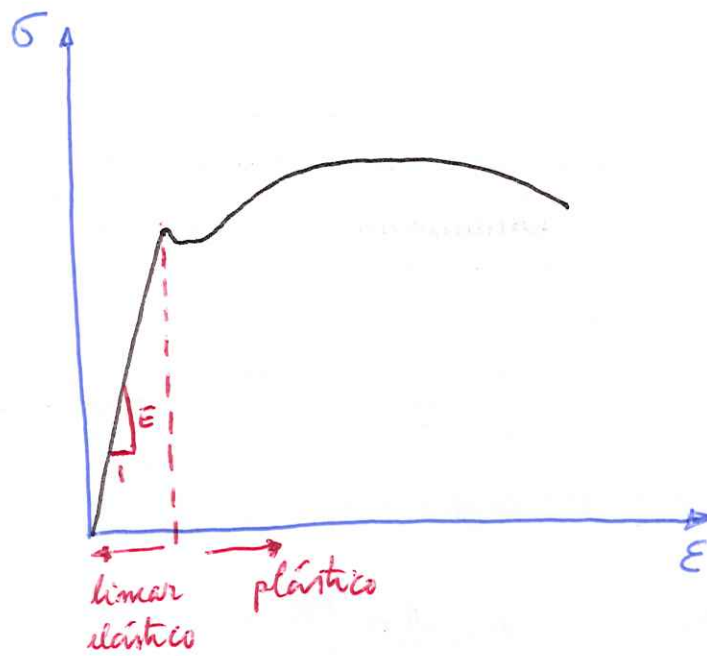
5.1. Introdução

Tensão e deformação relacionam-se entre si como causa e efeito. É da experiência comum observar que os sólidos se deformam quando submetidos a esforços. Neste capítulo, estudaremos o comportamento do sólido quando submetido a pequenas deformações (muitíssimas pequenas se comparadas com as dimensões do sólido).

Quando submetidos a pequenas deformações, os sólidos se comportam de modo qualitativamente igual. Exibem uma proporcionalidade entre as componentes do tensor de deformação infinitesimal e o tensor de tensão. Daí o adjetivo "linear" atribuído ao sólido nestas condições.

Também quando submetidos a pequenas deformações, os sólidos observam comportamento elástico, que é a propriedade do sólido retornar à sua configuração não carregada quando ele é totalmente descarregado. Há um limite a partir do qual o sólido deixa de exibir esta propriedade e passa a se deformar plasticamente.

A última característica do sólido a ser estudada é a isotropia, que é a capacidade dele exibir as mesmas propriedades em quaisquer que sejam as direções. Isto implica, por exemplo, que ao retirar um corpo de prova de uma região do sólido não se requer que seja feita numa determinada orientação em detrimento de outra.



5.2. Equações constitutivas do material sólido linear elástico isotrópico

Como apontado acima, o sólido linear exibe comportamento linear entre as componentes de tensão e deformação, ou seja:

$$T_{11} = C_{11} \bar{E}_{11} + C_{12} \bar{E}_{12} + C_{13} \bar{E}_{13} + C_{14} \bar{E}_{22} + C_{15} \bar{E}_{23} + C_{16} \bar{E}_{33}$$

$$T_{12} = C_{21} \bar{E}_{11} + C_{22} \bar{E}_{12} + C_{23} \bar{E}_{13} + C_{24} \bar{E}_{22} + C_{25} \bar{E}_{23} + C_{26} \bar{E}_{33}$$

$$T_{13} = C_{31} \bar{E}_{11} + C_{32} \bar{E}_{12} + C_{33} \bar{E}_{13} + C_{34} \bar{E}_{22} + C_{35} \bar{E}_{23} + C_{36} \bar{E}_{33}$$

$$T_{22} = C_{41} \bar{E}_{11} + C_{42} \bar{E}_{12} + C_{43} \bar{E}_{13} + C_{44} \bar{E}_{22} + C_{45} \bar{E}_{23} + C_{46} \bar{E}_{33}$$

$$T_{23} = C_{51} \bar{E}_{11} + C_{52} \bar{E}_{12} + C_{53} \bar{E}_{13} + C_{54} \bar{E}_{22} + C_{55} \bar{E}_{23} + C_{56} \bar{E}_{33}$$

$$T_{33} = C_{61} \bar{E}_{11} + C_{62} \bar{E}_{12} + C_{63} \bar{E}_{13} + C_{64} \bar{E}_{22} + C_{65} \bar{E}_{23} + C_{66} \bar{E}_{33}$$

onde C_{ij} são constantes.

Usando a notação indicial, estas equações podem ser resumidas a:

$$T_{ij} = C_{ijkl} E_{kl}$$

onde C_{ijkl} é um tensor de 4ª ordem, chamado tensor de elasticidade. Pela simetria de T e E tem-se que:

$$C_{ijkl} = C_{jikl}$$

$$C_{ij\overbrace{kl}^{6 \times 6}} = C_{ij\overbrace{lk}^{6 \times 6}}$$

isto faz com que o número total de coeficientes C_{ijkl} diferentes sejam 36. Além disso, o tensor de elasticidade deve ser isotrópico. Logo, o tensor de 4ª ordem isotrópico pode ser escrito como:

$$C_{ijkl} = \lambda \delta_{ij} \delta_{kl} + \alpha \delta_{ik} \delta_{jl} + \beta \delta_{il} \delta_{jk}$$

Substituindo esta equação em $T_{ij} = C_{ijkl} E_{kl}$:

$$T_{ij} = (\lambda \delta_{ij} \delta_{kl} + \alpha \delta_{ik} \delta_{jl} + \beta \delta_{il} \delta_{jk}) E_{kl}$$

ou
$$T_{ij} = \lambda E_{kk} \delta_{ij} + (\alpha + \beta) E_{ij}$$

Fazendo $\alpha + \beta = 2\mu$, obtemos:

$$T_{ij} = \lambda E_{kk} \delta_{ij} + 2\mu E_{ij}$$

ou
$$T = \lambda (\text{tr} E) I + 2\mu E$$

onde λ e μ são chamados coeficientes de Lamé.

Desenvolvendo as equações acima:

$$T_{11} = \lambda E_{kk} + 2\mu E_{11}$$

$$T_{22} = \lambda E_{kk} + 2\mu E_{22}$$

$$T_{33} = \lambda E_{kk} + 2\mu E_{33}$$

$$T_{12} = 2\mu E_{12}$$

$$T_{13} = 2\mu E_{13}$$

$$T_{23} = 2\mu E_{23}$$

As equações acima expressam a Lei de Hooke generalizada: 5=4

O traço de T é pois:

$$T_{ii} = \lambda E_{kk} \delta_{ii} + 2\mu E_{ii} = (3\lambda + 2\mu) E_{ii}$$

ou
$$E_{ii} = \frac{1}{3\lambda + 2\mu} T_{ii}$$

Levando este resultado à Lei de Hooke generalizada:

$$T_{ij} = \frac{\lambda T_{kk}}{3\lambda + 2\mu} \delta_{ij} + 2\mu E_{ij}$$

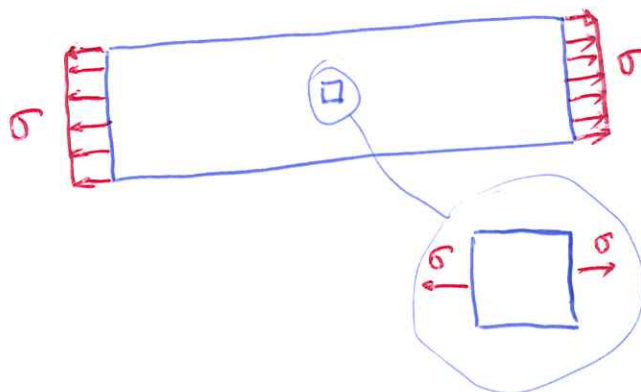
Isolando agora E_{ij} :

$$E_{ij} = \frac{1}{2\mu} \left(T_{ij} - \frac{\lambda}{3\lambda + 2\mu} T_{kk} \delta_{ij} \right)$$

5.3. Módulo de elasticidade, módulo de cisalhamento, coeficiente de Poisson e módulo volumétrico

Considere uma barra axialmente carregada. O estado de tensão observado em qualquer ponto dela é uniaxial, podendo ser representado matricialmente por:

$$[T] = \begin{bmatrix} \sigma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$



Da Lei de Hooke tem-se:

$$E_{11} = \frac{1}{2\mu} \left[\sigma - \frac{\lambda}{3\lambda + 2\mu} \sigma \right] = \frac{\lambda + \mu}{\mu(3\lambda + 2\mu)} \sigma$$

$$E_{11} = E_y \sigma$$

onde E_y é o módulo de elasticidade ou de Young. Logo:

$$E_y = \frac{\mu(3\lambda + 2\mu)}{\lambda + \mu}$$

$$E_{22} = E_{33} = -\frac{\lambda}{2\mu(3\lambda + 2\mu)} T_{11} = -\frac{\lambda}{2(\lambda + \mu)} E_{11}$$

ou

$$\frac{E_{22}}{E_{11}} = \frac{E_{33}}{E_{11}} = -\frac{\lambda}{2(\lambda + \mu)}$$

mas:

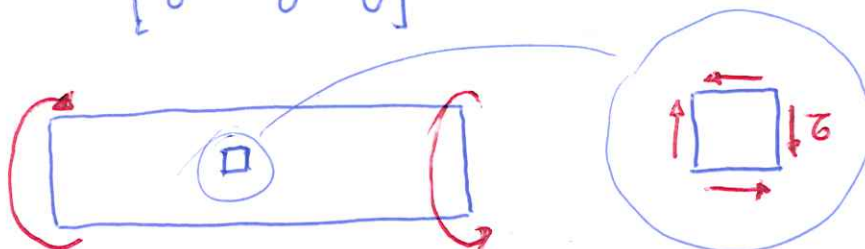
$$\frac{E_{22}}{E_{11}} = \frac{E_{33}}{E_{11}} = -\nu$$

onde ν é o coeficiente de Poisson. Logo:

$$\nu = \frac{\lambda}{2(\lambda + \mu)}$$

Considere agora um uso cilíndrico submetido à torção pura. O estado de tensões observado em qualquer ponto x o de cisalhamento puro, podendo ser representado matricialmente por:

$$[T] = \begin{bmatrix} 0 & \tau & 0 \\ \tau & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$



Da Lei de Hooke tem-se:

5-6

$$E_{11} = E_{22} = E_{33} = E_{13} = E_{23} = 0$$

$$E_{12} = \frac{\bar{\sigma}}{2\mu}$$

mas:

$$\frac{\bar{\sigma}}{\delta} = \frac{\bar{\sigma}}{2E_{12}} = G$$

onde G é o módulo de cisalhamento. Logo:

$$\mu = G.$$

Isolando λ em ν :

$$\lambda = \frac{2\nu}{1-2\nu} G$$

e isolando λ em E_y :

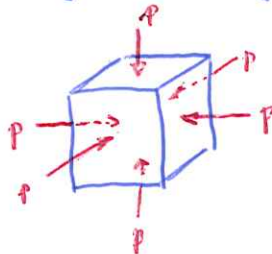
$$\lambda = \frac{2G - E_y G}{E_y - 3G}$$

Igualando os dois λ 's obtém-se:

$$G = \frac{E_y}{2(1+\nu)}$$

Finalmente, considere um cubo submetido à mesma pressão hidrostática nas 6 faces. O estado de tensão observado em qualquer ponto e o estado de pressão hidrostática, podendo ser representado matricialmente por:

$$[T] = -p \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$



(note que neste caso o círculo de Mohr deste estado de tensão é um ponto de coordenadas $(-p, 0)$ e, portanto, não ocorre tensão de cisalhamento em absolutamente nenhum plano cortando a partícula). Da Lei de Hooke tem-se para este estado de tensão:

$$T_{ii} = -3p = (2\mu + 3\lambda)E_{ii}$$

$$\text{ou } p = -\left(\frac{2}{3}\mu + \lambda\right)E_{ii}$$

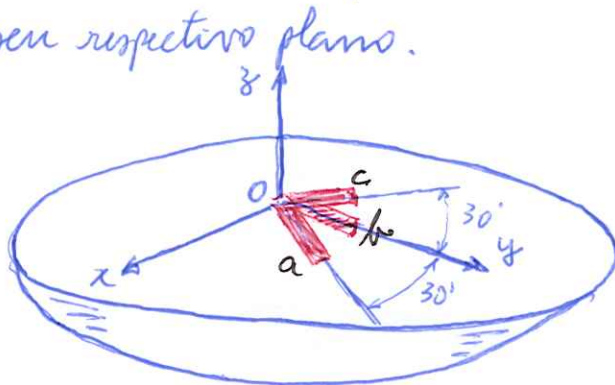
Define-se o módulo volumétrico (k) como sendo a razão entre menos a pressão e a contração volumétrica E_{ii} . Logo:

$$k = \frac{-p}{E_{ii}} = \frac{2}{3}\mu + \lambda$$

$$\text{ou } k = \frac{E_{yy}}{3(1-2\nu)}$$

Observe que à medida que o coeficiente de Poisson tende a $0,5$, o módulo volumétrico tende a infinito, e o material apresenta quase nenhuma variação volumétrica e, portanto, torna-se incompressível.

Exemplo: Três strain gages em forma de roseta são montados sobre a superfície livre de um sólido elástico isotrópico no ponto O mostrado na figura. A leitura da deformação normal nos strain gages fornece $E_a = 300 \cdot 10^{-6}$, $E_b = 400 \cdot 10^{-6}$ e $E_c = 100 \cdot 10^{-6}$. O material do sólido é o aço, $E = 207 \text{ GPa}$, $\nu = 0,29$ e $G = 80,2 \text{ GPa}$. Determine todas as componentes de tensão relativas ao sistema de coordenadas dado, as tensões e direções principais e a tensão de cisalhamento máxima e seu respectivo plano.



Solução:

Sejam \vec{n}_a, \vec{n}_b e \vec{n}_c vetores unitários nas 3 direções dos stress gases:

$$\vec{n}_a = \frac{1}{2}\vec{e}_1 + \frac{\sqrt{3}}{2}\vec{e}_2$$

$$\vec{n}_b = \vec{e}_2$$

$$\vec{n}_c = -\frac{1}{2}\vec{e}_1 + \frac{\sqrt{3}}{2}\vec{e}_2$$

Seja a matriz do tensor de deformação infinitesimal em O em relação ao sistema x, y, z :

$$[E] = \begin{bmatrix} E_{11} & E_{12} & E_{13} \\ E_{12} & E_{22} & E_{23} \\ E_{13} & E_{23} & E_{33} \end{bmatrix}$$

numa direção \vec{n} qualquer, a deformação normal ϵ é dada por:

$$E_{nn} = \vec{n} \cdot E \vec{n} = \{n\}^T [E] \{n\}$$

Portanto, na direção \vec{n}_a :

$$E_a = \left\{ \frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, 0 \right\} \begin{bmatrix} E_{11} & E_{12} & E_{13} \\ E_{12} & E_{22} & E_{23} \\ E_{13} & E_{23} & E_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{1}{4}E_{11} + \frac{\sqrt{3}}{2}E_{12} + \frac{3}{4}E_{22} \quad (1)$$

na direção \vec{n}_b :

$$E_b = \{0, 1, 0\} \begin{bmatrix} E_{11} & E_{12} & E_{13} \\ E_{12} & E_{22} & E_{23} \\ E_{13} & E_{23} & E_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = E_{22} \quad (2)$$

e na direção \vec{n}_c :

$$E_c = \left\{ -\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, 0 \right\} \begin{bmatrix} E_{11} & E_{12} & E_{13} \\ E_{12} & E_{22} & E_{23} \\ E_{13} & E_{23} & E_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{1}{4}E_{11} - \frac{\sqrt{3}}{2}E_{12} + \frac{3}{4}E_{22} \quad (3)$$

Somando (1) e (3) e tendo em conta (2):

$$E_{11} = 2E_a - 3E_b + 2E_c$$

de (2):

$$E_{22} = E_b$$

e subtraindo (3) de (1) e tendo em conta (2):

$$E_{12} = \frac{\sqrt{3}}{3}(E_a - E_c)$$

Falta determinar E_{13}, E_{23} e E_{33} . Com o auxílio da Lei de Hooke ⁵⁻⁹ generalizada e de que $T_{13} = T_{23} = T_{33} = 0$ (ausência de forças no plano de normal \vec{e}_3):

$$T_{13} = 2\mu E_{13} = 0 \quad (4)$$

$$T_{23} = 2\mu E_{23} = 0 \quad (5)$$

$$T_{33} = \lambda(E_{11} + E_{22} + E_{33}) + 2\mu E_{33} = 0 \quad (6)$$

Resolvendo as equações acima, obtêm-se:

$$E_{13} = E_{23} = 0$$

$$E_{33} = \frac{-1}{1 + 2\frac{\mu}{\lambda}} (E_{11} + E_{22}) = \frac{1}{2(\nu-1)} (E_{11} + E_{22})$$

$$\text{ou } E_{33} = \frac{E_a - E_b + E_c}{\nu - 1}$$

Substituindo os valores tem-se:

$$E_{11} = 2 \cdot 300 \cdot 10^{-6} - 3 \cdot 400 \cdot 10^{-6} + 2 \cdot 100 \cdot 10^{-6} = -400 \cdot 10^{-6}$$

$$E_{22} = 400 \cdot 10^{-6}$$

$$E_{33} = \frac{300 \cdot 10^{-6} - 400 \cdot 10^{-6} + 100 \cdot 10^{-6}}{0,29 - 1} = 0$$

$$E_{12} = \frac{\sqrt{3}}{3} (300 \cdot 10^{-6} - 100 \cdot 10^{-6}) = 115 \cdot 10^{-6}$$

Logo:

$$[E] = 10^{-6} \begin{bmatrix} -400 & 115 & 0 \\ 115 & 400 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Para determinar as tensões principais e respectivas direções principais, vamos mostrar que as direções principais de tensão e deformação são as mesmas para um sólido linear elástico isotrópico. Seja α e \vec{m} o autovalor e o respectivo auto-vetor do tensor de deformação infinitesimal:

$$E\vec{m} = \alpha\vec{m}$$

Da Lei de Hooke:

$$\begin{aligned} T\vec{m} &= \lambda(\text{tr}E)\vec{I}\vec{m} + 2\mu E\vec{m} \\ &= \lambda(\text{tr}E)\vec{m} + 2\alpha\mu\vec{m} = (\lambda(\text{tr}E) + 2\alpha\mu)\vec{m} \end{aligned}$$

Logo, os dois tensores, E e T , têm as mesmas direções principais e as tensões e deformações principais se relacionam entre si por meio da equação:

$$T_i = \lambda (\text{tr} E) + 2\mu E_i, \quad i = 1, 2, 3$$

ou
$$T_i = \frac{\nu E_y}{(1+\nu)(1-2\nu)} \text{tr} E + \frac{E_y}{1+\nu} E_i, \quad i = 1, 2, 3$$

Vamos, então, determinar as deformações principais:

$$\begin{vmatrix} -400 - \alpha & 115 & 0 \\ 115 & 400 - \alpha & 0 \\ 0 & 0 & -\alpha \end{vmatrix} = 0 \rightarrow \alpha(173225 - \alpha^2) = 0$$

As raízes/deformações principais são:

$$E_1 = 65\sqrt{41} \cdot 10^{-6} = +416 \cdot 10^{-6}$$

$$E_2 = 0 \cdot 10^{-6}$$

$$E_3 = -65\sqrt{41} \cdot 10^{-6} = -416 \cdot 10^{-6}$$

As direções principais são:

para $E_1 = 65\sqrt{41}$

$$(-400 - 65\sqrt{41})n_1^{(1)} + 115n_2^{(1)} = 0$$

$$115n_1^{(1)} + (400 - 65\sqrt{41})n_2^{(1)} = 0$$

$$-65\sqrt{41}n_3^{(1)} = 0$$

$$n_1^{(1)2} + n_2^{(1)2} + n_3^{(1)2} = 1$$

$$\therefore \vec{n}_1 = \pm (0,139\vec{e}_1 + 0,990\vec{e}_2)$$

para $E_2 = 0$

$$-400n_1^{(2)} + 115n_2^{(2)} = 0$$

$$115n_1^{(2)} + 400n_2^{(2)} = 0$$

$$0n_3^{(2)} = 0$$

$$n_1^{(2)2} + n_2^{(2)2} + n_3^{(2)2} = 1$$

$$\therefore \vec{n}_2 = \pm \vec{e}_3$$

para $E_3 = -65\sqrt{41}$

5.11.

$$(-400 + 65\sqrt{41})\eta_1^{(3)} + 115\eta_2^{(3)} = 0$$

$$115\eta_1^{(3)} + (400 + 65\sqrt{41})\eta_2^{(3)} = 0$$

$$65\sqrt{41}\eta_3^{(3)} = 0$$

$$\eta_1^{(3)2} + \eta_2^{(3)2} + \eta_3^{(3)2} = 1$$

$$\therefore \vec{n}_3 = \pm (0,990\vec{e}_1 - 0,139\vec{e}_2)$$

Tensões principais:

$$T_1 = \frac{0,29 \cdot 207 \cdot 10^9}{(1+0,29)(1-2 \cdot 0,29)} (-400 \cdot 10^{-6} + 400 \cdot 10^{-6} + 0,0 \cdot 10^{-6}) + \frac{207 \cdot 10^9}{1+0,29} \cdot 416 \cdot 10^{-6}$$

$$T_1 = 66,8 \text{ MPa}$$

$$T_2 = \frac{0,29 \cdot 207 \cdot 10^9}{(1+0,29)(1-2 \cdot 0,29)} (-400 \cdot 10^{-6} + 400 \cdot 10^{-6} + 0,0 \cdot 10^{-6}) + \frac{207 \cdot 10^9}{1+0,29} \cdot 0$$

$$T_2 = 0,00 \text{ MPa}$$

$$T_3 = \frac{0,29 \cdot 207 \cdot 10^9}{(1+0,29)(1-2 \cdot 0,29)} (-400 \cdot 10^{-6} + 400 \cdot 10^{-6} + 0,0 \cdot 10^{-6}) + \frac{207 \cdot 10^9}{1+0,29} \cdot -416 \cdot 10^{-6}$$

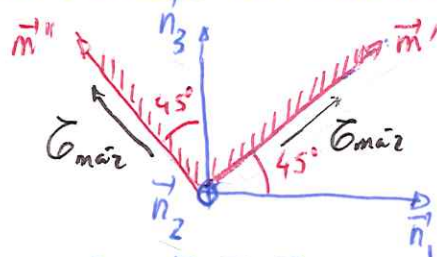
$$T_3 = -66,8 \text{ MPa}$$

Tensões de cisalhamento máxima:

$$\sigma_{\max} = \frac{T_1 - T_3}{2} = \frac{66,8 + 66,8}{2}$$

$$\sigma_{\max} = 66,8 \text{ MPa}$$

Planos onde ocorrem as tensões de cisalhamento máximas:



$$\vec{m}' = \frac{\sqrt{2}}{2} (\vec{n}_1 + \vec{n}_3)$$

$$\vec{m}'' = \frac{\sqrt{2}}{2} (-\vec{n}_1 + \vec{n}_3)$$

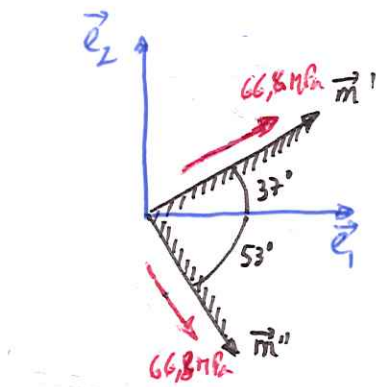
Tomando $\vec{n}_1 = 0,139\vec{e}_1 + 0,990\vec{e}_2$, $\vec{n}_2 = \vec{e}_3$ e $\vec{n}_3 = 0,990\vec{e}_1 - 0,139\vec{e}_2$, de modo a formar uma base definida positiva. Substituindo em \vec{m}' e \vec{m}'' :

$$\vec{m}' = \frac{\sqrt{2}}{2} (0,139\vec{e}_1 + 0,990\vec{e}_2 + 0,990\vec{e}_1 - 0,139\vec{e}_2) = 0,799\vec{e}_1 + 0,602\vec{e}_2$$

$\angle 37^\circ$ com \vec{e}_1

$$\vec{m}'' = \frac{\sqrt{2}}{2} (-0,139\vec{e}_1 - 0,990\vec{e}_2 + 0,990\vec{e}_1 - 0,139\vec{e}_2) = 0,602\vec{e}_1 - 0,799\vec{e}_2$$

$\angle -53^\circ$ com \vec{e}_1



Tensões normais nesses planos:

$$\sigma' = \sigma'' = \frac{T_1 + T_3}{2} = \frac{66,8 - 66,8}{2}$$

$$\sigma' = \sigma'' = 0,00 \text{ MPa}$$

5.4. Equações constitutivas termelásticas

Variação da temperatura também causa deformação do material. Nesta forma, dentro ainda do contexto de pequenas deformações, a deformação total é a soma de duas parcelas, uma mecanicamente causada, $E^{(M)}$, e outra termicamente, $E^{(T)}$.

$$\vec{E} = E^{(M)} + E^{(T)}$$

Sejam T_0 a temperatura de referência e T uma temperatura qualquer, ambas referidas ao mesmo ponto material. A deformação térmica num sólido livre de restrições é dada pela equação constitutiva linear:

$$E_{ij}^{(T)} = \alpha_{ij} (T - T_0)$$

onde α é um tensor de 2.º ordem. Considerando material isotrópico

$$E_{ij}^{(T)} = \alpha (T - T_0) \delta_{ij}$$

onde α é o coeficiente de dilatação térmica linear do material.

Tendo em conta as leis constitutivas mecânica e térmica do material, obtém-se:

$$E_{ij} = \frac{1+\nu}{E_y} T_{ij} - \frac{\nu}{E_y} T_{kk} \delta_{ij} + \alpha (T - T_0) \delta_{ij}$$

e

$$T_{ij} = \frac{\nu E_y}{(1+\nu)(1-2\nu)} E_{ii} \delta_{ij} + \frac{E_y}{1+\nu} E_{ij} - \frac{\alpha E_y}{1-2\nu} (T - T_0) \delta_{ij}$$