

7.1. Introdução

Neste capítulo serão estudadas algumas teorias que explicam a falha de um material sólido.

Primeiro é necessário definir o que se entende por falha do material. A falha é um fenômeno associado à formação de micro-trincas, no caso de material frágil, ou de micro-regiões de escoamento do material, no caso de material dútil, a qual, uma vez iniciada, se propaga progressivamente por toda a peça, tornando-a inapta para a função estabelecida em projeto. Conhecer o início desse processo é fundamental para poder-se evitá-lo. Por isso as teorias de falha procuram estabelecer as condições que dão início à falha do material.

No projeto de uma peça, procura-se estabelecer uma margem de segurança em relação à condição de início de falha por meio do, assim chamado, coeficiente de segurança.

Como já comentado, o fenômeno de falha do material é diferente para o material dútil e o frágil. Por isso há teorias de falha próprias para cada tipo de material. Para os materiais dúteis serão estudadas as teorias da máxima tensão de cisalhamento e da máxima energia de distorção; para os materiais frágeis será estudada a teoria da máxima tensão normal.

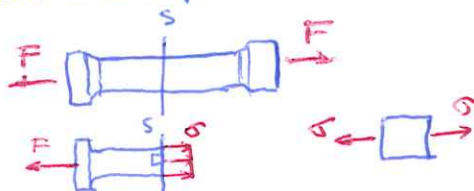
DÚTIL
- máxima tensão de cisalhamento
- máxima energia distorcional

FRÁGIL
- máxima tensão normal

7.2. Teoria da máxima tensão de cisalhamento. Critério de Tresca

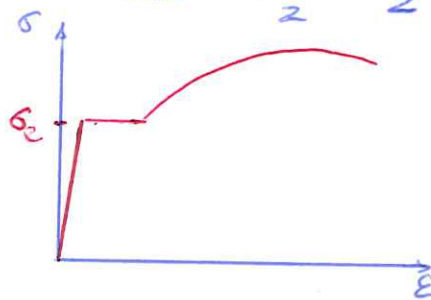
Esta teoria estabelece que o escoamento do material ocorre pelo deslizamento das partículas dispostas ao longo do plano de máxima tensão de cisalhamento na vizinhança do ponto; quando a tensão de cisalhamento atinge um determinado valor crítico τ_e .

A tensão de cisalhamento crítica pode ser obtida do ensaio de tração. Como o corpo de prova nesse ensaio está sujeito ao estado uniaxial de tensão:



Tomando assim $\sigma_1 = \sigma$ e $\sigma_2 = \sigma_3 = 0$ e:

$$\tau_{\max} = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} = \frac{\sigma}{2}$$



Portanto, no limite de escoamento a tensão de cisalhamento máxima observada é:

$$\tau_e = \frac{\sigma_e}{2}$$

que é a tensão de cisalhamento crítica para o material. Logo, no ponto do material onde a tensão de cisalhamento máxima atingir esse valor, dá-se início à falha.

Exemplo 7.1 O estado de tensão num ponto crítico de uma peça tem tensões principais $\sigma_1 = 5\sigma$, $\sigma_2 = 2\sigma$ e $\sigma_3 = -3\sigma$, com $\sigma > 0$. Determine o valor limite de falha para σ pela teoria da tensão de cisalhamento máxima (ou pelo critério de Tresca).

Solução

Tensão de cisalhamento máxima no ponto:

$$\tau_{\max} = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} = \frac{5\sigma - (-3\sigma)}{2} = 4\sigma = \tau_e = \frac{\sigma_e}{2}$$

Logo: $\sigma = \frac{\sigma_e}{8}$ é o limite de falha no ponto ■

7.3. Superfície de falha de Tresca

Segundo a teoria da máxima tensão de cisalhamento, para que não haja falha do material num ponto é necessário que a tensão de cisalhamento máxima se mantenha abaixo do valor crítico, isto é, $\tau_{\max} < \frac{\sigma_e}{2}$.

Tomando-se as tensões principais no ponto numa ordem qualquer, a tensão de cisalhamento máxima é dada por:

$$\tau_{\max} = \max \left\{ \frac{|\sigma_1 - \sigma_2|}{2}, \frac{|\sigma_1 - \sigma_3|}{2}, \frac{|\sigma_2 - \sigma_3|}{2} \right\} < \frac{\sigma_e}{2}$$

ou seja,

$$\sigma_e > \max \{ |\sigma_1 - \sigma_2|, |\sigma_1 - \sigma_3|, |\sigma_2 - \sigma_3| \}$$

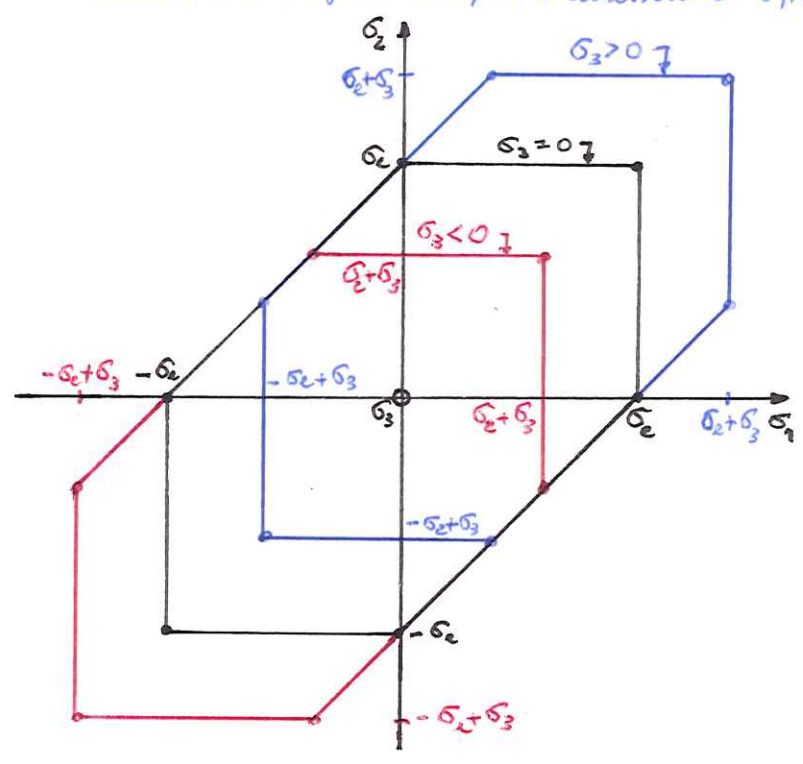
Isto equivale a dizer que, para que não ocorra falha, é necessário que as tensões principais no ponto verifiquem simultaneamente:

$$|\sigma_1 - \sigma_2| < \sigma_e \quad \text{ou} \quad -\sigma_e < \sigma_1 - \sigma_2 < +\sigma_e$$

$$|\sigma_1 - \sigma_3| < \sigma_e \quad \text{ou} \quad -\sigma_e + \sigma_3 < \sigma_1 < +\sigma_e + \sigma_3$$

$$|\sigma_2 - \sigma_3| < \sigma_e \quad \text{ou} \quad -\sigma_e + \sigma_3 < \sigma_2 < +\sigma_e + \sigma_3$$

Estas três desigualdades delimitam uma região no plano cartesiano $\sigma_1 \times \sigma_2$, chamada de raizões de Tresca.



A superfície de falha de Tresca é a superfície de um tubo hexagonal no espaço R^3 cujo eixo está inclinado em relação aos três eixos: σ_1, σ_2 e σ_3 . Os cortes desse tubo em planos de σ_3 constante estão ilustrados na figura acima para $\sigma_3 < 0, \sigma_3 = 0$ e $\sigma_3 > 0$. Cada um desses cortes define um hexágono de Tresca para um determinado valor de σ_3 . Se para um determinado σ_3 o ponto de coordenadas (σ_1, σ_2) estiver no interior do respectivo hexágono de Tresca, não ocorre falha, do contrário ocorre.

7.4. TEORIA DA MÁXIMA DENSIDADE DE ENERGIA DISTORCIONAL. CRITÉRIO DE VON MISES

Esta teoria estabelece que o escoamento do material ocorre pelo deslizamento das partículas quando a densidade de energia distorcional no ponto atingir um valor característico do material.

A expressão da densidade de energia distorcional em termos das tensões principais no ponto para o material elástico linear isotrópico:

$$\hat{U}_d = \frac{1+\nu}{6E_y} [(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_1 - \sigma_3)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2]$$

Para o estado plano de tensão ela se simplifica para:

$$\hat{U}_d = \frac{1+\nu}{3E_y} (\sigma_1^2 - \sigma_1 \sigma_2 + \sigma_2^2)$$

e para o estado uniaxial de tensão:

$$\hat{U}_d = \frac{1+\nu}{3E_y} \sigma_1^2$$

O valor crítico da densidade de energia distorcional pode ser obtido do ensaio de tração, no qual as partículas estão sob estado uniaxial de tensão. Assim no limiar do escoamento $\sigma_1 = \sigma_e$ e:

$$\hat{U}_d^* = \frac{1+\nu}{3E_y} \sigma_e^2$$

é a densidade de energia distorcional crítica.

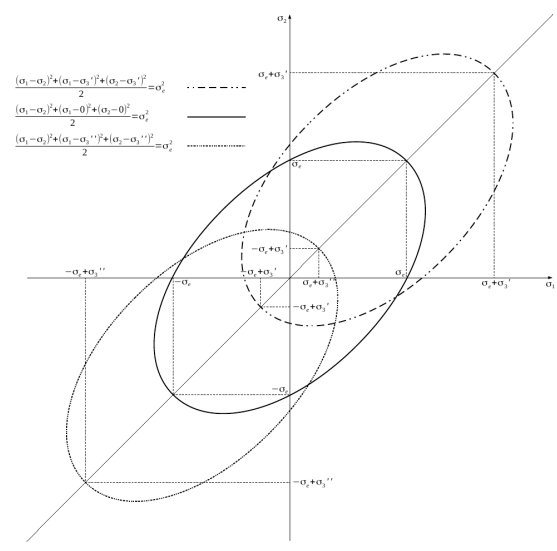
Segundo esta teoria, basta comparar a densidade de energia de distorção do material num ponto com \hat{U}_d^* . Se ela for menor que esta, não ocorre falha. Do contrário, ocorre.

Igualando a densidade de energia distorcional no ponto a \hat{U}_d^* , obtém-se a condição para o início da falha do material:

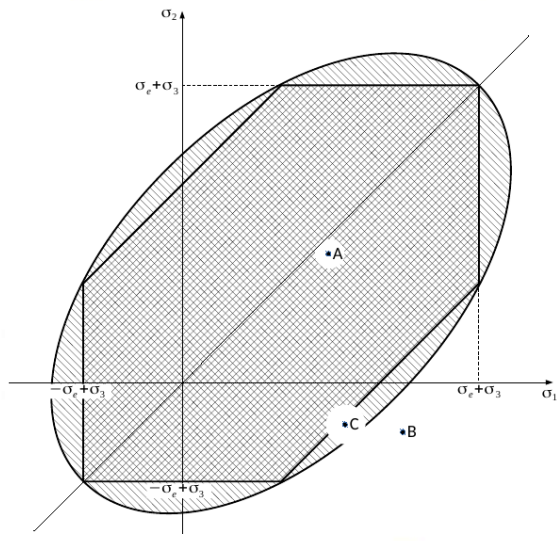
$$\frac{1+\nu}{6E_y} ((\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_1 - \sigma_3)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2) = \frac{1+\nu}{3E_y} \sigma_e^2$$

ou
$$\frac{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_1 - \sigma_3)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2}{2} = \sigma_e^2 \quad (\text{critério de von Mises})$$

Se considerarmos um sistema cartesiano tridimensional formado pelos eixos σ_1, σ_2 e σ_3 , esta última equação representa a superfície de um tubo elíptico no espaço R^3 cujo eixo está inclinado em relação aos três eixos: σ_1, σ_2 e σ_3 . Os cortes desse tubo com planos de σ_3 constante estão ilustrados na figura abaixo para $\sigma_3 < 0, \sigma_3 = 0$ e $\sigma_3 > 0$. Cada um desses cortes define uma elipse de von Mises para um determinado valor de σ_3 . Se para um determinado σ_3 o ponto de coordenadas (σ_1, σ_2) estiver no interior da respectiva elipse de von Mises, não ocorre falha, do contrário ocorre.



Vale a pena comparar graficamente as duas teorias. No gráfico abaixo estão representados o hexágono de Tresca e a elipse de von Mises para um mesmo valor de σ_3 . Observe que o hexágono está totalmente inscrito na elipse, significando que se houver falha pelo critério de von Mises, também haverá pelo de Tresca, e, se não houver falha pelo critério de Tresca, também não haverá pelo de von Mises. Há, porém, estados de tensão em que o critério de Tresca acusa falha e o de von Mises não. Para ilustrar, na figura abaixo o estado de tensão representado pelo ponto A não acusa falha pelos dois critérios; o ponto B acusa falha pelos dois critérios, e o ponto C acusa falha pelo critério de Tresca, mas não pelo de von Mises.



Exemplo 7.2: Repita o exemplo 7.1 agora pela teoria da máxima energia distorcional (critério de von Mises).

Solução:

Substituindo as tensões principais na expressão do critério de von Mises:

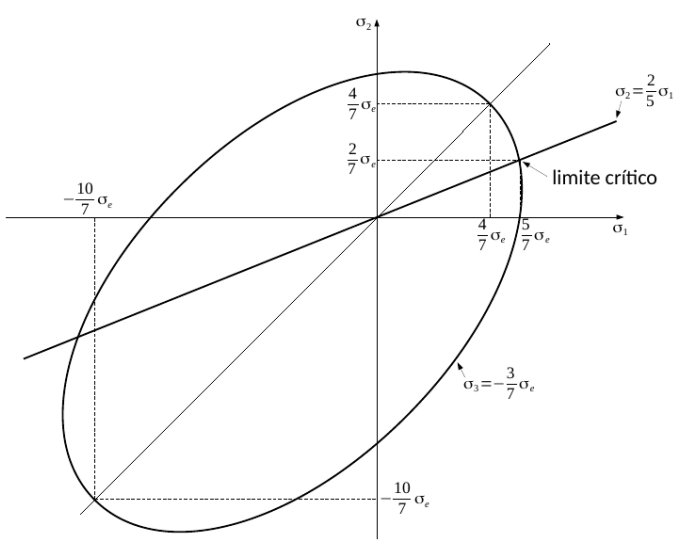
$$(\sigma\sigma - 2\sigma)^2 + (\sigma\sigma - (-3\sigma))^2 + (2\sigma - (-3\sigma))^2 = 2\sigma_c^2$$

$$\text{ou } \sigma^2 = \frac{\sigma_c^2}{49}$$

$$\text{ou } \sigma = \frac{\sigma_c}{7}$$

Comparado com o critério de Tresca, observamos que o de von Mises prevê falha para um valor maior de σ .

A figura abaixo ilustra graficamente a aplicação de ambos os critérios ao problema.



A tensão de von Mises é a tensão principal máxima do estado uniaxial cuja densidade de energia distorcional é igual a de um estado de tensão qualquer. A densidade de energia distorcional para o estado uniaxial é:

$$\hat{U}_d = \frac{1+\nu}{3E\gamma} \sigma_{vm}^2$$

e a de um estado de tensão qualquer:

$$\hat{U}_d = \frac{1+\nu}{6E\gamma} ((\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_1 - \sigma_3)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2)$$

Iguando as duas últimas equações tem-se a tensão de von Mises para um estado de tensão qualquer:

$$\sigma_{vm}^2 = \frac{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_1 - \sigma_3)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2}{2}$$

Fica fácil de ver que quando a densidade de energia distorcional de um estado de tensão qualquer for igual à crítica:

$$\hat{U}_d^* = \frac{1+\nu}{3E\gamma} \sigma_c^2$$

a tensão de von Mises é igual a σ_c . Portanto, para verificar a ocorrência ou não de falha num ponto pela teoria da máxima densidade de energia distorcional, basta comparar a tensão de von Mises. Se a tensão de von Mises for maior ou igual a σ_c , a teoria acusa falha, e, do contrário, não.

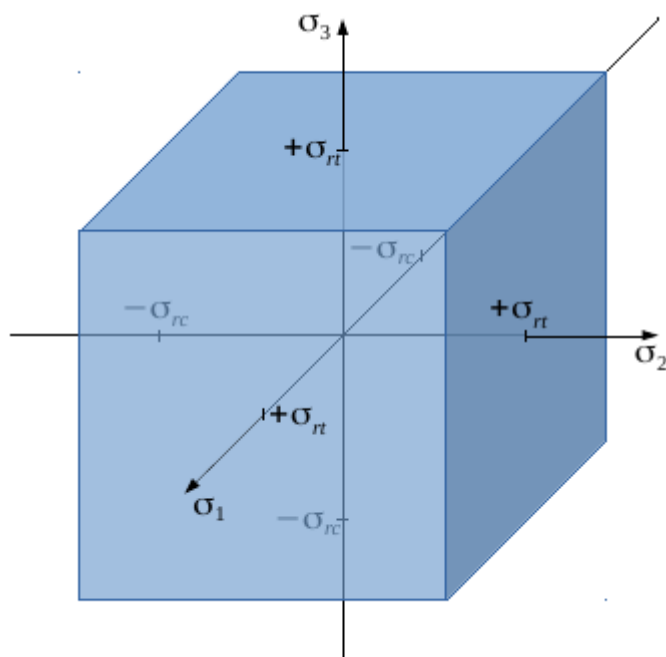
Nos softwares de análise de tensão é comum haver uma opção de apresentação do mapa de tensão de von Mises para facilitar ao usuário a identificação de regiões de falha na peça analisada.

Esta teoria estabelece que as camadas de átomos do material se separam pela ação da tensão normal no plano de interface entre as camadas. Ao contrário da falha dútil, a frágil caracteriza-se por existir nenhuma ou quase nenhuma deformação plástica, ou seja, não dá sinal de que o material irá falhar. Quando a tensão normal na superfície entre camadas de átomos atinge um determinado valor crítico dá-se início a uma micro-trinca que se propaga rapidamente pelo material.

O valor crítico da tensão normal pode ser obtido do ensaio de tração do material. Esta teoria considera que a falha do material ocorre quando a tensão normal de tração ou de compressão atinge o valor crítico. Logo, considerando as tensões principais num ponto, σ_1 , σ_2 e σ_3 , numa ordem qualquer, deve-se comparar o módulo delas à tensão normal de ruptura, σ_{rc} . Para que o material não falhe segundo esta teoria se requer que se verifique simultaneamente:

$$\begin{aligned} -\sigma_{rc} &< \sigma_1 < +\sigma_{rc}, \\ -\sigma_{rc} &< \sigma_2 < +\sigma_{rc} \\ &\text{e} \quad -\sigma_{rc} < \sigma_3 < +\sigma_{rc} \end{aligned}$$

Estas 3 desigualdades podem num sistema de eixos cartesianos tridimensional e o interior de um cubo de aresta $\sigma_{rc} + \sigma_{rc}$ envolvendo a origem, conforme a figura abaixo. O estado de tensão que leve a um ponto no interior desse cubo não falha por esta teoria. O estado de tensão que leve a um ponto fora dele falha.



Exemplo 7.3 Repita o exemplo 7.1 agora pela teoria da máxima tensão normal (critério de Rankine). Admita que o material tenha igual tensão de ruptura à tração e à compressão. 7-8

Solução:

Pelo critério de Rankine, deve-se ter no limite de falha:

$$\sigma_r = \max\{|\sigma_1|, |\sigma_2|, |\sigma_3|\}$$

$$\text{ou } \sigma_r = \max\{5\sigma, 2\sigma, 3\sigma\} = 5\sigma$$

$$\therefore \sigma = \frac{\sigma_r}{5} \quad \square$$