Exercício 1

Projetar um mecanismo de quatro elos para gerar $f(x) := \sqrt{x}$ onde x varia entre $xs := 0$ e $xf := 1$.
Utilizar como pontos de precisão:
a) os extremos e o ponto médio do intervalo
b) espaçamento de Chebyshev e considerar:

função	$f(x) := \sqrt{x}$
ângulo inicial na entrada	$\varphi s := 45 \cdot \frac{\pi}{180}$
ângulo inicial na saida	$\psi s := 45 \cdot \frac{\pi}{180}$
variação na entrada	$\Delta\varphi := 90 \cdot \frac{\pi}{180}$
variação na saída	$\Delta\psi := 60 \cdot \frac{\pi}{180}$
comprimento do elo fixo	$d := 1$

1 - Variação da função

início:	$xs = 0$	$ys := f(xs)$	$ys = 0$
final:	$xf = 1$	$yf := f(xf)$	$yf = 1$

2 - Caso (a):

Pontos de precisão: $j := 1..3$

$x_1 := xs \qquad x_2 := \frac{(xs + xf)}{2} \qquad x_3 := xf \qquad y_j := f(x_j)$

$x_1 = 0 \qquad y_1 = 0$

$x_2 = 0.5 \qquad y_2 = 0.707$

$x_3 = 1 \qquad y_3 = 1$

Transformação dos pontos para ângulos

$$\varphi_j := \varphi s + (x_j - xs) \cdot \frac{\Delta\varphi}{(xf - xs)} \qquad \psi_j := \psi s + (y_j - ys) \cdot \frac{\Delta\psi}{(yf - ys)}$$

ponto 1: $\varphi_1 \cdot \frac{180}{\pi} = 45 \qquad \psi_1 \cdot \frac{180}{\pi} = 45$

ponto 2: $\varphi_2 \cdot \frac{180}{\pi} = 90 \qquad \psi_2 \cdot \frac{180}{\pi} = 87.426$

ponto 3: $\varphi_3 \cdot \frac{180}{\pi} = 135 \qquad \psi_3 \cdot \frac{180}{\pi} = 105$

Variáveis auxiliares

$w1 := \cos(\varphi_1) - \cos(\varphi_2)$ $\quad w1 = 0.707$

$w2 := \cos(\varphi_1) - \cos(\varphi_3)$ $\quad w2 = 1.414$

$w3 := \cos(\psi_1) - \cos(\psi_2)$ $\quad w3 = 0.662$

$w4 := \cos(\psi_1) - \cos(\psi_3)$ $\quad w4 = 0.966$

$w5 := \cos(\varphi_1 - \psi_1) - \cos(\varphi_2 - \psi_2)$ $\quad w5 = 1.009 \times 10^{-3}$

$w6 := \cos(\varphi_1 - \psi_1) - \cos(\varphi_3 - \psi_3)$ $\quad w6 = 0.134$

Relações de comprimentos

$$R1 := \frac{w3 \cdot w6 - w4 \cdot w5}{w2 \cdot w3 - w1 \cdot w4} \qquad R1 = 0.346$$

$$R2 := \frac{w1 \cdot w6 - w2 \cdot w5}{w2 \cdot w3 - w1 \cdot w4} \qquad R2 = 0.368$$

$$R3 := \cos(\varphi_1 - \psi_1) + R2 \cdot \cos(\psi_1) - R1 \cdot \cos(\varphi_1) \qquad R3 = 1.016$$

Comprimentos

$d := 1$

$$a := \frac{d}{R2} \qquad a = 2.717$$

$$c := \frac{d}{R1} \qquad c = 2.889$$

$$b := \sqrt{\left(a^2 + c^2 + d^2 - 2 \cdot a \cdot c \cdot R3\right)} \qquad b = 0.887$$

Representação gráfica da cadeia:

Comprimentos dos elos a, b e c em relação ao elo d:

$$A := \frac{a}{d} \qquad B := \frac{b}{d} \qquad C := \frac{c}{d} \qquad D := \frac{d}{d}$$

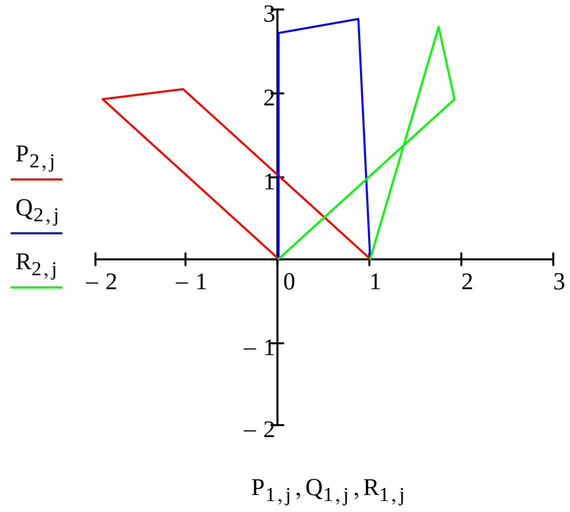
Coordenadas das articulações em cada ponto de precisão:

posição $\quad i := 1 \quad P := \begin{pmatrix} 0 & -A \cdot \cos(\varphi_i) & D - C \cdot \cos(\psi_i) & D \\ 0 & A \cdot \sin(\varphi_i) & C \cdot \sin(\psi_i) & 0 \end{pmatrix}$

posição $\quad i := 2 \quad Q := \begin{pmatrix} 0 & -A \cdot \cos(\varphi_i) & D - C \cdot \cos(\psi_i) & D \\ 0 & A \cdot \sin(\varphi_i) & C \cdot \sin(\psi_i) & 0 \end{pmatrix}$

posição $\quad i := 3 \quad R := \begin{pmatrix} 0 & -A \cdot \cos(\varphi_i) & D - C \cdot \cos(\psi_i) & D \\ 0 & A \cdot \sin(\varphi_i) & C \cdot \sin(\psi_i) & 0 \end{pmatrix}$

posições de precisão: $j := 1..4$



$\varphi s \cdot \frac{180}{\pi} = 45$ $\quad\Delta\varphi \cdot \frac{180}{\pi} = 90$

$\psi s \cdot \frac{180}{\pi} = 45$ $\quad\Delta\psi \cdot \frac{180}{\pi} = 60$

$a = 2.717$

$b = 0.887$

$c = 2.889$

$d = 1$

Verificação do mecanismo (análise de posição)

Dados do mecanismo:

$\varphi s = 45 \cdot deg$ $\quad\Delta\varphi = 90 \cdot deg$

$\psi s = 45 \cdot deg$ $\quad\Delta\psi = 60 \cdot deg$

$\varphi f := \varphi s + \Delta\varphi$ $\quad\varphi f = 135 \cdot deg$

$\psi f := \psi s + \Delta\psi$ $\quad\psi f = 105 \cdot deg$

Incremento de φ: $\quad\varphi incr := 1deg$

Solução numérica da posição

variação de φ: $\quad\varphi := \varphi s, \varphi s + \varphi incr .. \varphi f$

valores iniciais das variáveis secundárias: $\theta := 20deg$ $\quad\psi := 100deg$

solução numérica:

Given

$-a \cdot \cos(\varphi) + b \cdot \cos(\theta) + c \cdot \cos(\psi) - d = 0$

$a \cdot \sin(\varphi) + b \cdot \sin(\theta) - c \cdot \sin(\psi) = 0$

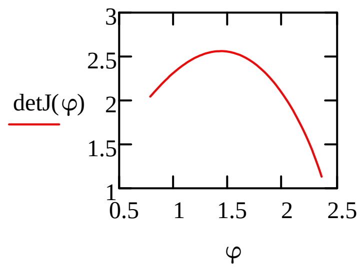
$sol(\varphi) := Find(\theta, \psi)$

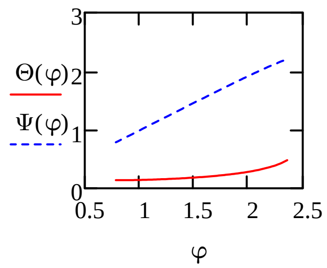
Elo intermediário: $\Theta(\varphi) := sol(\varphi)_1$

Elo de saída: $\Psi(\varphi) := sol(\varphi)_2$

$$jaco(\varphi) = \begin{pmatrix} -b \cdot \sin(\Theta(\varphi)) & -c \cdot \sin(\Psi(\varphi)) \\ b \cdot \cos(\Theta(\varphi)) & -c \cdot \cos(\Psi(\varphi)) \end{pmatrix}$$

$detJ(\varphi) := b \cdot c \cdot \sin(\Theta(\varphi) + \Psi(\varphi))$





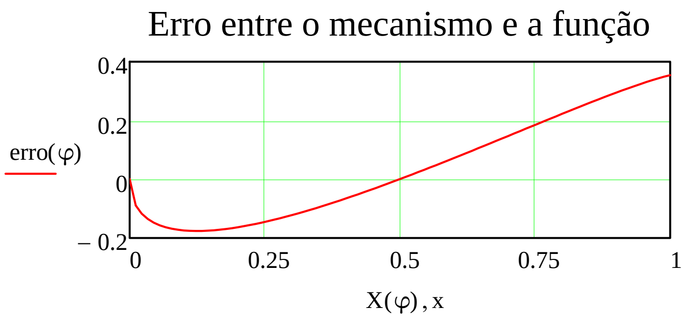
Correspondência dos ângulos com as ecalas x e y:

$$X(\varphi) := \frac{\varphi - \varphi s}{\varphi f - \varphi s} \cdot (xf - xs) + xs$$

$$Y(\varphi) := \frac{\Psi(\varphi) - \psi s}{\psi f - \psi s} \cdot (yf - ys) + ys$$

Correspondência de $X(\varphi)$ com a função $Yf(\varphi) := f(X(\varphi))$

Erro entre o mecanismo e a função: $erro(\varphi) := Y(\varphi) - Yf(\varphi)$



As posições 1 e 2 apresentam erro 0. Existe uma discrepância na posição de precisão 3 que ainda não foi detectada. Alguém saberia explicar por quê?

3 - Caso (b) - Chebyshev

ponto médio do intervalo: $a := \frac{xf + xs}{2}$ $a = 0.5$

número de pontos de precisão: $n := 3$

metade do intervalo: $h := \frac{xf - xs}{2}$ $h = 0.5$

pontos de Chebyshev: $j := 1 .. n$

$$x_j := a - h \cdot \cos\left[\frac{\pi \cdot \left(j - \frac{1}{2}\right)}{n}\right] \qquad y_j := f(x_j)$$

$x_1 = 0.067$ $y_1 = 0.259$

$x_2 = 0.5$ $y_2 = 0.707$

$x_3 = 0.933$ $y_3 = 0.966$

Transformação dos pontos para ângulos

$$\varphi_j := \varphi s + (x_j - xs) \cdot \frac{\Delta\varphi}{(xf - xs)} \qquad \psi_j := \psi s + (y_j - ys) \cdot \frac{\Delta\psi}{(yf - ys)}$$

ponto 1: $\varphi_1 \cdot \frac{180}{\pi} = 51.029$ $\psi_1 \cdot \frac{180}{\pi} = 60.529$

ponto 2: $\varphi_2 \cdot \frac{180}{\pi} = 90$ $\psi_2 \cdot \frac{180}{\pi} = 87.426$

ponto 3: $\varphi_3 \cdot \frac{180}{\pi} = 128.971$ $\psi_3 \cdot \frac{180}{\pi} = 102.956$

Variáveis auxiliares

$w1 := \cos(\varphi_1) - \cos(\varphi_2)$ $w1 = 0.629$

$w2 := \cos(\varphi_1) - \cos(\varphi_3)$ $w2 = 1.258$

$w3 := \cos(\psi_1) - \cos(\psi_2)$ $w3 = 0.447$

$w4 := \cos(\psi_1) - \cos(\psi_3)$ $w4 = 0.716$

$w5 := \cos(\varphi_1 - \psi_1) - \cos(\varphi_2 - \psi_2)$ $w5 = -0.013$

$w6 := \cos(\varphi_1 - \psi_1) - \cos(\varphi_3 - \psi_3)$ $w6 = 0.088$

Relações de comprimentos

$R1 := \dfrac{w3 \cdot w6 - w4 \cdot w5}{w2 \cdot w3 - w1 \cdot w4}$ $R1 = 0.431$

$R2 := \dfrac{w1 \cdot w6 - w2 \cdot w5}{w2 \cdot w3 - w1 \cdot w4}$ $R2 = 0.635$

$R3 := \cos(\varphi_1 - \psi_1) + R2 \cdot \cos(\psi_1) - R1 \cdot \cos(\varphi_1)$ $R3 = 1.028$

Comprimentos

$d := 1$

$a := \dfrac{d}{R2}$ $a = 1.575$

$c := \dfrac{d}{R1}$ $c = 2.319$

$b := \sqrt{(a^2 + c^2 + d^2 - 2 \cdot a \cdot c \cdot R3)}$ $b = 1.163$

Representação gráfica da cadeia:

Comprimentos dos elos a, b e c em relação ao elo d:

$A := \dfrac{a}{d}$ $B := \dfrac{b}{d}$ $C := \dfrac{c}{d}$ $D := \dfrac{d}{d}$

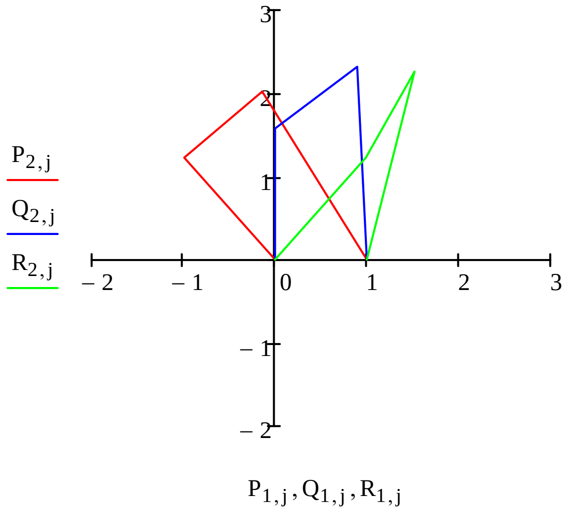
Coordenadas das articulações em cada ponto de precisão:

posição $i := 1$ $P := \begin{pmatrix} 0 & -A \cdot \cos(\varphi_i) & D - C \cdot \cos(\psi_i) & D \\ 0 & A \cdot \sin(\varphi_i) & C \cdot \sin(\psi_i) & 0 \end{pmatrix}$

posição $i := 2$ $Q := \begin{pmatrix} 0 & -A \cdot \cos(\varphi_i) & D - C \cdot \cos(\psi_i) & D \\ 0 & A \cdot \sin(\varphi_i) & C \cdot \sin(\psi_i) & 0 \end{pmatrix}$

posição $i := 3$ $R := \begin{pmatrix} 0 & -A \cdot \cos(\varphi_i) & D - C \cdot \cos(\psi_i) & D \\ 0 & A \cdot \sin(\varphi_i) & C \cdot \sin(\psi_i) & 0 \end{pmatrix}$

$j := 1 .. 4$



$\varphi s \cdot \frac{180}{\pi} = 45$ $\quad \Delta\varphi \cdot \frac{180}{\pi} = 90$

$\psi s \cdot \frac{180}{\pi} = 45$ $\quad \Delta\psi \cdot \frac{180}{\pi} = 60$

$a = 1.575$

$b = 1.163$

$c = 2.319$

$d = 1$

Verificação do mecanismo (análise de posição)

Dados do mecanismo:

$\varphi s = 45 \cdot deg$ $\quad \Delta\varphi = 90 \cdot deg$

$\psi s = 45 \cdot deg$ $\quad \Delta\psi = 60 \cdot deg$

$\varphi f := \varphi s + \Delta\varphi$ $\quad \varphi f = 135 \cdot deg$

$\psi f := \psi s + \Delta\psi$ $\quad \psi f = 105 \cdot deg$

Incremento de φ: $\quad \varphi incr := 1 deg$

Solução numérica da posição

variação de φ: $\quad \varphi := \varphi s, \varphi s + \varphi incr .. \varphi f$

valores iniciais das variáveis secundárias: $\quad \theta := 20 deg \quad \psi := 100 deg$

solução numérica:

Given

$-a \cdot \cos(\varphi) + b \cdot \cos(\theta) + c \cdot \cos(\psi) - d = 0$

$a \cdot \sin(\varphi) + b \cdot \sin(\theta) - c \cdot \sin(\psi) = 0$

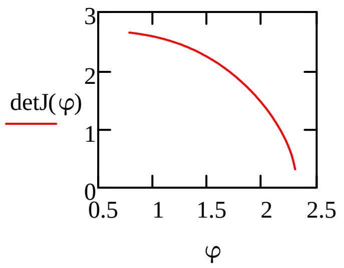
$sol(\varphi) := Find(\theta, \psi)$

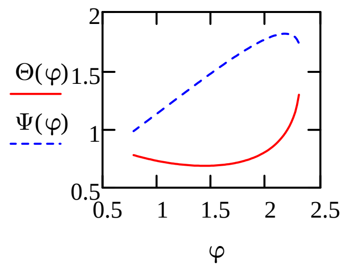
Elo intermediário: $\quad \Theta(\varphi) := sol(\varphi)_1$

Elo de saída: $\quad \Psi(\varphi) := sol(\varphi)_2$

$$jaco(\varphi) = \begin{pmatrix} -b \cdot \sin(\Theta(\varphi)) & -c \cdot \sin(\Psi(\varphi)) \\ b \cdot \cos(\Theta(\varphi)) & -c \cdot \cos(\Psi(\varphi)) \end{pmatrix}$$

$detJ(\varphi) := b \cdot c \cdot \sin(\Theta(\varphi) + \Psi(\varphi))$





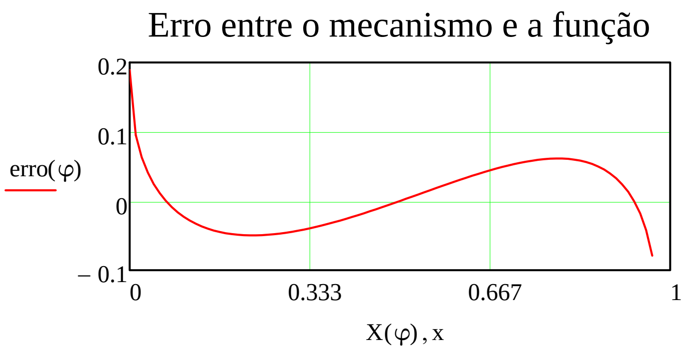
Correspondência dos ângulos com as ecalas x e y:

$$X(\varphi) := \frac{\varphi - \varphi s}{\varphi f - \varphi s}\cdot(xf - xs) + xs$$

$$Y(\varphi) := \frac{\Psi(\varphi) - \psi s}{\psi f - \psi s}\cdot(yf - ys) + ys$$

Correspondência de $X(\varphi)$ *com a função* $x^{1.5}$ $Yf(\varphi) := f(X(\varphi))$

Erro entre o mecanismo e a função: $erro(\varphi) := Y(\varphi) - Yf(\varphi)$



Observe o erro zero nas posições de precisão.