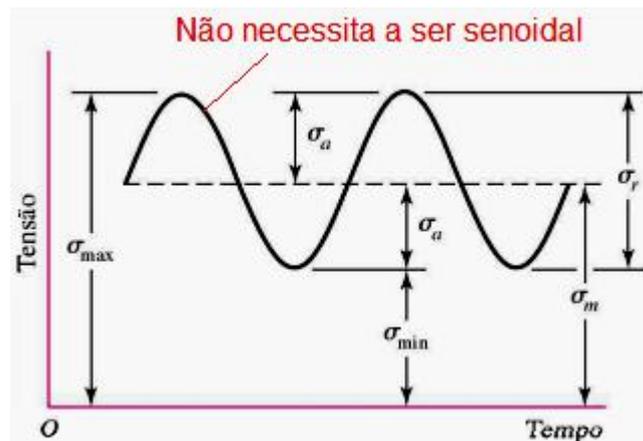


## 6-11 Caracterização de tensões flutuantes - O efeito de solitação média

No ensaio para determinação da curva  $S \sim N$ , a tensão aplicada é reversa totalmente e a tensão média é nula. Para uma componente mecânica real, a tensão é flutuante e a tensão média em um ciclo geralmente não é nula. Por isso, a tensão média faz um grande papel na análise de fadiga e precisa ser estudada. A figura abaixo mostra caso geral de tensão flutuante.



onde

A tensão média:

$$\sigma_m = \frac{\sigma_{m\acute{a}x} + \sigma_{m\acute{i}n}}{2}$$

A amplitude de tensão:

$$\sigma_a = \frac{|\sigma_{m\acute{a}x} - \sigma_{m\acute{i}n}|}{2} \quad (6-35)$$

O fator simétrico de tensão ou a razão de tensão:

$$R = \frac{\sigma_{m\acute{i}n}}{\sigma_{m\acute{a}x}} \quad (6-36)$$

A razão ou direção de carregamento:

$$r(\text{ou } A) = \frac{\sigma_a}{\sigma_m} \quad (6-37)$$

A tensão estável ou estática  $\sigma_s$  é causada por uma carga fixa ou pré-carga aplicada e usualmente independente da porção variante  $\sigma_r$ . Ela não é a mesma que a tensão média  $\sigma_m$ , dependendo o fator simétrica de tensão  $R$ . Podemos entender isso por exemplo de uma massa sobre cima de uma mola helicoidal. Na posição estática onde a força da mola comprimida é igual ao peso da massa. Em relação dessa posição se a massa vibra com um deslocamento para cima é diferente ao para baixo, a força média da mola não igual a força estática ou seja do

peso da massa. Mas se o deslocamento para cima é igual ao para baixo, aí a força média é igual a força estática.

Quando existência de um entalhe, a concentração de tensão pode levar o material entrar plasticidade localizada no primeiro ciclo. Isto está ocorrendo na ponta de uma trinca ou no local a nucleação de trinca por fadiga. A ocorrência de plasticidade complica análise. Há diversas discussões concernentes às maneiras possíveis de quantificar o que está ocorrendo durante o escoamento localizado.

O livro do Shigley propôs para materiais dúcteis em fadiga três métodos de aproximação:

- Evite deformação plástica localizada em um entalhe, usa-se o **método da tensão residual** onde:

$$\sigma_a = K_f \sigma_{ao} \quad \text{e} \quad \sigma_m = K_f \sigma_{mo}$$

em que a letra "o" indica a tensão nominal.

- Quando a deformação plástica em um entalhe não puder ser evitada, usa-se o **método da tensão média nominal** (de maneira conservada) onde:

$$\sigma_a = K_f \sigma_{ao} \quad \text{e} \quad \sigma_m = \sigma_{mo}$$

Este método apresenta grosseiramente resultados compatíveis aos do método de tensão residual.

- ou para materiais de comportamento aproximado pelo modelo elástico-plástico ideal, usa-se o **método de Dowling** onde:

$$\begin{aligned} K_{fm} &= K_f & \text{se} & \quad K_f |\sigma_{\max,o}| < S_y \\ K_{fm} &= \frac{S_y - K_f \sigma_{ao}}{|\sigma_{mo}|} & \text{se} & \quad K_f |\sigma_{\max,o}| > S_y \\ K_{fm} &= 0 & \text{se} & \quad K_f |\sigma_{\max,o} - \sigma_{\min,o}| > 2S_y \end{aligned} \quad (6-38)$$

onde  $K_{fm}$  é o **fator de concentração de tensão da componente de tensão estável.**

## 6-12 Critérios de falha por fadiga para tensão flutuante

### OBSERVAÇÕES GERAIS IMPORTANTES:

(1) Quando a tensão média é compressão, a falha ocorre sempre que

$$\sigma_a = S_e \quad \text{ou} \quad \sigma_{\max} = S_{yc}$$

onde  $S_{yc}$  é a tensão de escoamento na compressão.

(2) Nos critérios abaixo o par  $(\sigma_a, \sigma_m)$  representa um estado de tensões aplicadas numa peça real; e o par  $(S_a, S_m)$  representa um estado de falha descrito por um específico critério, ou seja, um ponto na curva de falha descrito pelo critério.

O par  $(\sigma_a, \sigma_m)$  é proporcional ao seu par  $(S_a, S_m)$ , ou seja,  $S_a = n_f \sigma_a$  e  $S_m = n_f \sigma_m$

onde  $n_f$  é o fator de segurança. Quando empregar  $(\sigma_a, \sigma_m)$  até falha  $n_f = 1$ , neste

caso,  $\sigma_a = S_a$  e  $\sigma_m = S_m$ . Os valores  $\sigma_a$  e  $\sigma_m$  nos critérios devem ser os já corrigidos segundo os métodos mencionados no efeito da solicitação média da seção 6-11.

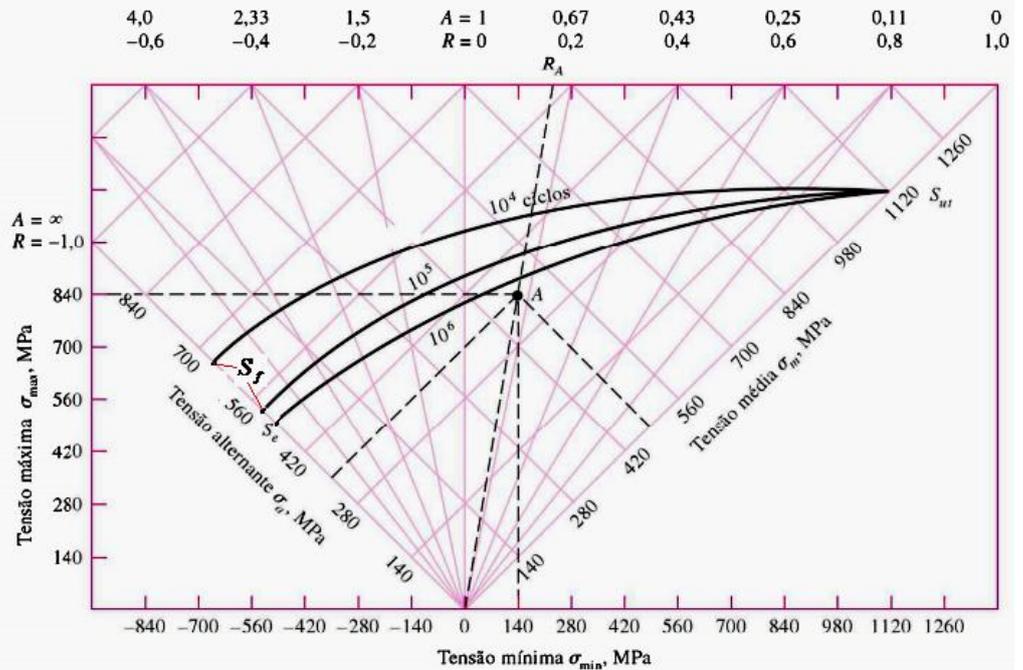
(3) Nas formulas descrevendo os critérios abaixo, a tensão limite  $S_e$  corresponde uma vida infinita de  $10^6$  ciclos. Para calcular uma vida finita,  $S_e$  deve ser substituída por  $S_f$ .

O diagrama muito engenhoso da Figura 6-26 é o único que mostra quatro das componentes de tensão, bem como as duas razões de tensão. A curva que representa o limite de endurance para valores de  $R$ , começando em  $R = -1$  e terminando com  $R = 1$ , começa em  $S_e$  no eixo  $\sigma_a$  e termina em  $S_{ut}$  no eixo  $\sigma_m$ . Curvas de vida constante para  $N = 10^5$  e  $N = 10^4$  ciclos foram traçadas também, onde  $S_e$  deve ser substituída por  $S_f$ .

**Figura 6-26**

Diagrama mestre de fadiga criado para o aço AISI 4340 tendo  $S_{ut} = 1100$  e  $S_y = 1025$  MPa. As componentes de tensão em A são  $\sigma_{min} = 140$ ,  $\sigma_{max} = 840$ ,  $\sigma_m = 490$  e  $\sigma_a = 350$ , todas em MPa

Fonte: H. J. Grover, Fatigue of Aircraft Structures, U.S. Government Printing Office, Washington, D.C., 1966, p. 317, 322. Ver também J. A. Collins, Failure of Materials in Mechanical Design, Wiley, Nova York, 1981, p. 216.)

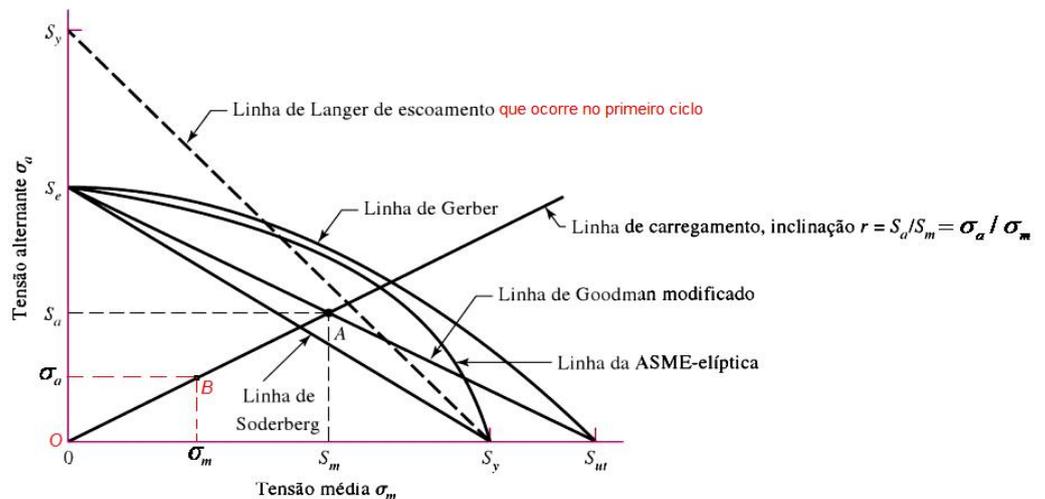


Usa  $(\sigma_{min}, \sigma_{max})$  ou  $(\sigma_m, \sigma_a)$  para determinar o ponto A.

Cinco critérios de falha estão diagramados na Figura 6-27: o Soderberg, o Goodman modificado, o Gerber, o ASME-elíptico e o escoamento. O diagrama mostra que somente o critério de Soderberg se resguarda contra qualquer escoamento, mas é tendencioso para baixo.

**Figura 6-27**

Diagrama de fadiga que mostra vários critérios de falha. Para cada critério, pontos na respectiva linha ou "acima" indicam falha. Um ponto A na linha de Goodman, por exemplo, dá a resistência  $S_m$  como o valor limite de  $\sigma_m$  correspondente à resistência  $S_a$ , que, emparelhada com  $\sigma_m$ , é o valor limite de  $\sigma_a$ .



Quando um ponto está abaixo de uma linha de falha, isto implica que este ponto está em segurança e o fator de segurança será calculado por:

$$n_f = OA / OB$$

Considerando a linha de Goodman modificado com um critério, o ponto A representa um ponto limitante com uma resistência alternante  $S_a$  e resistência média  $S_m$ . A inclinação da linha de carga mostrada é definida como  $r = S_a / S_m$ .

A equação de critério para a linha de Soderberg é

$$\frac{S_a}{S_e} + \frac{S_m}{S_y} = 1 \quad (6-39)$$

Similarmente, encontramos a relação de Goodman modificada como

$$\frac{S_a}{S_e} + \frac{S_m}{S_{ut}} = 1 \quad (6-40)$$

O exame da Figura 6-25 mostra que uma parábola e uma elipse têm melhor oportunidade de passar entre os dados de tensão média e de permitir qualificações da probabilidade de falha. O critério de falha de Gerber é escrito como

$$\frac{S_a}{S_e} + \left( \frac{S_m}{S_{ut}} \right)^2 = 1 \quad (6-41)$$

e o ASME-elíptico é escrito como

$$\left( \frac{S_a}{S_e} \right)^2 + \left( \frac{S_m}{S_y} \right)^2 = 1 \quad (6-42)$$

O critério de escoamento de primeiro ciclo de *Langer* é usado em conexão com a curva de fadiga:

$$S_a + S_m = S_y \quad (6-43)$$

As tensões  $n\sigma_a$  e  $n\sigma_m$  podem substituir  $S_a$  e  $S_m$ , em que  $n$  é o fator de desenho (ou projeto) ou fator de segurança. Assim, a Equação (6-39), linha de Soderberg, torna-se

$$\text{Soderberg} \quad \frac{\sigma_a}{S_e} + \frac{\sigma_m}{S_y} = \frac{1}{n} \quad (6-44)$$

A Equação (6-40), linha de Goodman modificada, torna-se

$$\text{Goodman modificada} \quad \frac{\sigma_a}{S_e} + \frac{\sigma_m}{S_{ut}} = \frac{1}{n} \quad (6-45)$$

A Equação (6-41), linha de Gerber, torna-se

$$\text{Gerber} \quad \frac{n\sigma_a}{S_e} + \left( \frac{n\sigma_m}{S_{ut}} \right)^2 = 1 \quad (6-46)$$

A Equação (6-42), linha ASME-elíptica, torna-se

$$\text{ASME-elíptica} \quad \left( \frac{n\sigma_a}{S_e} \right)^2 + \left( \frac{n\sigma_m}{S_y} \right)^2 = 1 \quad (6-47)$$

Enfatizaremos Gerber e ASME-elíptico para critério de falha por fadiga, e Langer para escoamento de primeiro ciclo. Contudo, designers conservadores frequentemente usam o critério de Goodman modificado; assim, continuaremos a incluí-lo em nossas discussões. A equação de desenho para escoamento de primeiro ciclo de Langer é

$$\text{Langer escoamento } \sigma_a + \sigma_m = \frac{S_y}{n} \quad (6-48)$$

Os critérios de falha são usados em conjunção com uma linha de carga,  $r = S_a/S_m = \sigma_a/\sigma_m$ . As intersecções principais estão tabuladas nas Tabelas 6-6 a 6-8. Expressões formais para o fator de segurança de fadiga são dadas no painel inferior das Tabelas 6-6 a 6-8. A primeira linha de cada tabela corresponde ao critério de fadiga, a segunda é o critério estático de Langer e a terceira corresponde à intersecção do critério estático e de fadiga.

A primeira coluna nos dá as equações de intersecção e a segunda coluna, as coordenadas de intersecção.

**Tabela 6-6**

Amplitude e coordenadas estáveis de resistência e intersecções importantes no primeiro quadrante para os critérios de falha de Goodman modificado e Langer.

Equações de falha	Coordenadas da intersecção
$\begin{cases} \frac{S_a}{S_e} + \frac{S_m}{S_{ut}} = 1 & \text{(Curva de falha)} \\ \text{Linha de carregamento } r = \frac{S_a}{S_m} \end{cases}$	$\begin{aligned} S_a &= \frac{r S_e S_{ut}}{r S_{ut} + S_e} \\ S_m &= \frac{S_a}{r} \end{aligned}$
$\begin{cases} \frac{S_a}{S_y} + \frac{S_m}{S_y} = 1 & \text{(Curva de falha)} \\ \text{Linha de carregamento } r = \frac{S_a}{S_m} \end{cases}$	$\begin{aligned} S_a &= \frac{r S_y}{1 + r} \\ S_m &= \frac{S_y}{1 + r} \end{aligned}$
$\begin{cases} \frac{S_a}{S_e} + \frac{S_m}{S_{ut}} = 1 \\ \frac{S_a}{S_y} + \frac{S_m}{S_y} = 1 \end{cases}$ <p>Para caso de não sabe <math>r</math>, usa essas duas equações para encontrar <math>r</math> crítica onde a falha de Goodman e o escoamento acontecem no mesmo ponto</p>	$\begin{aligned} S_m &= \frac{(S_y - S_e) S_{ut}}{S_{ut} - S_e} \\ S_a &= S_y - S_m, r_{crit} = S_a/S_m \end{aligned}$

Fator de segurança de fadiga

$$n_f = \frac{1}{\frac{\sigma_a}{S_e} + \frac{\sigma_m}{S_{ut}}}$$

**Tabela 6-7**

Amplitude e coordenadas estáveis de resistência e intersecções importantes no primeiro quadrante para os critérios de falha de Gerber e de Langer.

Equações de falha	Coordenadas da intersecção
$\begin{cases} \frac{S_a}{S_e} + \left(\frac{S_m}{S_{ut}}\right)^2 = 1 \\ \text{Linha de carregamento } r = \frac{S_a}{S_m} \end{cases}$	$\begin{aligned} S_a &= \frac{r^2 S_{ut}^2}{2 S_e} \left[ -1 + \sqrt{1 + \left(\frac{2 S_e}{r S_{ut}}\right)^2} \right] \\ S_m &= \frac{S_a}{r} \end{aligned}$
$\begin{cases} \frac{S_a}{S_y} + \frac{S_m}{S_y} = 1 \\ \text{Linha de carregamento } r = \frac{S_a}{S_m} \end{cases}$	$\begin{aligned} S_a &= \frac{r S_y}{1 + r} \\ S_m &= \frac{S_y}{1 + r} \end{aligned}$
$\begin{cases} \frac{S_a}{S_e} + \left(\frac{S_m}{S_{ut}}\right)^2 = 1 \\ \frac{S_a}{S_y} + \frac{S_m}{S_y} = 1 \end{cases}$	$\begin{aligned} S_m &= \frac{S_{ut}^2}{2 S_e} \left[ 1 - \sqrt{1 + \left(\frac{2 S_e}{S_{ut}}\right)^2 \left(1 - \frac{S_y}{S_e}\right)} \right] \\ S_a &= S_y - S_m, r_{crit} = S_a/S_m \end{aligned}$

Fator de segurança de fadiga

$$n_f = \frac{1}{2} \left(\frac{S_{ut}}{\sigma_m}\right)^2 \frac{\sigma_a}{S_e} \left[ -1 + \sqrt{1 + \left(\frac{2 \sigma_m S_e}{S_{ut} \sigma_a}\right)^2} \right] \quad \sigma_m > 0$$

**Tabela 6-8**

Amplitude e coordenadas estáveis de resistência e intersecções importantes no primeiro quadrante para os critérios de falha ASME-elíptico e de Langer.

Equações de falha	Coordenadas da intersecção
$\begin{cases} \left(\frac{S_a}{S_e}\right)^2 + \left(\frac{S_m}{S_y}\right)^2 = 1 \\ \text{Linha de carregamento } r = S_a/S_m \end{cases}$	$\begin{aligned} S_a &= \sqrt{\frac{r^2 S_e^2 S_y^2}{S_e^2 + r^2 S_y^2}} \\ S_m &= \frac{S_a}{r} \end{aligned}$
$\begin{cases} \frac{S_a}{S_y} + \frac{S_m}{S_y} = 1 \\ \text{Linha de carregamento } r = S_a/S_m \end{cases}$	$\begin{aligned} S_a &= \frac{r S_y}{1 + r} \\ S_m &= \frac{S_y}{1 + r} \end{aligned}$
$\begin{cases} \left(\frac{S_a}{S_e}\right)^2 + \left(\frac{S_m}{S_y}\right)^2 = 1 \\ \frac{S_a}{S_y} + \frac{S_m}{S_y} = 1 \end{cases}$	$\begin{aligned} S_a &= 0, \frac{2 S_y S_e^2}{S_e^2 + S_y^2} \\ S_m &= S_y - S_a, r_{crit} = S_a/S_m \end{aligned}$

Fator de segurança de fadiga

$$n_f = \sqrt{\frac{1}{(\sigma_a/S_e)^2 + (\sigma_m/S_y)^2}}$$

Os critérios de falha por fadiga de Gerber e ASME-elíptico são muito próximos um do outro e são usados de modo intercambiável. A norma ANSI/ASME B106.1M-1985 usa o ASME-elíptico para eixos.

Existem duas maneiras de proceder a uma análise típica. Um método é supor que a fadiga ocorre primeiro e usar uma das Equações (6-44) a (6-47) para determinar  $n$  ou magnitude, dependendo da tarefa. **Mais frequentemente, fadiga é o modo de falha governante. Depois seguimos com uma verificação estática.** Se a falha estática governar, então a análise é repetida usando a Equação (6-48).

Alternativamente, podem-se usar as tabelas. Determine a linha de carga e estabeleça o critério que a linha de carga intercepta primeiro, usando as equações correspondentes nas tabelas.

**EXEMPLO 6-10** Uma barra de diâmetro de 40 mm foi usinada de uma barra de aço AISI 1050, repuxada a frio. Essa peça deve aguentar uma carga de tração flutuante variando de 0 a 70 kN. Por causa das extremidades e do raio de arredondamento, o fator de concentração de tensão de fadiga  $K_f$  é 1,85 para vida de  $10^6$  ou maior. Encontre  $S_a$  e  $S_m$  e o fator de segurança que resguarde de fadiga e escoamento de primeiro ciclo, usando (a) a linha de fadiga de Gerber e (b) linha de fadiga ASME-elíptica.

**Solução** Começamos com algumas preliminares. Da Tabela A-18,  $S_{ut} = 690\text{MPa}$  e  $S_y = 580\text{MPa}$ . Note que  $F_a = F_m = 35\text{kN}$ . Os fatores de Marin são, deterministicamente,

$$k_a = 4,51(690)^{-0,265} = 0,798: \text{Equação (6-19), Tabela 6-2,}$$

$$k_b = 1 \text{ (carregamento axial, ver } k_c)$$

$$k_c = 0,85: \text{Equação (6-26),}$$

$$k_d = k_e = k_f = 1$$

$$S_e = 0,798(1)0,850(1)(1)(1)0,5(690) = 234 \text{ MPa: Equações (6-8), (6-18)}$$

As componentes nominais de tensão normal  $\sigma_{ao}$  e  $\sigma_{mo}$  são

$$\sigma_{ao} = \frac{4F_a}{\pi d^2} = \frac{4(35000)}{\pi 0,04^2} = 27,9 \text{ MPa} \quad \sigma_{mo} = \frac{4F_m}{\pi d^2} = \frac{4(35000)}{\pi 0,04^2} = 27,9 \text{ MPa}$$

Aplicar  $K_f$  a ambos os componentes  $\sigma_{ao}$  e  $\sigma_{mo}$  constitui uma prescrição de nenhum escoamento de entalhe: o método de tensão residual

$$\sigma_a = K_f \sigma_{ao} = 1,85(27,9) = 51,6 \text{ MPa} = \sigma_m$$

(a) Vamos primeiro calcular os fatores de segurança. Do painel inferior da Tabela 6-7, o fator de segurança de fadiga é

Resposta 
$$n_f = \frac{1}{2} \left( \frac{690}{51,6} \right)^2 \left( \frac{51,6}{234} \right) \left\{ -1 + \sqrt{1 + \left[ \frac{2(51,6)234}{690(51,6)} \right]^2} \right\} = 4,13$$

Da Equação (6-48) o fator de segurança, resguardando contra o escoamento de primeiro ciclo, é

Resposta 
$$n_y = \frac{S_y}{\sigma_a + \sigma_m} = \frac{580}{51,6 + 51,6} = 5,62$$

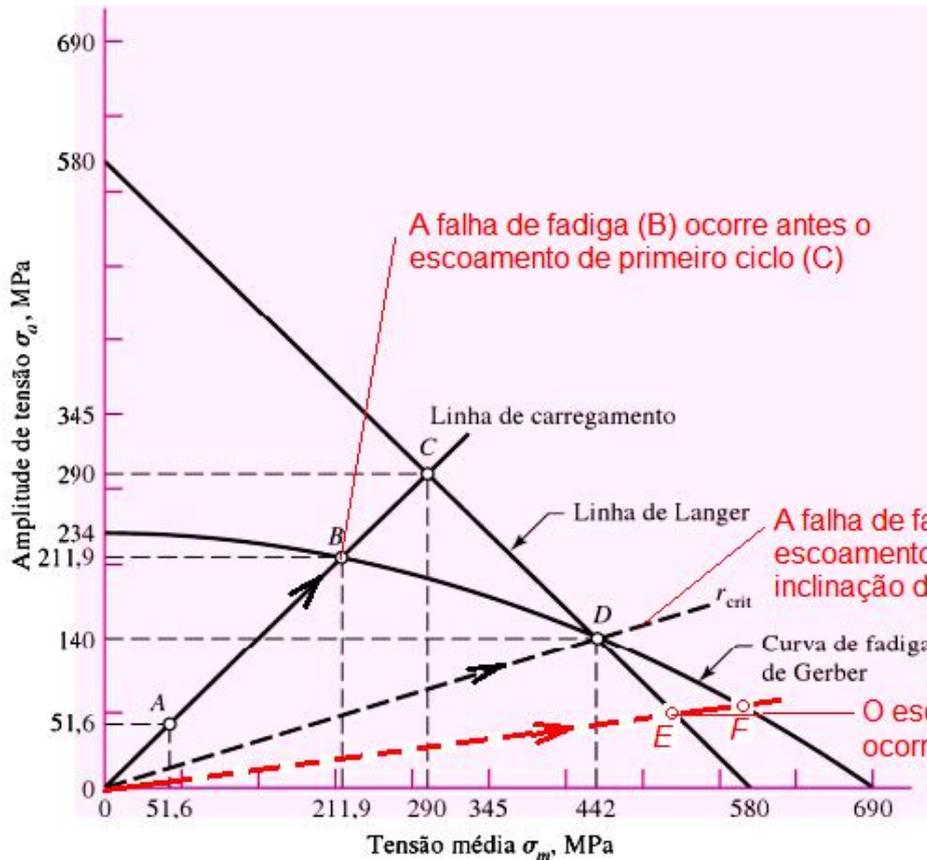
Assim, vemos que a fadiga ocorrerá primeiro e o fator de segurança é 4,13. Isso pode ser visto na Figura 6-28, na qual a linha de carregamento intercepta primeiro a curva de fadi-

ga de Gerber no ponto B. Se os traçados fossem criados em escala verdadeira, seria visto que  $n_f = OB/OA$ .

Do primeiro painel da Tabela 6-7,  $r = \sigma_a / \sigma_m = 1$ ,

Resposta 
$$S_a = \frac{(1)^2 690^2}{2(234)} \left\{ -1 + \sqrt{1 + \left[ \frac{2(234)}{(1)690} \right]^2} \right\} = 211,9 \text{ MPa}$$

Resposta 
$$S_m = \frac{S_a}{r} = \frac{211,9}{1} = 211,9 \text{ MPa}$$



**Figura 6-28**

Pontos principais A, B, C e D no diagrama do desenhador desenhado para Gerber, Langer e linha de carga.

Como uma verificação no resultado prévio,  $n_f = OB/OA = S_a/\sigma_a = S_m/\sigma_m = 211,9/51,6 = 4,12$  e observamos concordância total.

Poderíamos ter detectado que a falha por fadiga ocorreria primeiro sem desenhar a Figura 6-28 calculando  $r_{crit}$ . A partir do terceiro painel-linha, segunda coluna da Tabela 6-7, o ponto de intersecção entre fadiga e escoamento de primeiro ciclo é

$$S_m = \frac{690^2}{2(234)} \left[ 1 - \sqrt{1 + \left( \frac{2(234)}{690} \right)^2 \left( 1 - \frac{580}{234} \right)} \right] = 442 \text{ MPa}$$

$$S_a = S_y - S_m = 580 - 442 = 138 \text{ MPa}$$

A inclinação crítica é, portanto,

$$r_{crit} = \frac{S_a}{S_m} = \frac{138}{442} = 0,312$$

que é menor que a da linha de carregamento real de  $r = 1$ . Isso indica que a fadiga ocorre antes do escoamento de primeiro ciclo.

(b) Repetindo o mesmo procedimento para a linha ASME-elíptica, para fadiga

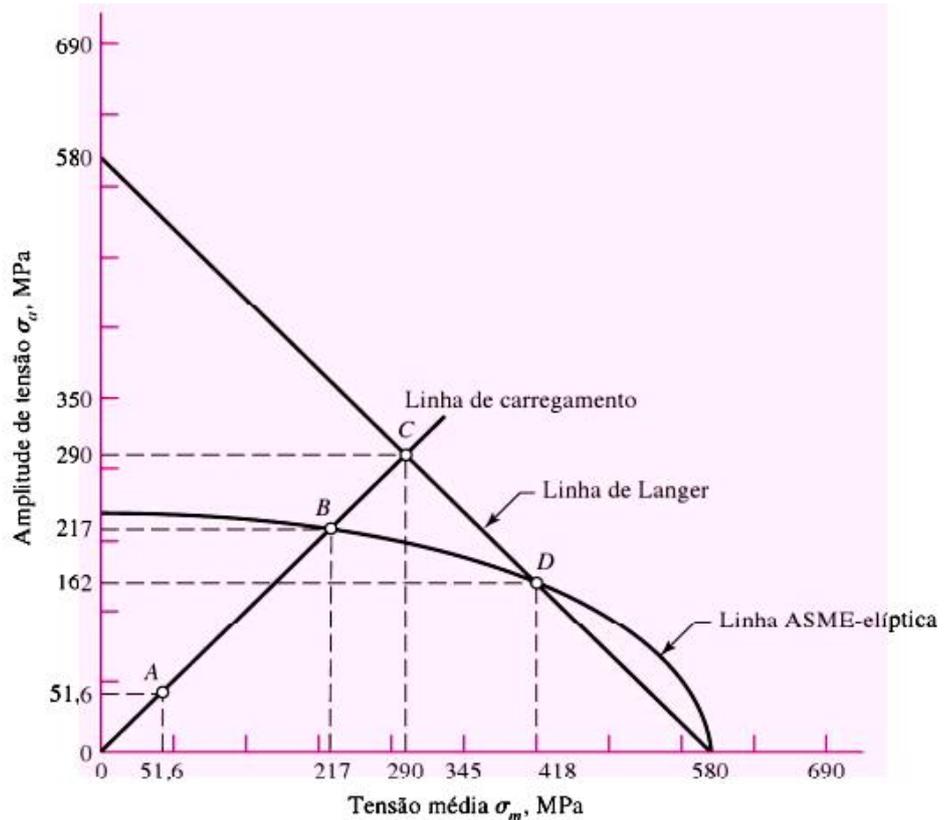
Resposta

$$n_f = \sqrt{\frac{1}{(51,6/234)^2 + (51,6/580)^2}} = 4,21$$

Uma vez mais, esse é menor que  $n_y = 5,62$  e prevê que a fadiga ocorra primeiro. Do primeiro painel-linha, segunda coluna da Tabela 6-8, com  $r = 1$ , obtemos as coordenadas  $S_a$  e  $S_m$  do ponto  $B$  na Figura 6-29 como

**Figura 6-29**

Pontos principais  $A$ ,  $B$ ,  $C$  e  $D$  no diagrama do desenhador desenhado para ASME-elíptico, Langer e linha de carregamento.



Resposta

$$S_a = \sqrt{\frac{(1)^2 234^2 (580)^2}{234^2 + (1)^2 580^2}} = 217 \text{ MPa}, \quad S_m = \frac{S_a}{r} = \frac{217}{1} = 217 \text{ MPa}$$

Para verificarmos o fator de segurança de fadiga,  $n_f = S_a/\sigma_a = 217/51,6 = 4,21$

Como antes, vamos calcular  $r_{\text{crit}}$ . Do terceiro painel-linha, segunda coluna da Tabela 6-8

$$S_a = \frac{2(580)234^2}{234^2 + 580^2} = 162 \text{ MPa}, \quad S_m = S_y - S_a = 580 - 162 = 418 \text{ MPa}$$

$$r_{\text{crit}} = \frac{S_a}{S_m} = \frac{162}{418} = 0,388$$

que novamente é menor que  $r = 1$ , verificando que a fadiga ocorre primeiro com  $n_f = 4,21$ .

### EXEMPLO 6-11

Uma mola de chapa plana é usada para reter um seguidor oscilante de face plana em contato com um came de chapa. O intervalo de movimento do seguidor é de 50 mm e fixo, logo, a componente alternante de força, momento flexor, e tensão estão fixas também. A mola é pré-carregada para se ajustar a várias velocidades do came. A pré-carga deve ser aumentada para prevenir flutuação ou salto do seguidor. Para velocidades baixas a pré-carga deve ser decrescida para obter uma vida mais longa das superfícies do came e do seguidor. A mola é uma viga de aço em balanço com 0,8 m de comprimento, 50 mm de largura e 6 mm de espessura, como vista na Figura 6-30a. As resistências da mola são  $S_{ut} = 1000$  MPa,  $S_y = 880$  MPa e  $S_e = 195$  MPa completamente corrigida. O movimento total do came é 50 mm. O desenhador pré-carrega a mola, defletindo-a 50 mm para baixa velocidade e 125 mm para alta velocidade.

(a) Trace as linhas de falha Gerber-Langer com a linha de carga.

(b) Quais são os fatores de segurança da resistência correspondentes à pré-carga de 50 mm e de 125 mm?

**Solução**

Preliminarmente, o segundo momento de área da seção transversal da viga em balanço é

$$I = \frac{bh^3}{12} = \frac{0,05(0,006)^3}{12} = 0,9 \times 10^{-9} \text{ m}^4$$

Visto que, na Tabela A-9, a viga 1, a força  $F$  e a deflexão  $y$  em uma viga em balanço são relacionadas por  $F = 3EIy/l^3$ , então a tensão  $\sigma$  e a deflexão  $y$  estão relacionadas por

$$\sigma = \frac{Mc}{I} = \frac{0,8Fc}{I} = \frac{0,8(3EIy)c}{l^3 I} = \frac{2,4Ecy}{l^3} = Ky$$

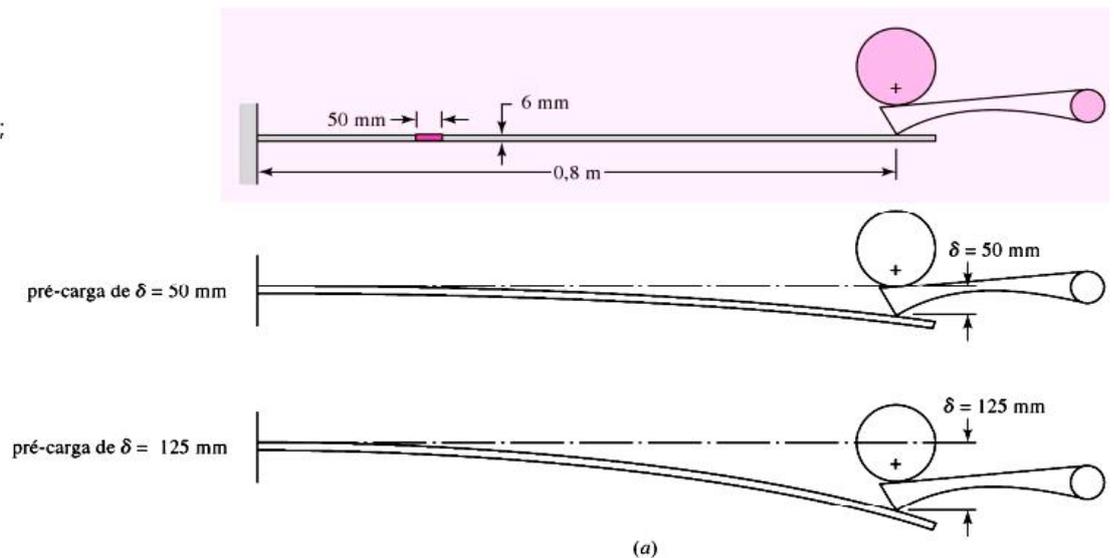
$$\text{em que } K = \frac{2,4Ec}{l^3} = \frac{2,4(210 \times 10^9)(0,003)}{0,8^3} = 2,95 \text{ GPa/m}$$

Agora os máximos e os mínimos de  $y$  e  $\sigma$  podem ser definidos por

$$\begin{aligned} y_{\min} &= \delta & y_{\max} &= 0,05 + \delta \\ \sigma_{\min} &= K\delta & \sigma_{\max} &= K(0,05 + \delta) \end{aligned}$$

**Figura 6-30**

Mola retendo came e seguidor. (a) Geometria; (b) diagrama de fadiga do desenhador para Exemplo 6-11.



Os componentes de tensão são, conseqüentemente,

$$\sigma_a = \frac{K(0,05 + \delta) - K\delta}{2} = 0,025K = 73,75 \text{ MPa}$$

$$\sigma_m = \frac{K(0,05 + \delta) + K\delta}{2} = (0,025 + \delta)K$$

Para (i)  $\delta = 0$ :  $\sigma_a = \sigma_m = 73,75 \approx 74$  MPa

Para (ii)  $\delta = 50$  mm:  $\sigma_a = 74$  MPa,  $\sigma_m = (0,025 + 0,05)K = 0,075 \times 2,95 \text{ GPa} = 221$  MPa

Para (iii)  $\delta = 125$  mm:  $\sigma_a = 74$  MPa,  $\sigma_m = (0,025 + 0,125)K = 0,15 \times 2,95 \text{ GPa} = 443$  MPa

(a) Um gráfico dos critérios de Gerber e Langer é mostrado na Figura 6-30b. As três deflexões de pré-carga de 0, 50 mm e 125 mm são mostradas como pontos A, A', e A''. Note que, uma vez que  $\sigma_a$  é constante em 74 MPa, a linha de carregamento é horizontal e não contém a origem. A intersecção entre a linha de Gerber e a linha de carga é encontrada na solução da Equação (6-41) para  $S_m$  e substituindo-se 74 MPa por  $S_a$ :

$$S_m = S_{ut} \sqrt{1 - \frac{S_a}{S_e}} = 1000 \sqrt{1 - \frac{74}{195}} = 778 \text{ MPa}$$

A intersecção da linha de Langer e da linha de carregamento é encontrada na solução da Equação (6-43) para  $S_m$  e substituindo 74 MPa por  $S_a$ :

$$S_m = S_y - S_a = 880 - 74 = 806 \text{ MPa}$$

As ameaças de fadiga e de escoamento de primeiro ciclo são aproximadamente iguais.

(a) Para  $\delta = 50$  mm,

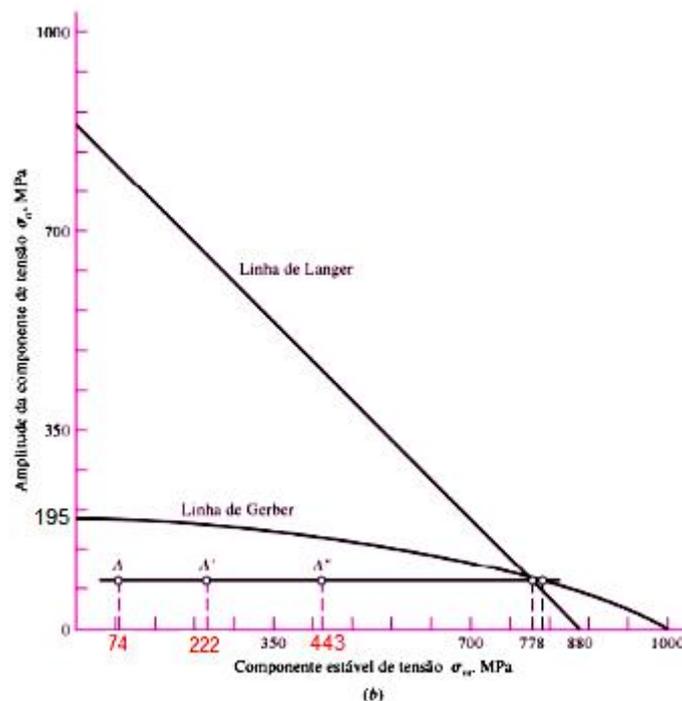
Resposta

$$n_f = \frac{S_m}{\sigma_m} = \frac{778}{221} = 3,52 \quad n_y = \frac{806}{221} = 3,65$$

e para  $\delta = 125$  mm,

Resposta

$$n_f = \frac{778}{443} = 1,76 \quad n_y = \frac{806}{443} = 1,82$$



**EXEMPLO 6-12**

Uma barra de aço sofre carregamento cíclico tal que  $\sigma_{\max} = 420$  MPa e  $\sigma_{\min} = -140$  MPa. Para o material,  $S_{ut} = 560$  MPa,  $S_y = 455$  MPa, um limite de endurecimento completamente corrigido de  $S_e = 280$  MPa e  $f = 0,9$ . Calcule o número de ciclos para uma falha por fadiga usando:

- (a) O critério de Goodman modificado.  
 (b) O critério de Gerber.

Com base nas tensões dadas

Solução 
$$\sigma_a = \frac{420 - (-140)}{2} = 280 \text{ MPa} \quad \sigma_m = \frac{420 + (-140)}{2} = 140 \text{ MPa}$$

Das propriedades do material, Equações (6-14) a (6-16), temos

$$a = \frac{(f S_{ut})^2}{S_e} = \frac{[0,9(560)]^2}{280} = 907 \text{ MPa}$$

$$b = -\frac{1}{3} \log \left( \frac{f S_{ut}}{S_e} \right) = -\frac{1}{3} \log \left[ \frac{0,9(560)}{280} \right] = -0,0851$$

Equação (6-13): 
$$N = \left( \frac{S_f}{a} \right)^{1/b} = \left( \frac{S_f}{907} \right)^{-1/0,0851} \quad (1)$$

(a) A linha de Goodman modificada é dada pela Equação (6-45), em que o limite de fadiga  $S_e$  é usado para vida infinita. Para vida finita em  $S_f > S_e$ , substitua  $S_e$  por  $S_f$  na Equação (6-45) e rearranje, obtendo

$$S_f = \frac{\sigma_a}{1 - \frac{\sigma_m}{S_{ut}}} = \frac{280}{1 - \frac{140}{560}} = 373 \text{ MPa}$$

Substituindo esse resultado na Equação (1), encontramos

Resposta 
$$N = \left( \frac{373}{907} \right)^{-1/0,0851} \doteq 3,4(10^4) \text{ ciclos}$$

(b) Para Gerber, similar à parte (a), da Equação (6-46),

$$S_f = \frac{\sigma_a}{1 - \left( \frac{\sigma_m}{S_{ut}} \right)^2} = \frac{280}{1 - \left( \frac{140}{280} \right)^2} = 299 \text{ MPa}$$

Novamente, da Equação (1)

Resposta 
$$N = \left( \frac{299}{907} \right)^{-1/0,0851} \doteq 4,6(10^5) \text{ ciclos}$$

Comparando as respostas, vemos uma grande diferença nos resultados. Novamente, o critério de Goodman modificado é conservativo quando comparado ao de Gerber, para o qual a diferença moderada em  $S_f$  é, magnificada por uma relação logarítmica  $S, N$ .

## 6-X Critério de falha por fadiga para materiais frágeis

Para muitos materiais *frágeis*, os critérios de falha por fadiga do primeiro quadrante seguem um lugar geométrico (locus) de **Smith-Dolan**, representado por

$$\frac{S_a}{S_e} = \frac{1 - S_m/S_{ut}}{1 + S_m/S_{ut}} \quad (6-49)$$

ou como uma equação de projeto

$$\frac{n\sigma_a}{S_e} = \frac{1 - n\sigma_m/S_{ut}}{1 + n\sigma_m/S_{ut}} \quad (6-50)$$

Para uma linha de carga radial de inclinação  $r$ , substituímos  $S_a/r$  por  $S_m$  na Equação (6-49) e resolvemos para  $S_a$ , obtendo

$$S_a = \frac{rS_{ut} + S_e}{2} \left[ -1 + \sqrt{1 + \frac{4rS_{ut}S_e}{(rS_{ut} + S_e)^2}} \right] \quad (6-51)$$

O diagrama de fadiga para um material frágil difere marcadamente daquele de um material dúctil porque:

- **O escoamento não entra em questão**, visto que o material pode não ter uma resistência ao escoamento.
- Como característica, **a resistência última à compressão excede a resistência última à tração diversas vezes.**
- O lugar geométrico da falha por fadiga do primeiro quadrante é côncavo para cima (Smith-Dolan), por exemplo, e tão plano quanto Goodman. **Materiais frágeis são mais sensíveis à tensão média**, que é diminuída, mas as tensões médias de compressão são benéficas.
- **Não há investigação sobre a fadiga frágil suficiente para descobrir generalidades intrínsecas**, assim ficamos no primeiro e em um pouco do segundo quadrante.

O domínio mais provável de uso do projeto está no intervalo de  $-S_{ut} \leq \sigma_m \leq S_{ut}$ . O lugar geométrico no primeiro quadrante é Goodman, Smith-Dolan, ou algo intermediário. **A porção do segundo quadrante usada é representada por uma linha reta entre os pontos  $-S_{ut}$ ,  $S_{ut}$  e  $0$ ,  $S_e$**  que tem a equação

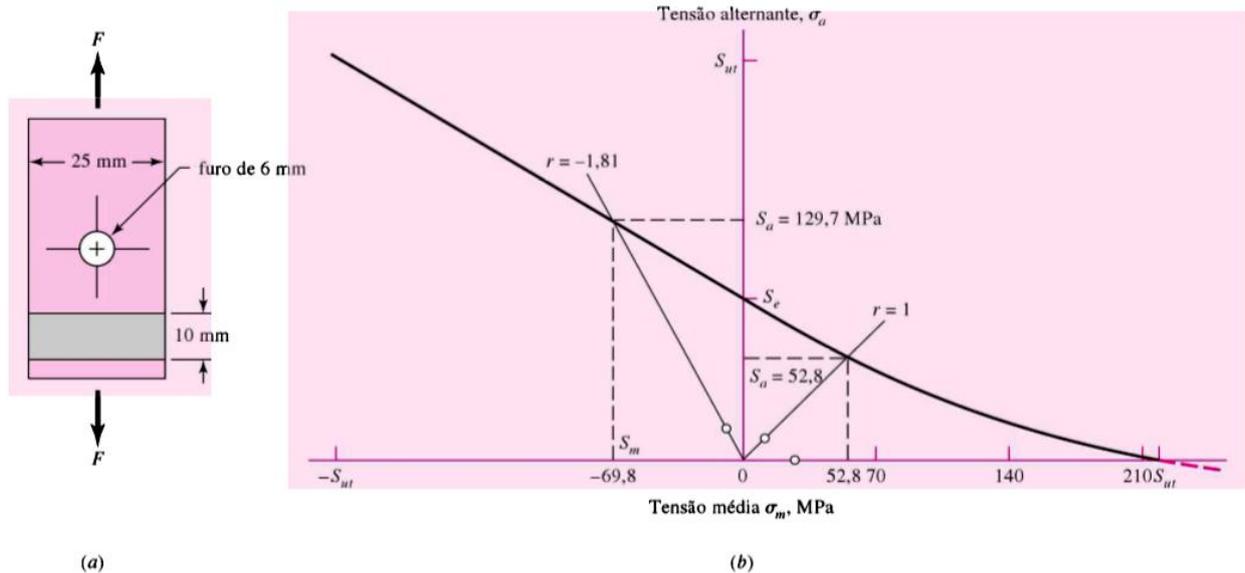
$$S_a = S_e + \left( \frac{S_e}{S_{ut}} - 1 \right) S_m \quad -S_{ut} \leq S_m \leq 0 \quad (\text{para ferro fundido}) \quad (6-52)$$

A Tabela A-22 mostra as propriedades do ferro fundido cinza. O limite de endurance declarado é realmente  $k_a k_b S_e'$  e somente as correções  $k_c$ ,  $k_d$ ,  $k_e$  e  $k_f$  necessitam ser feitas. O  $k_c$  médio para carregamento axial e torcional é 0,9.

### EXEMPLO 6-13

Um ferro fundido cinza de grau 30 é submetido a uma carga  $F$  aplicada em um conector de seção transversal de 25 mm por 10 mm, com um orifício de 6 mm de diâmetro furado no centro, como está representado na Figura 6-31a. As superfícies são usinadas. Nas proximidades do orifício, qual é o fator de segurança que resguarda de falha sob as seguintes condições:

- A carga  $F = 4\,500$  N de tração, estável.
- A carga é 4 500 N aplicada, repetidamente.
- A carga flutua entre  $-4\,500$  N e 1 300 N sem ação de coluna.



**Figura 6-31**

A peça de ferro fundido de grau 30 em fadiga axial com (a) sua geometria mostrada e (b) seu diagrama de fadiga do projeto para as circunstâncias do Exemplo 6-13.

**Solução** Algum trabalho preparatório é necessário. Da Tabela A-22,  $S_{ut} = 214$  MPa,  $S_{uc} = 752$  MPa,  $k_a k_b S'_e = 97$  MPa. Visto que  $k_c$  para carregamento axial é 0,9, então  $S_e = (k_a k_b S'_e) k_c = 97(0,9) = 87,3$  MPa. Da Tabela A-13,  $A = t(w - d) = 0,01(0,025 - 0,006) = 190 \times 10^{-6} \text{ m}^2$ ,  $d/w = 6/25 = 0,24$ , e  $K_t = 2,45$ . A sensibilidade de entalhe para o ferro fundido é 0,20 (ver p. 314), assim

$$K_f = 1 + q(K_t - 1) = 1 + 0,20(2,45 - 1) = 1,29$$

$$(a) \quad \sigma_a = \frac{K_f F_a}{A} = \frac{1,29(0)}{A} = 0 \quad \sigma_m = \frac{K_f F_m}{A} = \frac{1,29(4500)}{190 \times 10^{-6}} = 30,6 \text{ MPa}$$

e

**Resposta**

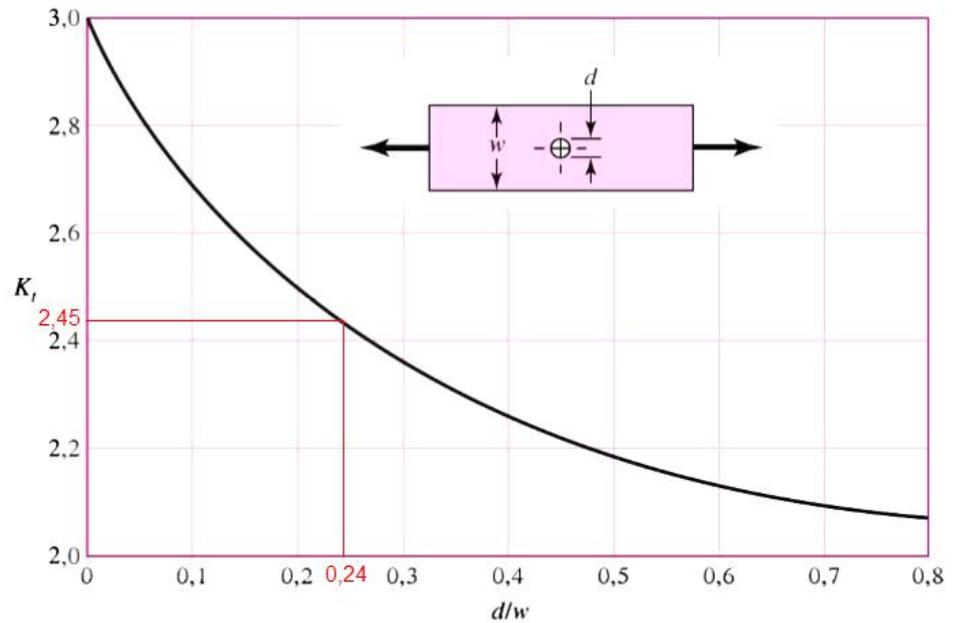
$$n = \frac{S_{ut}}{\sigma_m} = \frac{214}{30,6} = 6,99$$

## Tabela A-13

Cartas de fatores teóricos de concentração de tensão  $K_t^*$ .

### Figura A-13-1

Barra em tração ou compressão simples com um furo transversal.  $\sigma_0 = F/A$ , sendo  $A = (w - d)t$  e  $t$  a espessura.



(b)

$$F_a = F_m = \frac{F}{2} = \frac{4500}{2} = 2250 \text{ N}$$

$$\sigma_a = \sigma_m = \frac{K_f F_a}{A} = \frac{1,29(2250)}{190 \times 10^{-6}} = 15,3 \text{ MPa}$$

$$r = \frac{\sigma_a}{\sigma_m} = 1$$

Da Equação (6-51),

$$S_a = \frac{(1)31 + 12,6}{2} \left[ -1 + \sqrt{1 + \frac{4(1)214(87,3)}{[(1)214 + 87,3]^2}} \right] = 52,8 \text{ MPa}$$

Resposta

$$n = \frac{S_a}{\sigma_a} = \frac{52,8}{15,3} = 3,45$$

$$(c) \quad F_a = \frac{1}{2} |1300 - (-4500)| = 2900 \text{ N} \quad \sigma_a = \frac{1,29(2900)}{190 \times 10^{-6}} = 19,7 \text{ MPa}$$

$$F_m = \frac{1}{2} [1300 + (-4500)] = -1600 \text{ N} \quad \sigma_m = \frac{1,29(-1600)}{190 \times 10^{-6}} = -10,9 \text{ MPa}$$

$$r = \frac{\sigma_a}{\sigma_m} = \frac{19,7}{-10,9} = -1,81$$

Da Equação (6-52),  $S_a = S_e + (S_e/S_{ut} - 1)S_m$  e  $S_m = S_a/r$ . Assim,

$$S_a = \frac{S_e}{1 - \frac{1}{r} \left( \frac{S_e}{S_{ut}} - 1 \right)} = \frac{87,3}{1 - \frac{1}{-1,81} \left( \frac{87,3}{214} - 1 \right)} = 129,7 \text{ MPa}$$

Resposta

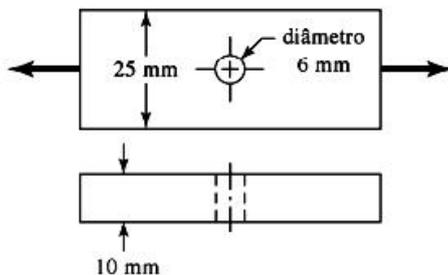
$$n = \frac{S_a}{\sigma_a} = \frac{129,7}{19,7} = 6,58$$

A Figura 6–31*b* mostra a porção do diagrama de fadiga do desenhador que foi construída.

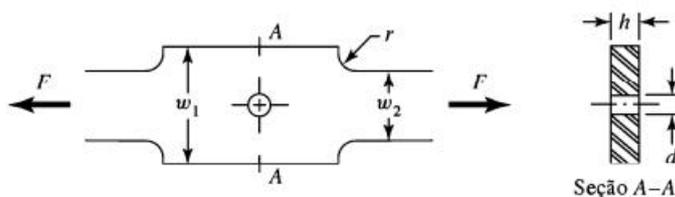
## Exercícios

- 6-12** Uma barra de aço tem propriedades mínimas  $S_e = 276 \text{ MPa}$ ,  $S_y = 413 \text{ MPa}$  e  $S_{ut} = 551 \text{ MPa}$ . A barra está sujeita a uma tensão estável torcional de  $103 \text{ MPa}$  e a uma tensão alternante flexional de  $172 \text{ MPa}$ . Encontre o fator de segurança resguardando-se de uma falha estática, e/ou o fator de segurança resguardando-se de uma falha por fadiga ou a vida esperada da peça. Para a análise de fadiga use:
- O critério de Goodman modificado.
  - O critério de Gerber.
  - O critério ASME-elíptico.

- 6-17** A barra de aço AISI 1018 estirada a frio mostrada na figura está sujeita a uma carga axial flutuante entre  $3,5 \text{ kN}$  e  $15 \text{ kN}$ . Calcule o fator de segurança  $n_y$  e  $n_f$  usando (a) um critério de falha por fadiga de Gerber como parte do diagrama de fadiga do desenhador, e (b) um critério de falha por fadiga ASME-elíptico como parte do diagrama de fadiga do desenhador.



- 6-23** A figura mostra o diagrama de corpo livre de uma porção do elo conector com concentração de tensão em três seções. As dimensões são:  $r = 6 \text{ mm}$ ,  $d = 20 \text{ mm}$ ,  $h = 12 \text{ mm}$ ,  $w_1 = 90 \text{ mm}$  e  $w_2 = 60 \text{ mm}$ . As forças  $F$  flutuam entre uma tensão de  $18 \text{ kN}$  e uma compressão de  $72 \text{ kN}$ . Ignore a ação de coluna e encontre o fator mínimo de segurança se o material for aço AISI 1018 estirado a frio.



**6-24**

O binário torcional na figura é composto de uma viga curva de seção transversal quadrada que está soldada a um eixo de entrada e uma chapa de saída. Um torque é aplicado ao eixo e varia ciclicamente de zero a  $T$ . A seção transversal da viga tem dimensões de 5 mm por 5 mm e o eixo centroidal da viga descreve uma curva da forma  $r = 20 + 10\theta/\pi$ , em que  $r$  e  $\theta$  estão em mm e radianos respectivamente ( $0 \leq \theta \leq 4\pi$ ). A viga curva tem uma superfície usinada com valores de resistência ao escoamento e última de 420 MPa e 770 MPa, respectivamente.

- Determine o valor máximo permissível de  $T$  de modo que o binário tenha uma vida infinita com um fator de segurança,  $n = 3$ , usando o critério de Goodman modificado.
- Repita a parte (a) usando o critério de Gerber.
- Usando  $T$  encontrado na parte (b), determine o fator de segurança resguardando-se de escoamento.

