DINÂMICA DE ROTORES

Prof. Dr. Carlos Alberto Bavastri
Msc. Thiago da Silva
Lucas Bortolotto
Samuel Cavalli

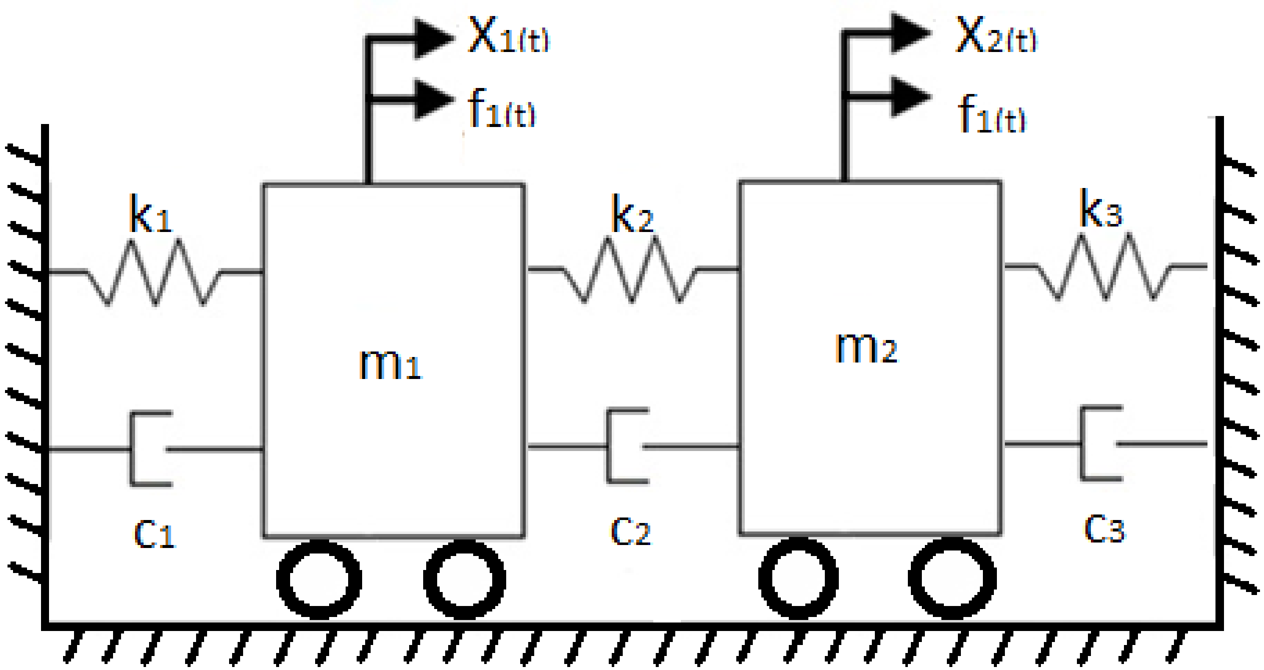
Universidade Federal do Paraná

1. TEORIA BÁSICA DE VIBRAÇÕES

SISTEMAS DE MULTIPLOS GRAUS DE LIBERDADE

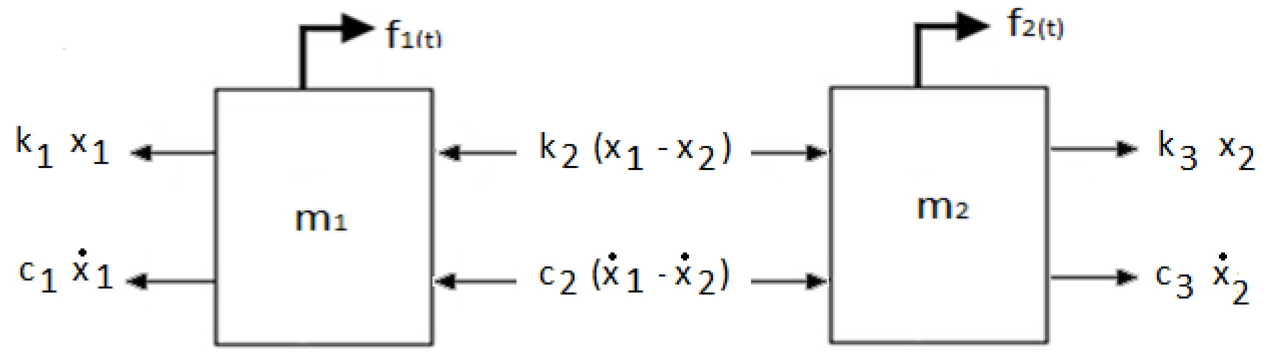
Sistemas de Múltiplos Graus de Liberdade

Dado um sistema de dois graus de liberdade,



◆ Sistemas de Múltiplos Graus de Liberdade

Fazendo diagrama do corpo livre



e aplicando a 2ª Lei de Newton

$$f_1(t) - k_1 x_1 - k_2(x_1 - x_2) - c_1\dot{x}_1 - c_2(\dot{x}_1 - \dot{x}_2) = m_1\ddot{x}_1(t)$$

$$f_2(t) - k_3 x_2 - c_3\dot{x}_2 + k_2(x_1 - x_2) + c_2(\dot{x}_1 - \dot{x}_2) = m_2\ddot{x}_2(t)$$

Sistemas de Múltiplos Graus de Liberdade

é possível achar a equação de movimento:

$$m_1\ddot{x}(t)+(k_1+k_2)x_1(t)+(c_1+c_2)\dot{x}_1(t)-k_2x_2(t)-c_2\dot{x}_2(t)=f_1(t)$$

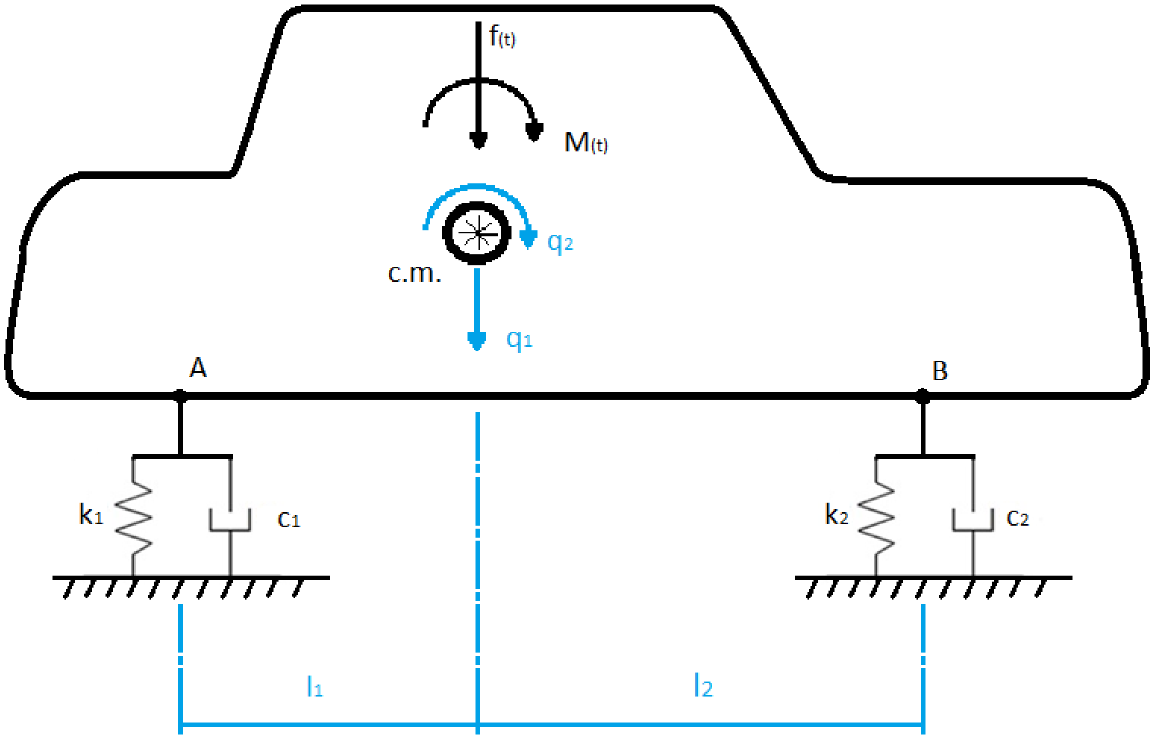
$$m_2\ddot{x}(t)+(k_2+k_3)x_2(t)+(c_2+c_3)\dot{x}_1(t)-k_2x_1(t)-c_2\dot{x}_1(t)=f_2(t)$$

Ou, na forma matricial

$$\begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix}\{\ddot{x}\}+\begin{bmatrix} k_1+k_2 & -k_2 \\ -k_1 & k_2-k_3 \end{bmatrix}\{x\}+\begin{bmatrix} c_1+c_2 & -c_2 \\ -c_2 & c_2+c_3 \end{bmatrix}\{\dot{x}\}=\{f\}$$

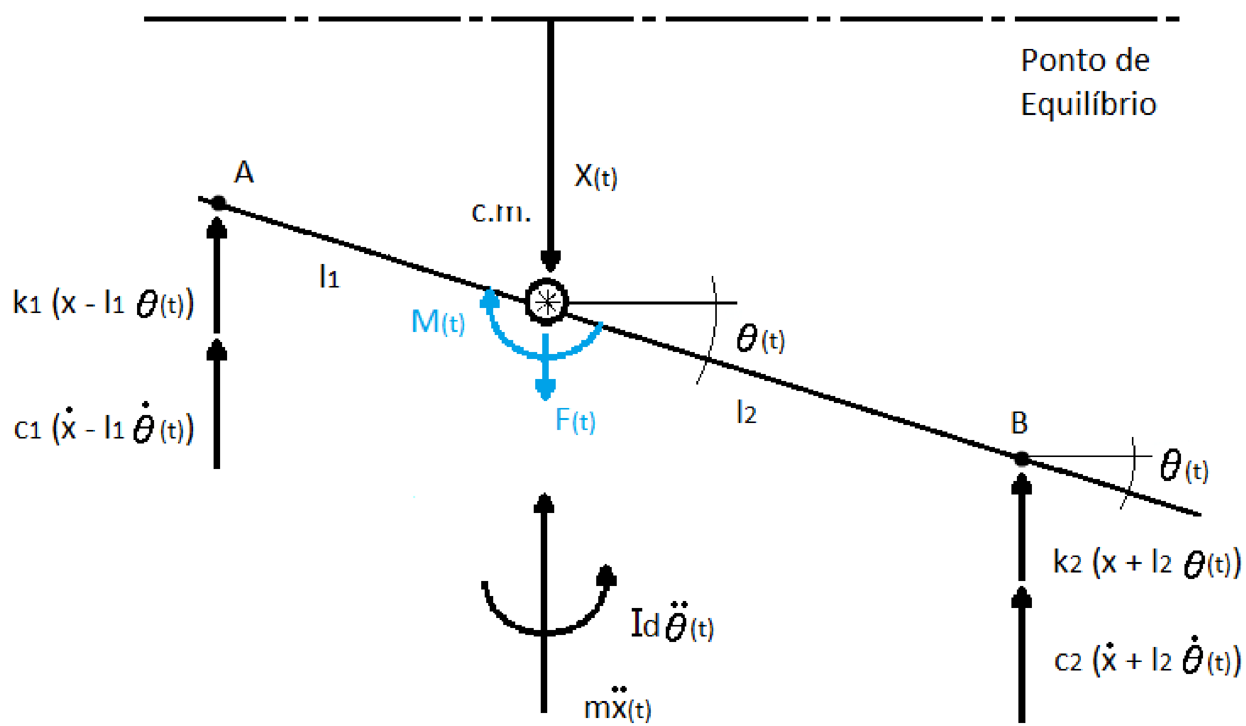
Sistemas de Múltiplos Graus de Liberdade

O modelo de dois graus de liberdade pode representar, simplificadamente, uma suspenção de um veículo, um eixo de um rotor, entre outras aplicações:



Sistemas de Múltiplos Graus de Liberdade

Seu diagrama de corpo livre fica:



Sistemas de Múltiplos Graus de Liberdade

e aplicando a 2ª Lei de Newton:

$$f(t) - k_1(x - l_1\theta) - c_1(\dot{x} - l_1\dot{\theta}) - k_2(x + l_2\theta) - c_2(\dot{x} - l_2\dot{\theta}) = m\ddot{x}(t)$$

$$k_1(x - l_1\theta) + c_1(\dot{x} - l_1\dot{\theta})l_1 + M(t) - k_2(x + l_2\theta)l_2 - c_2(\dot{x} - l_2\dot{\theta})l_2 = I_d\ddot{\theta}(t)$$

Na forma matricial

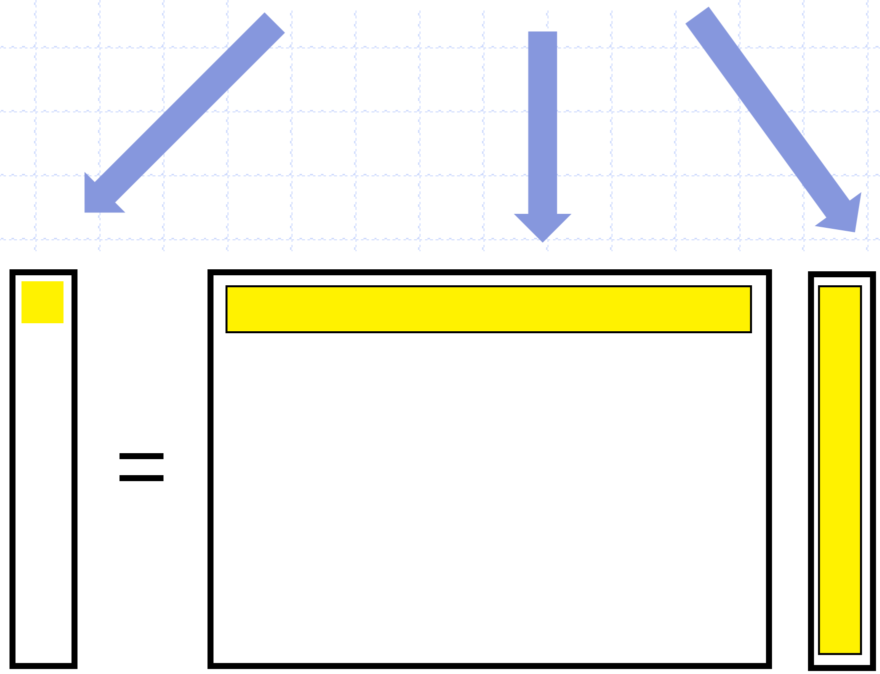
$$\begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & I_d \end{bmatrix}\{\ddot{q}\} + \begin{bmatrix} c_1 + c_2 & c_2 l_2 - c_1 l_1 \\ c_2 l_2 - c_1 l_1 & c_2 l_2^2 + c_1 l_1^2 \end{bmatrix}\{\dot{q}\} + \begin{bmatrix} k_1 + k_2 & k_2 l_2 - k_1 l_1 \\ k_2 l_2 - k_1 l_1 & k_2 l_2^2 + k_2 l_1^2 \end{bmatrix}\left\{q\right\} = \{f(t)\}$$

$$\{q\} = \begin{Bmatrix} x(t) \\ \theta(t) \end{Bmatrix} \qquad \{f(t)\} = \begin{Bmatrix} f(t) \\ M(t) \end{Bmatrix}$$

Coeficientes de Influência

Rigidez: A força de reação inserida pelas propriedades elásticas é dada por:

$$Q_i = \sum_{j=1}^{n} k_{ij} \; q_j$$



Coeficientes de Influência

Supondo que:

$$q_s = 1 \quad e \quad q_{j \neq s} = 0$$

$$\boxed{Q_i = k_{is}}$$

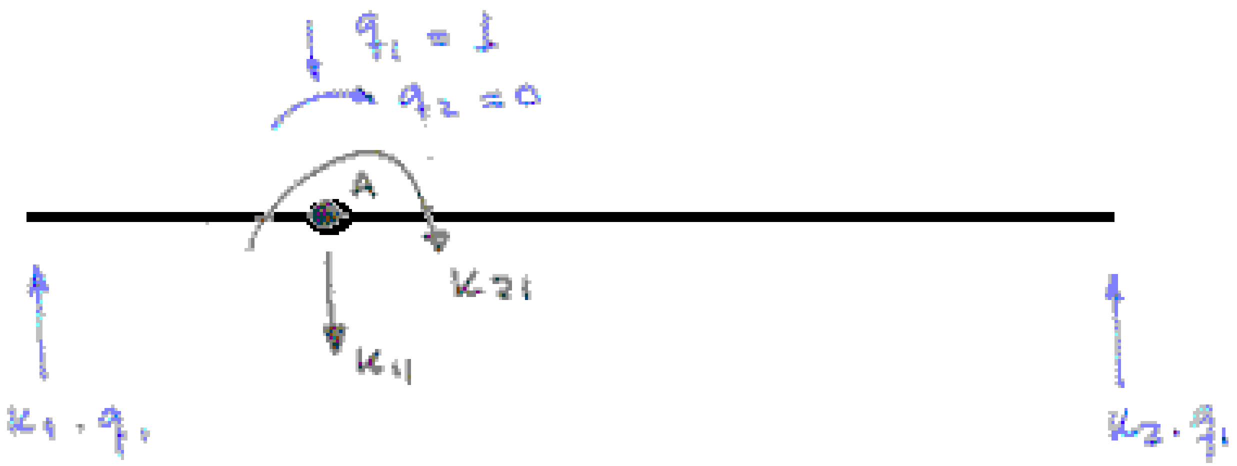
Com isto sempre é possível achar a matriz de rigidez K.

O mesmo conceito é aplicado às matrizes C e M. Nesses casos, utilizamos as coordenadas de velocidade, $\dot{q}$, e aceleração, $\ddot{q}$, ao invés do deslocamento.

◆ Coeficientes de Influência – Aplicação

Usando este método no exemplo anterior e fazendo

$$q_1 = 1 \quad e \quad q_2 = 0$$



Coeficientes de Influência – Aplicação 01

Para o equilibrio, os somatórios de forças e momentos são dados por:

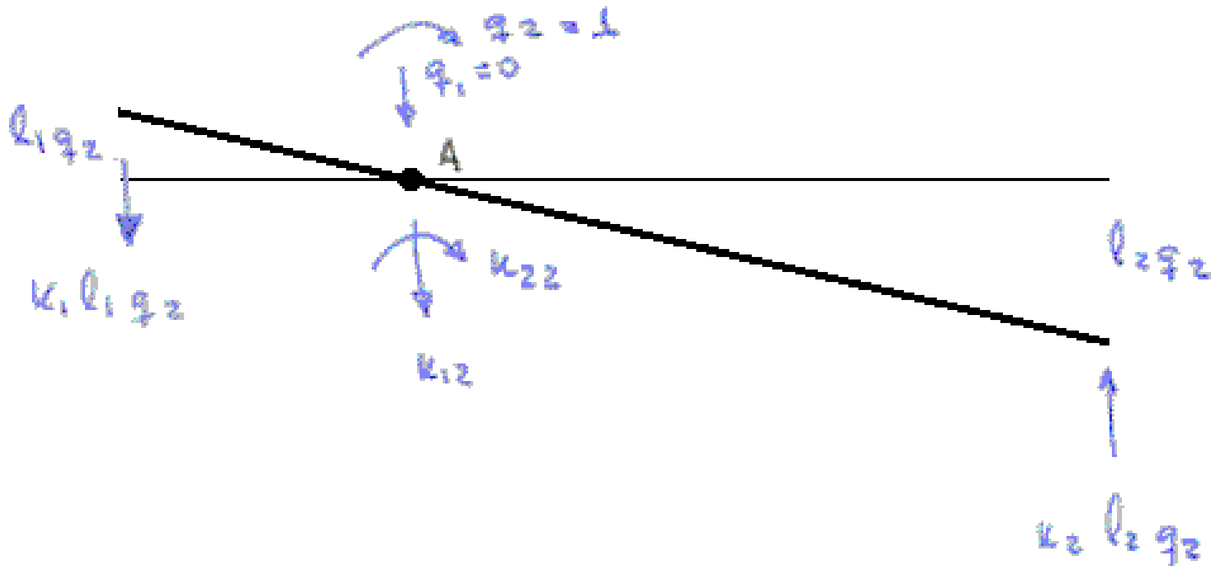
$$\sum F_{vertical} = 0 \Rightarrow -k_1 - k_2 + k_{11} = 0 \Rightarrow k_{11} = k_1 + k_2$$

$$\sum M_A = 0 \Rightarrow k_1 l_1 - k_2 l_2 + k_2 l_1 = 0 \Rightarrow k_{21} = k_2 l_2 - k_1 l_1$$

Com isto, encontramos a primeira coluna da matriz K

Coeficientes de Influência – Aplicação 01

$$q_2 = 1 \quad e \quad q_1 = 0$$



$$\sum F_{vertical} = 0 \Rightarrow -k_{12} - k_1 l_1 .1 - k_2 l_2 .1 = 0 \Rightarrow k_{12} = k_2 l_2 + k_1 l_1$$

$$\sum M_A = 0 \Rightarrow k_1 l_1 l_1 + k_2 l_2 l_2 + k_{22} = 0 \Rightarrow k_{22} = k_1 l_1^2 - k_2 l_2^2$$

Coeficientes de Influência – Aplicação 01

Então:

$$K = \begin{bmatrix} k_1 + k_2 & k_2 l_2 - k_1 l_1 \\ k_2 l_2 - k_1 l_1 & k_2 l_2^2 + k_1 l_1^2 \end{bmatrix}$$

Analogamente, fazendo:

$$1)\quad \dot{q}_1 = 1 \quad e \quad \dot{q}_2 = 0$$

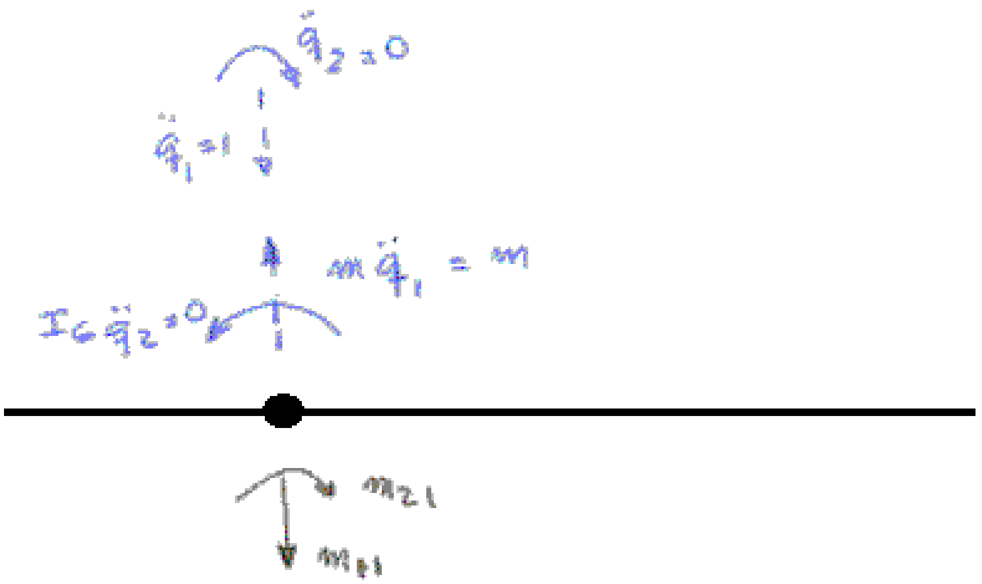
$$2)\quad \dot{q}_2 = 1 \quad e \quad \dot{q}_1 = 0$$

$$C = \begin{bmatrix} c_1 + c_2 & c_2 l_2 - c_1 l_1 \\ c_2 l_2 - c_1 l_1 & c_2 l_2^2 + c_1 l_1^2 \end{bmatrix}$$

Coeficientes de Influência – Aplicação 01

Finalmente, para a matriz M

$$\ddot{q}_1 = 1 \quad e \quad \ddot{q}_2 = 0$$

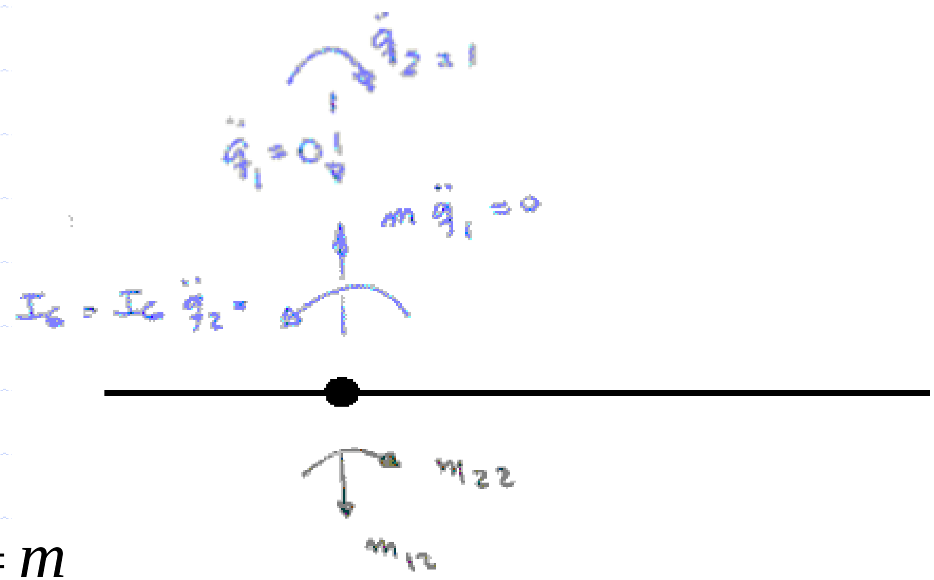


$$\sum F_v = m_{11} - m\ddot{q}_1 = 0 \Rightarrow m_{11} = m$$

$$\sum M_A = m_{21} = 0 \Rightarrow m_{21} = 0$$

Coeficientes de Influência – Aplicação 01

$$\ddot{q}_2 = 1 \quad e \quad \ddot{q}_1 = 0$$



$$\sum F_v = m_{12} = 0 \Rightarrow m_{12} = m$$

$$\sum M_A = 0 \Rightarrow m_{22} - I_G \ddot{q}_2 = m_{22} - I_G = 0 \Rightarrow m_{22} = I_G$$

$$M = \begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & I_G \end{bmatrix}$$

Coeficientes de Influência – Aplicação 01

Então, a equação de movimento, em notação matricial simplificada, é:

$$M\{\ddot{q}(t)\}+C\{\dot{q}(t)\}+K\{q(t)\}=f(t)$$

onde

$$M=\begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & I_G \end{bmatrix},\quad C=\begin{bmatrix} c_1+c_2 & c_2l_2-c_1l_1 \\ c_2l_2-c_1l_1 & c_2l_2^2+c_1l_1^2 \end{bmatrix}\ e\ \ K=\begin{bmatrix} k_1+k_2 & k_2l_2-k_1l_1 \\ k_2l_2-k_1l_1 & k_2l_2^2+k_1l_1^2 \end{bmatrix}$$

Coeficientes de Influência – Método da Flexibilidade

Em sistemas mecânicos, o cálculo da matriz de rigidez, K, via coeficientes de influência, necessita da formação de um sistema de equações.

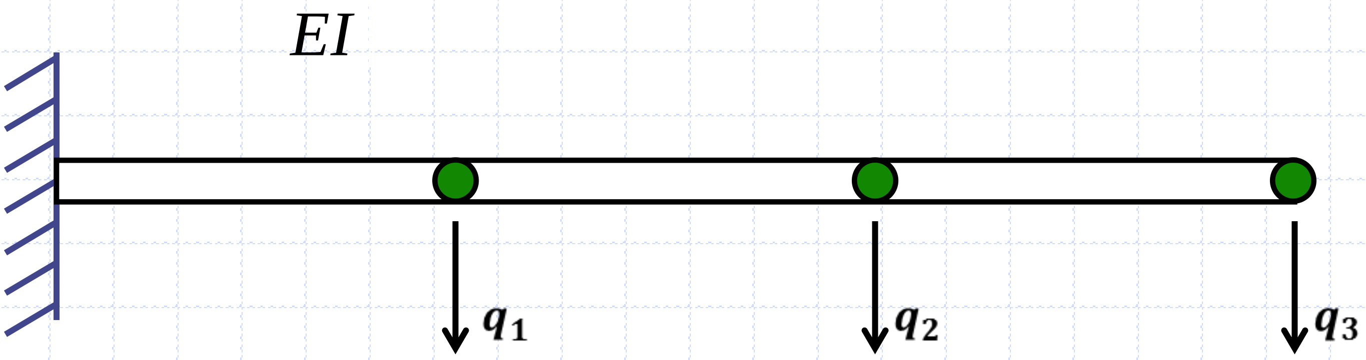
Em geral. Isto gera altos custos computacionais. De outra forma, K pode ser calculada através da inversa da matriz flexibilidade, A.

$$AF = AKq \qquad AF = q$$

$$q_j = \sum_{i=1}^{n} a_{ji} f_i = \sum_{i=1}^{n} a_{ji} f_i$$

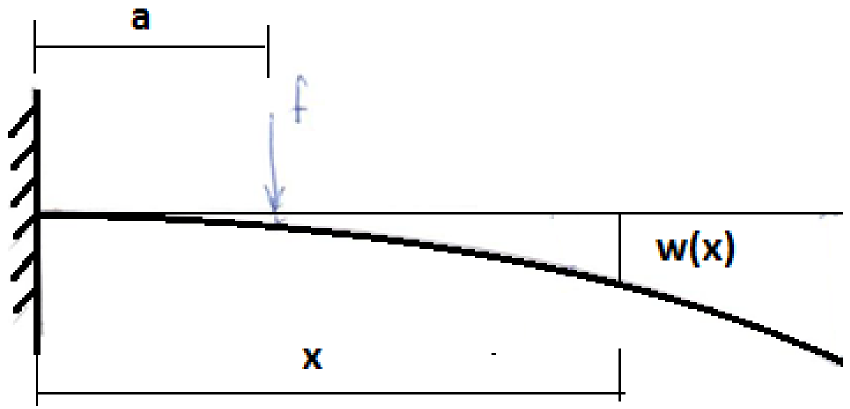
Coeficientes de Influência – Flexibilidade

Considerando o seguinte caso:



Coeficientes de Influência – Flexibilidade

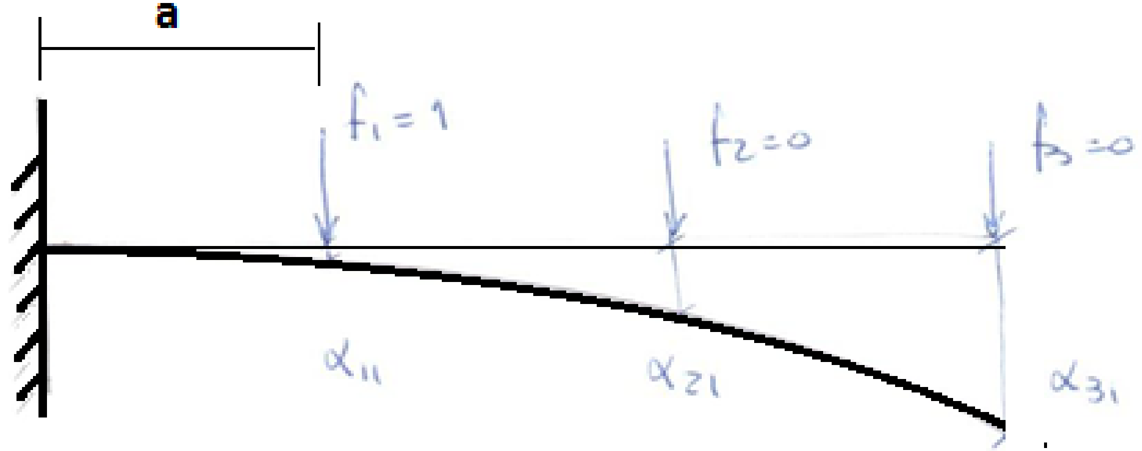
Como se sabe, a equação da elástica para estes casos é



$$y(x) = \frac{1}{EI}\left[\frac{1}{6}(x-a)^3 \mu(x-a) - \frac{x^3}{6} + a\frac{x^2}{2}\right]$$

Coeficientes de Influência – Flexibilidade

$$a)\quad f_1 = 1 \ \ e \ \ f_{j \neq s} = 0$$



Coeficientes de Influência – Flexibilidade

A primeira coluna da matriz de flexibilidade pode ser obtida:

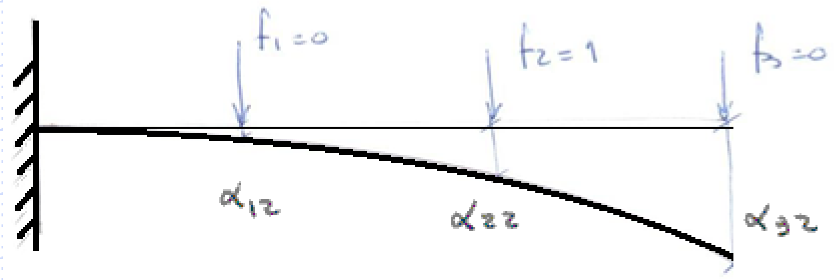
$$a_{11}\left(x=\frac{L}{3}\right)=\frac{1}{EI}\left[-\frac{\left(L/3\right)^3}{6}+\frac{L}{3}\frac{\left(L/3\right)^2}{2}\right]=\frac{1}{EI}\left(\frac{L^3}{81}\right)$$

$$a_{21}\left(x=\frac{2}{3}L\right)=\frac{1}{EI}\left[\frac{1}{6}\left(\frac{2L}{3}\right)^3-\left(\frac{2L}{3}\right)^3\frac{1}{6}+\frac{L}{3}\left(\frac{\left(2L/3\right)^2}{2}\right)\right]=\frac{L^3}{EI}\frac{5}{162}$$

$$a_{31}(x=L)=\frac{1}{EI}\left[\frac{1}{6}\left(\frac{2L}{3}\right)^3-\frac{L^3}{6}+\frac{L}{3}\frac{L^2}{2}\right]=\frac{L^3}{EI}\frac{4}{81}$$

Coeficientes de Influência – Flexibilidade

$b)\quad f_2 = 1 \; e \; f_{j \neq s} = 0$



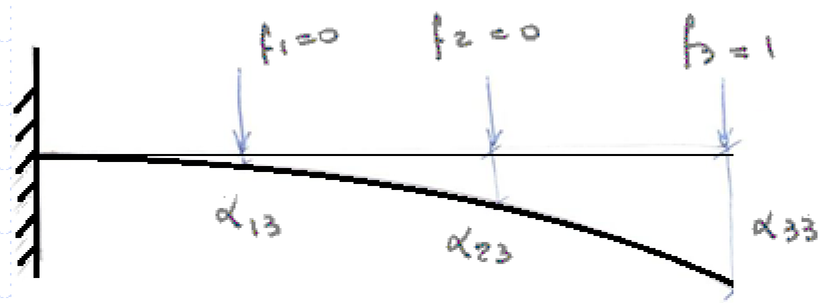
$$a_{12}\left(x=\frac{L}{3}\right)=\frac{1}{EI}\left[-\frac{\left(L/3\right)^3}{6}+\frac{2L}{3}\frac{\left(L/3\right)^2}{2}\right]=\frac{1}{EI}L^3\frac{5}{162}$$

$$a_{22}\left(x=\frac{2}{3}L\right)=\frac{1}{EI}\left[-\frac{1}{6}\left(\frac{2L}{3}\right)^3+\frac{2L}{3}\frac{\left(2L/3\right)^2}{2}\right]=\frac{1}{EI}L^3\left(\frac{8}{81}\right)$$

$$a_{32}\left(x=L\right)=\frac{1}{EI}\left[\frac{1}{6}\left(\frac{L}{3}\right)^3-\left(\frac{L}{3}\right)^3+\frac{2L}{3}\frac{L^2}{2}\right]=\frac{1}{EI}L^3\left(\frac{14}{81}\right)$$

Coeficientes de Influência – Flexibilidade

$b)\ \ f_3 = 1 \ \ e \ \ f_{j\neq s} = 0$



$$a_{13}\left(x=\frac{L}{3}\right)=\frac{1}{EI}\left[-\frac{\left(L/3\right)^3}{6}+L\frac{\left(L/3\right)^2}{2}\right]=\frac{1}{EI}L^3\frac{4}{81}$$

$$a_{23}\left(x=\frac{2}{3}L\right)=\frac{1}{EI}\left[-\frac{1}{6}\left(\frac{2L}{3}\right)^3+L\frac{\left(2L/3\right)^2}{2}\right]=\frac{1}{EI}L^3\left(\frac{14}{81}\right)$$

$$a_{33}(x=L)=\frac{1}{EI}\left[-\frac{L^3}{6}+L\frac{L^2}{2}\right]=\frac{1}{EI}L^3\left(\frac{1}{3}\right)$$

Coeficientes de Influência – Flexibilidade

Assim, as matrizes M e K são

$$M = \begin{bmatrix} m_e & 0 & 0 \\ 0 & m_e & 0 \\ 0 & 0 & m_e/2 \end{bmatrix}$$

$$A = \frac{L^3}{EI}\begin{bmatrix} 1/81 & 5/162 & 4/81 \\ 5/162 & 8/81 & 14/81 \\ 4/81 & 14/81 & 1/3 \end{bmatrix}$$

$$K = A^{-1}$$

$$M_{3\times3}\ddot{q}(t)_{3\times1} + A^{-1}_{3\times3}q(t)_{3\times1} = f(t)_{3\times1}$$

Problema de Autovalores

- Conforme estudado nos métodos anteriores, a equação de movimento de um sistema de múltiplos graus de liberdade é dada por:

$$M\ \ddot{q}(t)+C\ \dot{q}(t)+K\ q(t)=f(t)$$

- Para obter a solução de equação diferencial homogênea, $f(t)=0$

$$M\ \ddot{q}(t)+C\ \dot{q}(t)+K\ q(t)=0$$

- Supondo que a solução é dada por

$$q(t)=\phi\ e^{i\Omega t}$$

Problema de Autovalores – Sistema não-amortecido / Amortecimento proporcional

- No sistema não-amortecido ou com amortecimento proporcional, substituindo a solução na equação do sistema, tem-se

$$\left[-\Omega^2 M + K\right]\phi\, e^{i\Omega t} = 0$$

- Ou

$$\left[-\Omega^2 M + K\right]\phi = 0$$

- Sendo $\lambda = \Omega^2$, chega-se ao seguinte problema de autovalores

$$\boldsymbol{K}\,\phi_i = \lambda_i \boldsymbol{M}\,\phi_i$$

$\lambda_i \Rightarrow$ i-ésimo autovalor

$\phi_i \Rightarrow$ i-ésimo autovetor associado

$\sqrt{\lambda_i} = \Omega_i$ → frequência natural do sistema não amortecido

ϕ_i → i-ésimo modo de vibrar.

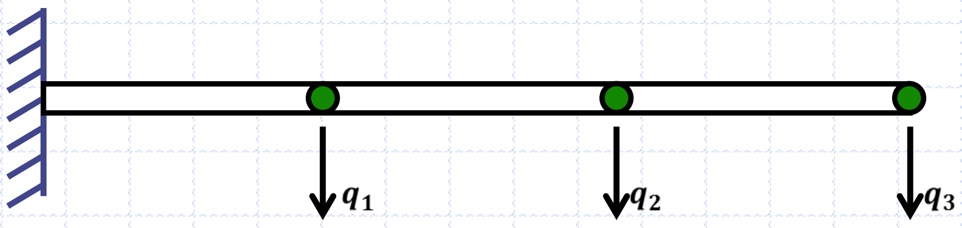
Problema de Autovalores – Sistema não-amortecido / Amortecimento proporcional

- As frequências naturais determinam, para o sistema não amortecido (ou com amortecimento proporcional), as frequências para as quais o sistema possui uma impedância muito baixa ou nula. Ao ser excitado nessa frequência, o sistema responderá com grande amplitude de vibração.

- Os modos de vibrar representam a forma de vibrar do sistema para cada frequência natural do mesmo.

- Quando a frequência de excitação coincide com a alguma das frequências naturais, o sistema amplificará sua vibração, predominantemente na forma de vibrar característica associada á frequência natural excitada.

Problema de Autovalores – Sistema não-amortecido / Amortecimento proporcional



$$\Lambda = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & \\ & \lambda_2 & \\ & & \lambda_3 \end{bmatrix} \quad \Phi = \begin{bmatrix} \phi_{11} & \phi_{12} & \phi_{13} \\ \phi_{21} & \phi_{22} & \phi_{23} \\ \phi_{31} & \phi_{32} & \phi_{33} \end{bmatrix} \Rightarrow$$

No Matlab

$$K\phi = \lambda M\phi$$

$$[\Phi, \Lambda] = eig(K, M)$$

Ortogonalidade dos Modos – Amortecimento proporcional

- Sendo os autovalores λ_i e λ_j distindos entre si, tem-se:

$$\lambda_i = \Omega_i^2 \Rightarrow \Omega_i^2 M\phi_i = K\phi_i$$

$$\lambda_j = \Omega_j^2 \Rightarrow \Omega_j^2 M\,\phi_j = K\phi_j$$

E premultiplicando as equações por ϕ_j^T e ϕ_i^T, respectivamente:

$$\Omega_i^2\ \phi_j^T\ M\ \phi_i = \phi_j^T\ K\ \phi_i$$

$$\Omega_j^2\ \phi_i^T\ M\ \phi_j = \phi_i^T\ K\ \phi_j$$

- Considerando simetria para M e K, mostra-se que:

$$\phi_i^T\ M\ \phi_j = \phi_j^T\ M\ \phi_i$$

$$\phi_i^T\ K\ \phi_j = \phi_j^T\ K\ \phi_i$$

Ortogonalidade dos Modos – Amortecimento proporcional

- Então,

$$\left(\Omega_i^2 - \Omega_j^2\right)\phi_j^T \; M\,\phi_i = 0$$

- Com isso, se $i \neq j$ → $\Omega_i \neq \Omega_j$

$$\phi_j^T M \;\phi_i = 0 \qquad \phi_j^T K \;\phi_i = 0$$

- Isto é, os vetores ϕ_i e ϕ_j são <u>ortogonais</u> em relação a M e K.

- Se $i = j$

$$\phi_j^T M \;\phi_j = m_j \qquad \phi_j^T K \;\phi_j = k_j$$

Ortogonalidade dos Modos – Amortecimento proporcional

- Matricialmente

$$\begin{bmatrix} \ddots & & \\ & m_i & \\ & & \ddots \end{bmatrix} = \Phi^T M \, \Phi \qquad \begin{bmatrix} \ddots & & \\ & k_i & \\ & & \ddots \end{bmatrix} = \Phi^T K \, \Phi$$

- Ortogonalizando os autovetores ϕ_i por $\sqrt{m_i}$, ou seja

$$\left[\frac{\phi_1}{\sqrt{m_1}} ; \ \frac{\phi_2}{\sqrt{m_2}} ; \ldots ; \frac{\phi_n}{\sqrt{m_n}} \right] = \Phi_o$$

- Obtêm-se, então:

$$\Phi_o^T M \ \Phi_o = [I] \qquad \Phi_o^T K \ \Phi_o = \begin{bmatrix} \ddots & & \\ & \lambda_i & \\ & & \ddots \end{bmatrix} = \Lambda$$

Ortogonalidade dos Modos – Amortecimento proporcional

- Como o amortecimento C é proporcional → $C = \alpha M + \beta K$
- Assim,

$$\Phi_o^T C\, \Phi_o = \begin{bmatrix} \ddots & & \\ & c_i/m_i & \\ & & \ddots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \ddots & & \\ & 2\xi_i\Omega_i & \\ & & \ddots \end{bmatrix} = \Gamma$$

onde ξ_i e Ω_i , são a razão de amortecimento e a frequência natural, respectivamente.

- Devido os ϕ_i serem ortogonais em relação a M, C e K (para amortecimento proporcional), estes vetores podem ser usados como uma base para achar a solução do sistema.

Resposta no domínio da frequencia – Amortecimento proporcional

- Supõe-se que a solução do sistema é dada por:

$$\{q(t)\} = \Phi\{p(t)\}$$

- Esta eq. representa uma transformação de coordenadas do espaço de configuração para o espaço modal através da matriz Φ
  - $\{q(t)\} \rightarrow$ coordenadas generalizadas no espaço de configuração
  - $\{p(t)\} \rightarrow$ coordenadas generalizadas principais no espaço modal do sistema;

- Aplicando esta eq. na equação do movimento e pré multiplicando tudo por Φ^T

$$[I]\ddot{p}(t) + [\Gamma]\dot{p}(t) + [\Lambda]p(t) = \Phi^T f(t)$$

Resposta no domínio da frequencia – Amortecimento proporcional

- Aplicando a Tranformada de Fourier na eq. anterior, tem-se

$$\left[-\Omega^2 I + i\Omega\Gamma + \Lambda\right]P(\Omega) = \Phi^T F(\Omega)$$

- Como $\quad Q(\Omega) = \Phi\, P(\Omega)$

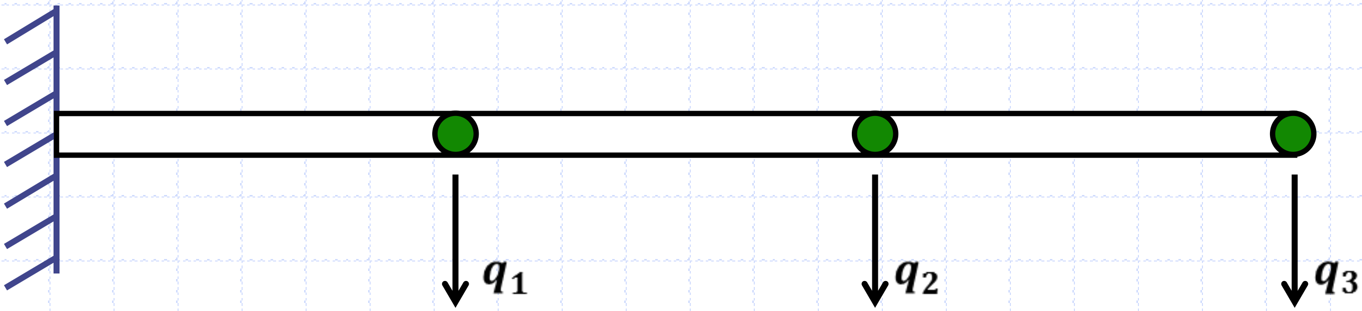
- A resposta do sistema será dada por

$$\boxed{Q(\Omega) = \Phi\underbrace{\left[-\Omega^2 I + i\Omega\Gamma + \Lambda\right]^{-1}\Phi^T}_{FRF \Rightarrow H(\Omega)} F(\Omega)}$$

$$\boxed{FRF \Rightarrow H(\Omega)}$$

Coeficientes de Influência – Flexibilidade

Exercise13_coeficiente_of_influence.m



2. TEORIA BÁSICA DE VIBRAÇÕES

SISTEMAS CONTÍNUOS

Sistemas Contínuos

Sistemas relativos a corpos com massa e elasticidade distribuídas continuamente;

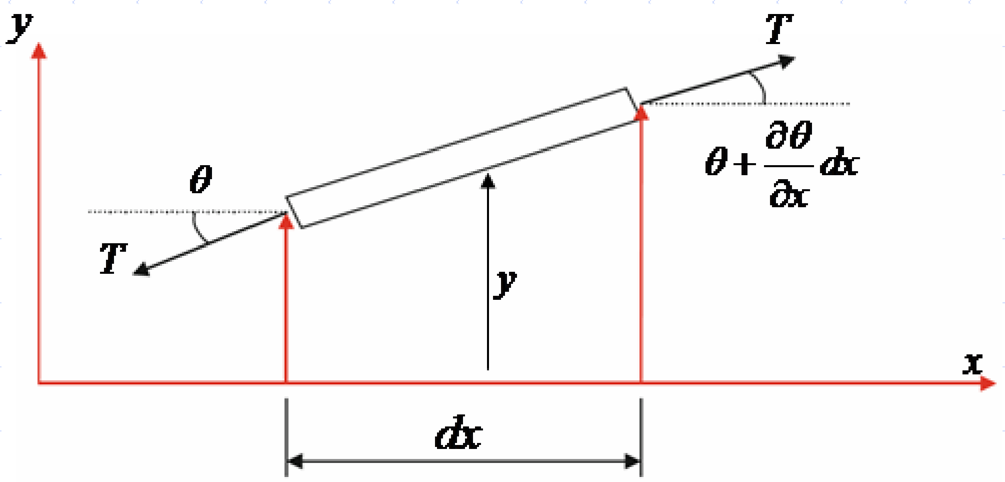
Corpos homogêneos e isotrópicos → Lei de Hooke;

Número infinito de graus de liberdade.

Sistemas Contínuos – Corda Vibratória

Uma corda flexível de massa ρ por unidade de comprimento é estendida sob tensão *T*. Supondo que seja pequena a deflexão lateral y da corda, a mudança em tensão com deflexão é insignificante e pode ser ignorada. Assim,

$$T\left(\theta+\frac{\partial\theta}{\partial x}dx\right)-T\theta=\rho dx\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$$



Sistemas Contínuos – Corda Vibratória

Supondo pequenas deflexões e inclinações, a eq. de movimento na direção y:

$$\frac{\partial \theta}{\partial x} = \frac{\rho}{T} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$$

Sabendo que a inclinação da corda é $\theta = \partial y / \partial x$ eq. acima se torna:

$$\boxed{\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}}$$

onde $c = \sqrt{T/\rho}$ é a velocidade de propagação da onda longo da corda.

Sistemas Contínuos – Corda Vibratória

Um método de resolver equações diferenciais parciais é o da separação de variáveis. Neste método a solução é admitida na forma

$$y(x,t) = Y(x)G(t)$$

Assim, substituindo a solução proposta na equação diferencial, tem-se

$$\frac{1}{Y}\frac{d^2Y}{dx^2} = \frac{1}{c^2}\frac{1}{G}\frac{d^2G}{dt^2}$$

Considerando que o lado esquerdo desta equação é independente de t, e que o lado direito é independente de x, cada lado deve ser igual a uma constante.

Sistemas Contínuos – Corda Vibratória

Considerando constante $(\omega/c)^2$, obtemos duas equações diferenciais ordinárias

$$\frac{d^2Y}{dx^2}+\left(\frac{\omega}{c}\right)^2 Y=0 \qquad \frac{d^2G}{dt^2}+\omega^2 G=0$$

Com as soluções gerais:

$$Y = A\sin\frac{\omega}{c}x + B\cos\frac{\omega}{c}x \qquad G = C\sin\omega t + D\cos\omega t$$

As constantes arbitrárias A, B, C e D dependem das condições de contorno e iniciais, respectivamente.

Sistemas Contínuos – Corda Vibratória

Por exemplo, se a corda é estendida entre dois pontos fixos distanciados de l, as condições de contorno são y(0, t) = y(l, t) = 0. A condição de y(0, t) = 0 vai exigir que B = 0, de modo que a solução aparecerá como

$$y(x,t) = (C \sin \omega t + D \cos \omega t) \sin \frac{\omega}{c} x$$

A condição y(l, t) = 0 conduz então à equação

$$\sin \frac{\omega l}{c} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\omega_n l}{c} = n\pi, \quad com \quad n = 1, 2, 3, \ldots.$$

sendo $\lambda = c/f$ é o comprimento de onda e *f* é a frequência de oscilação.

Sistemas Contínuos – Corda Vibratória

Cada *n* representa uma forma natural de vibrar com frequência natural determinada pela equação

$$f_n = \frac{n}{2l} c = \frac{n}{2l} \sqrt{\frac{T}{\rho}}, \qquad n = 1, 2, 3, \ldots$$

O forma característica de vibrar, autofunção, em cada frequência natural é dada por:

$$Y = \sin n \pi \frac{x}{l}$$

Sistemas Contínuos – Corda Vibratória

No caso mais geral de vibração livre, iniciada através de alguma condição inicial qualquer, a solução pode ser obtida através de uma combinação lineal dos modos ou autofunções

$$y(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}\left(C_n \sin \omega_n t + D_n \cos \omega_n t\right) \ \sin \frac{n \pi x}{l}$$

$$\omega_n = \frac{n \pi c}{l}$$

O C_n e o D_n podem ser calculados adaptando-se esta equação às condições iniciais de

$$y(x,0) \quad e \quad \dot{y}(x,0)$$

Sistemas Contínuos – Corda Vibratória – Exemplo

Uma corda uniforme de comprimento *l* é fixada nas extremidades e estendida sob a tensão *T*. Se a corda é deslocada para um perfil arbitrário *y(x,0)* e solta, determinar C_n e D_n

$$y(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(C_n \sin\omega_n t + D_n \cos\omega_n t\right) \sin\frac{n\pi x}{l}$$

condições iniciais

$$\boxed{y(x,0) = y0} \qquad \boxed{\dot{y}(x,0) = 0}$$

Sistemas Contínuos – Corda Vibratória – Exemplo

SOLUÇÃO: Para t = 0, o deslocamento e velocidade são

$$y(x,0)=\sum_{n=1}^{\infty} D_n \sin \frac{n\pi x}{l} \qquad \dot{y}(x,0)=\sum_{n=1}^{\infty} \omega_n C_n \sin \frac{n\pi x}{l}=0$$

Multiplicando cada equação por sin $k\pi x / l$ e integrando de x = 0 a x = l todos os termos do lado direito serão zero, exceto o termo n = k. Assim, chegamos ao resultado

$$D_k = \frac{2}{l}\int_o^l y(x,0)\sin\frac{k\pi x}{l}\,dx \qquad C_k = 0$$

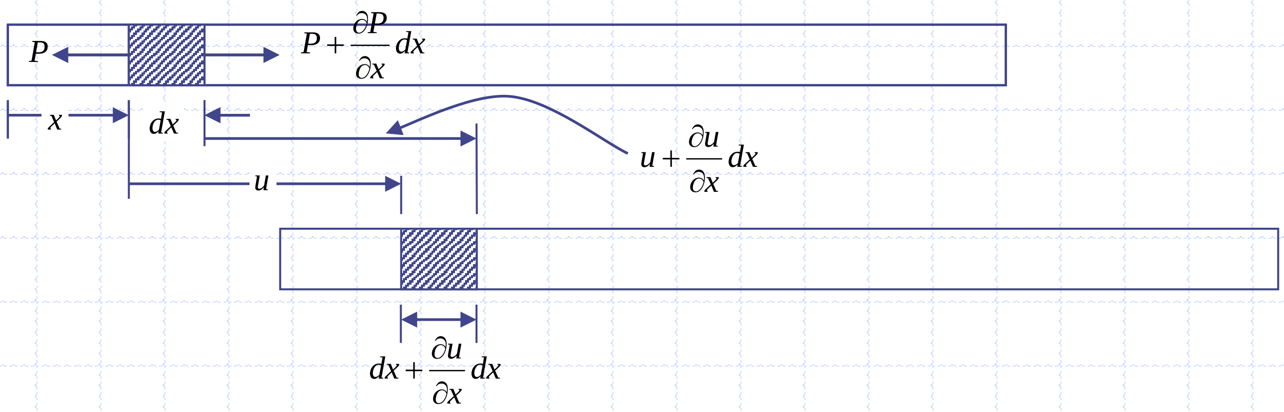
$$k = 1,\ 2,\ 3,\ldots$$

Sistemas Contínuos – Vibração Longitudinal de Barras

Supomos uma barra fina e uniforme ao longo do seu comprimento. Em razão de forças axiais haverá deslocamento.

$$u(x,t)$$

Consideremos um elemento diferencial da barra de comprimento dx



Sistemas Contínuos – Vibração Longitudinal de Barras

Pela lei de Hooke, a relação entre a unidade de força e a unidade de alongamento é igual ao módulo de elasticidade E

$$E\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{P}{A}$$

onde A é a área da seção transversal da barra. Diferenciando em relação a x

$$AE\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{\partial P}{\partial x}$$

Aplicamos a segunda lei de Newton

$$\frac{\partial P}{\partial x}dx=\rho A dx\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

onde ρ é a densidade da barra em libras por unidade de volume.

Sistemas Contínuos – Vibração Longitudinal de Barras

Eliminando $\partial P/\partial x$, obtemos a equação diferencial parcial

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \left(\frac{E}{\rho}\right)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

Ou, de forma compacta

$$\boxed{\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2}\,\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}}$$

A velocidade de propagação do deslocamento ou onda de tensão na barra é igual,

$$c = \sqrt{E/\rho}$$

Sistemas Contínuos – Vibração Longitudinal de Barras

Novamente, usando o método de separação de variáveis, a solução proposta será

$$u(x,t) = U(x)\,G(t)$$

Resultando em duas equações diferenciais ordinárias:

$$U(x) = A\sin\frac{\omega}{c}x + B\cos\frac{\omega}{c}x$$

e

$$G(t) = C\sin\omega t + D\cos\omega t$$

Sistemas Contínuos – Vibração Longitudinal de Barras

Tabela com as <u>condições de contorno</u> de uma barra longitudinal

Case	Boundary condition left, $x = 0$	Boundary condition right, $x = l$
Free end	$\frac{\partial u}{\partial x} = 0$	$\frac{\partial u}{\partial x} = 0$
Fixed end	$u(0, t) = 0$	$u(l, t) = 0$
End spring	$AE \frac{\partial u}{\partial x} = ku$	$AE \frac{\partial u}{\partial x} = -ku$
End mass	$AE \frac{\partial u}{\partial x} = m \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$	$AE \frac{\partial u}{\partial x} = -m \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$
End damper	$AE \frac{\partial u}{\partial x} = c \frac{\partial u}{\partial t}$	$AE \frac{\partial u}{\partial x} = -c \frac{\partial u}{\partial t}$

Sistemas Contínuos – Vibração Longitudinal de Barras – Exemplo

Calculo das frequências naturais e modos de vibrar de uma barra livre no espaço.

SOLUÇÃO: Numa barra livre-livre, as condições de contorno são

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 0, \text{ em } x = 0, \text{ e } x = l$$

São portanto as seguintes as duas equações correspondentes às condições de contorno acima

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{x=0} = A\frac{\omega}{c}\left(C\sin\omega t + D\cos\omega t\right) = 0$$

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{x=l} = \frac{\omega}{c}\left(A\cos\frac{\omega l}{c} - B\sin\frac{\omega l}{c}\right)\left(C\sin\omega t + D\cos\omega t\right) = 0$$

Sistemas Contínuos – Vibração Longitudinal de Barras – Exemplo

Considerando que essas equações devem valer para qualquer tempo t, A deve ser zero na primeira equação. Uma vez que B deve tomar qualquer valor, a segunda equação é satisfeita quando

$$\sin\frac{\omega l}{c} = 0 \quad \text{ou} \quad \frac{\omega_n l}{c} = \omega_n l\sqrt{\frac{\rho}{E}} = \pi, 2\pi, 3\pi, \ldots, n\pi$$

Desta forma, a frequência de vibração é dada por

$$\omega_n = \frac{n\pi}{l}\sqrt{\frac{E}{\rho}}, \qquad f_n = \frac{n}{2l}\sqrt{\frac{E}{\rho}}$$

onde n representa a ordem do modo.

Sistemas Contínuos – Vibração Longitudinal de Barras – Exemplo

A forma característica de vibrar, modos naturais do sistema continuo, é dada por:

$$U(x) = A\sin\frac{\omega_n}{c}x + B\cos\frac{\omega_n}{c}x$$

Pode-se então escrever a solução para vibração livre de uma barra livre nas extremidades

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty}\cos\frac{n\pi}{l}x\left(C\sin\left[\left(\frac{n\pi}{l}\sqrt{\frac{E}{\rho}}\right)t\right] + D\cos\left[\left(\frac{n\pi}{l}\sqrt{\frac{E}{\rho}}\right)t\right]\right)$$

onde C e D são as constantes de integração que dependem das condições iniciais.

NOTA: as freqüências naturais de uma corda, assim como as freqüências naturais de uma barra longitudinal, são múltiplos inteiros uma da outra.

Sistemas Contínuos – Vibração Torcional de Barras

A equação de movimento de uma barra em vibração torcional é semelhante àquela da vibração longitudinal de barras, discutida na seção anterior.

Fazendo-se a medida de x ao longo da barra, o ângulo de torção devido a um torque T, em qualquer comprimento dx da barra torcional, é

$$d\,\theta = \frac{T\,dx}{I_p G}$$

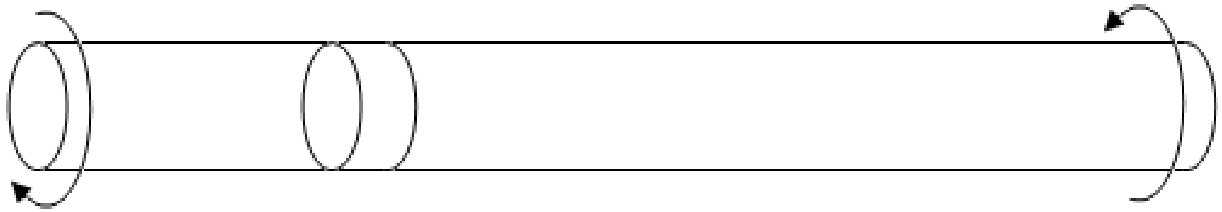
onde $I_p G$ é a rigidez torcional dada pelo produto do momento polar de segunda ordem I_p de área da seção transversal e o módulo de cisalhamento de elasticidade G.

Sendo T e $T + (\partial T/\partial x)dx$ o torque sobre as duas faces do elemento, o torque líquido torna-se

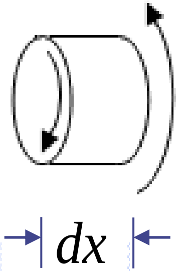
$$\frac{\partial T}{\partial x} d\,x = I_p G \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} d\,x$$

Sistemas Contínuos – Vibração Torcional de Barras

$$\frac{\partial T}{\partial x}dx = I_p G \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2}dx$$



$$T \qquad T + \frac{\partial T}{\partial x}dx$$



Torque T aplicado no elemento dx

Sistemas Contínuos – Vibração Torcional de Barras

Igualando este torque ao produto do momento de inércia da massa ($\rho I_p dx$) do elemento e a aceleração angular $\partial^2\theta/\partial t^2$, onde ρ é a densidade da barra em libras por unidade de volume, a equação diferencial de movimento toma-se

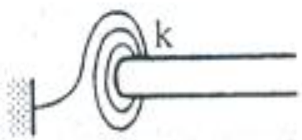
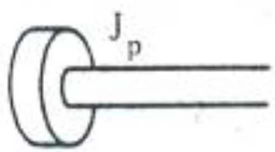
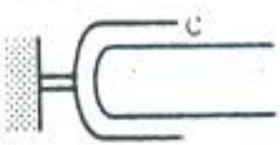
$$\rho I_p\, d\, x \frac{\partial^2\theta}{\partial t^2} = I_p G \frac{\partial^2\theta}{\partial x^2}\, dx, \qquad \frac{\partial^2\theta}{\partial t^2} = \left(\frac{G}{\rho}\right)\frac{\partial^2\theta}{\partial x^2}$$

Esta equação é da mesma forma que a vibração horizontal de barras onde θ e G/ρ substituem u e E/ρ, respectivamente. Resulta pois que por comparação

$$\theta = \left(A\sin\omega\sqrt{\frac{\rho}{G}}\,x + B\cos\omega\sqrt{\frac{\rho}{G}}\,x\right)\left(C\sin\,\omega\,t + D\cos\omega t\right)$$

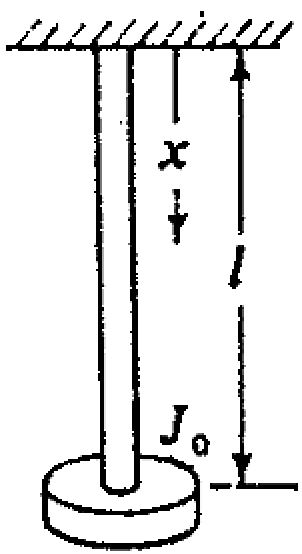
◆ Sistemas Contínuos – Vibração Torcional de Barras

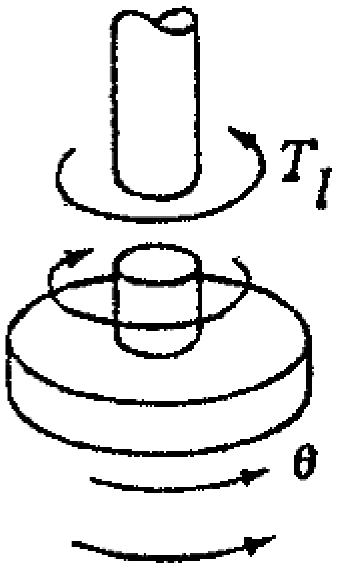
Tabela com as condições de contorno de uma barra longitudinal

Case		Boundary condition left, $x = 0$	Boundary condition right, $x = l$
Fixed end		$\theta(0, t) = 0$	$\theta(l, t) = 0$
Free end		$\frac{\partial\theta}{\partial x} = 0$	$\frac{\partial\theta}{\partial x} = 0$
Torsional spring		$I_P G \frac{\partial\theta}{\partial x} = k\theta$	$I_P G \frac{\partial\theta}{\partial x} = -k\theta$
Inertia J_P		$I_P G \frac{\partial\theta}{\partial x} = J_P \frac{\partial^2\theta}{\partial t^2}$	$I_P G \frac{\partial\theta}{\partial x} = -J_P \frac{\partial^2\theta}{\partial t^2}$
Torsional damper		$I_P G \frac{\partial\theta}{\partial x} = c \frac{\partial\theta}{\partial t}$	$I_P G \frac{\partial\theta}{\partial x} = -c \frac{\partial\theta}{\partial t}$

Sistemas Contínuos – Vibração Torcional de Barras – Exemplo

O tubo da sonda de um ponto de petróleo termina na sua extremidade inferior por uma barra contendo uma broca. Derivar a expressão para as freqüências naturais, supondo que o tubo da sonda seja uniforme e fixo na extremidade superior e que a barra e a broca sejam representadas por uma massa final com momento de inércia J_o.





Torque de Inércia $-J_0\left(\frac{\partial^2\theta}{\partial t^2}\right)_{x=l}$

Sistemas Contínuos – Vibração Torcional de Barras – Exemplo

SOLUÇÃO: A condição de contorno na extremidade superior é $x = 0$, $\theta = 0$, o que requer que B seja 0, conforme visto anteriormente.

Quanto à extremidade inferior, o torque sobre o eixo é devido ao torque de inércia do disco final, conforme representado pelo diagrama de corpo livre da Fig. 16.5. O torque de inércia do disco é $-J_0(\partial^2\theta/\partial t^2)_{x=l} = J_0\omega^2(\theta)_{x=l}$ ao passo que o torque do eixo é $T_l = GI_p(d\theta/dx)_{x=l}$. Igualando os dois, temos:

$$GI_p\left(\frac{d\theta}{dx}\right)_{x=1} = J_o\omega^2(\theta)_{x=1}$$

$$GI_p\omega\sqrt{\frac{\rho}{G}}\cos\omega\sqrt{\frac{\rho}{G}}\,l = J_o\omega^2\sin\omega\sqrt{\frac{\rho}{G}}\,l$$

Sistemas Contínuos – Vibração Torcional de Barras – Exemplo

$$tg\,\omega l\sqrt{\frac{\rho}{G}} = \frac{I_p}{\omega J_o}\sqrt{G\rho} = \frac{I_p \rho l}{g\,J_o \omega l}\sqrt{\frac{G}{\rho}}$$

$$tg\,\omega l\sqrt{\frac{\rho}{G}} = \frac{J_{barra}}{J_o\,\omega l}\sqrt{\frac{G}{\rho}}$$

Esta equação é da forma

$$\boxed{\beta\ tg\ \beta = \frac{J_{barra}}{J_o}, \qquad \beta = \omega l\sqrt{\frac{\rho}{G}}}$$

que pode ser resolvida graficamente ou por meio de tabelas.

Sistemas Contínuos – Vibração Torcional de Barras – Exemplo

Utilizando a equação de frequência desenvolvida, podemos determinar as duas primeiras frequências naturais de um tubo de sonda de um poço de petróleo. O tubo tem 500 pés de comprimento, sendo fixo na extremidade superior e em sua parte inferior existe um colar de perfuração com 120 pés de comprimento.

Valores médios do tubo e do colar $\Rightarrow$

Tubo da sonda:

Diâmetro externo = 4-1/2 pol

Diâmetro interno = 3,83 pol

I_p=0,00094 pés^4

l=5000 pés

Colar de perfuração:

Diâmetro externo = 7-5/8 pol

Diâmetro interno = 2,0 pol

J_o=0,244 x 120 pés = 29,3 lb pés s^2

$$J_{barra} = I_p\,\rho\,l = 0{,}00094 \text{ x } \frac{490}{32{,}2} \text{ x } 5000 = 71{,}4 \;\; pés\;\; lb\, s^2$$

Sistemas Contínuos – Vibração Torcional de Barras – Exemplo

SOLUÇÃO: A equação a ser resolvida é

$$\beta \, tg \, \beta = \frac{J_{barra}}{J_o} = 2{,}44$$

As raízes do polinômio acima dá como resultado β=1,135; 3,722...

$$\beta = \omega l \sqrt{\frac{\rho}{Gg}} = 5000\,\omega \sqrt{\frac{490}{12\text{x}106\text{x}122\text{x}32{,}2}} = 0{,}470\,\omega$$

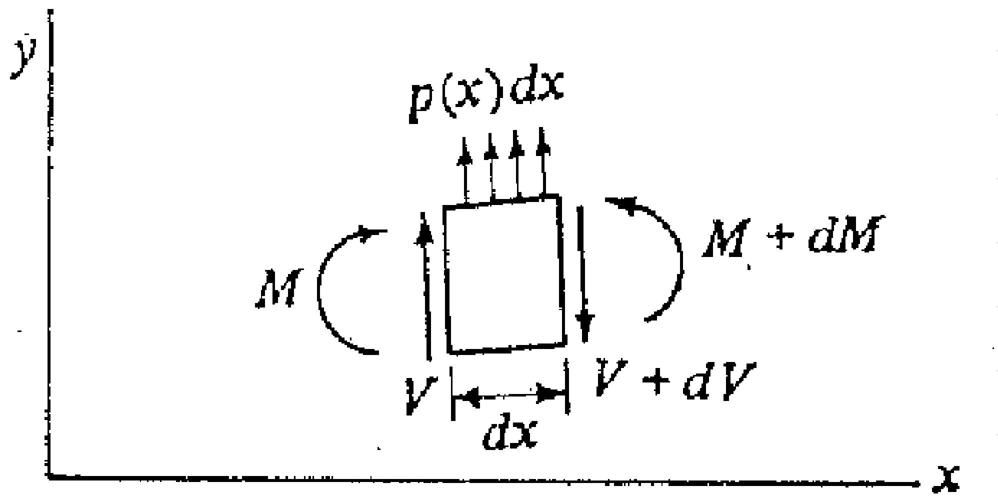
Resolvendo em relação a ω, encontram-se as 2 primeiras freqüências naturais

$$\boxed{\omega_1 = \frac{1{,}135}{0{,}470} = 2{,}41 \; rad/s = 0{,}384 \; cps}$$

$$\boxed{\omega_2 = \frac{3{,}722}{0{,}470} = 7{,}93 \; rad/s = 1{,}26 \; cps}$$

Sistemas Contínuos – Viga – Equação de Euler

Consideremos as forças e momentos atuando sobre um elemento da viga representada abaixo, a fim de determinar a equação diferencial para a vibração lateral de vigas.



Elemento de Viga de Euler-Bernoulli

Sistemas Contínuos – Viga – Equação de Euler

V e M são os momentos de cisalhamento e flexão, respectivamente e $p(x)$ representa a carga por unidade de comprimento da viga. Somando as forças na direção y

$$dV - p(x)\, dx = 0$$

Somando os momentos em relação a qualquer ponto sobre a face direita do elemento

$$d\,M - V\,dx - \frac{1}{2}\; p(x)(dx)^2 = 0$$

No processo de limite essas equações resultam nas seguintes relações importantes

$$\frac{dV}{d\,x} = p\,(x), \quad \frac{d\,M}{d\,x} = V$$

Sistemas Contínuos – Viga – Equação de Euler

A primeira parte da eq. anterior exprime que a taxa de variação do cisalhamento ao longo da viga é igual à carga por unidade de comprimento, e a segunda exprime que a taxa de variação do momento ao longo da viga é igual ao cisalhamento.

Assim obtemos:

$$\frac{d^2 M}{d x^2} = \frac{d V}{d x} = p(x)$$

O momento de flexão é relacionado à curvatura pela equação de flexão, portanto

$$-M = E I \frac{d^2 y}{dx^2}$$

Rearranjando as equações, obtemos

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(EI \frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial x^2} \right) - p(x) = 0$$

Sistemas Contínuos – Viga – Equação de Euler

Para uma viga vibrando, sob o seu próprio peso, em volta da sua posição de equilíbrio estático, a carga por unidade de comprimento é igual à carga de inércia devido à sua massa e aceleração. Considerando que a força de inércia é na mesma direção que $p(x)$, tem-se

$$p(x,t) = \rho A \frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial t^2}$$

onde ρ/A é a massa por unidade de comprimento da viga e A é a área de seco transversal.

Usando esta relação, a equação para a vibração lateral da viga se reduz a

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(EI \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \right) + \rho A \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = 0$$

Sistemas Contínuos – Viga – Equação de Euler

No caso especial da rigidez de flexão EI ser uma constante, a equação anterior pode ser escrita na forma

$$EI\,\frac{\partial^4 y(x,t)}{\partial x^4} + \rho A \frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial t^2} = 0$$

ou

$$c^2\,\frac{\partial^4 y(x,t)}{\partial x^4} + \frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial t^2} = 0$$

onde $c = \sqrt{EI/\rho A}$. Esta equação diferencial precisa de 4 condições de contorno e 2 condições iniciais.

Sistemas Contínuos – Viga – Equação de Euler

Assumindo novamente a solução a variáveis separáveis:

$$y(x,t) = X(x)\,T(t)$$

e substituindo na equação da onda, obtêm-se:

$$c^2 \frac{X(x)''''}{X(x)} = -\frac{\ddot{T}(t)}{T(t)} = \lambda^2$$

Transformando em duas equações diferenciáveis da forma:

$$\ddot{T}(t) + \lambda^2 T(t) = 0 \qquad\qquad X''''(x) - \left(\frac{\lambda}{c}\right)^2 X(x) = 0$$

A solução da equação diferencial temporal é dada por:

$$\boxed{T(t) = C_1 \sin(\lambda t) + C_2 \cos(\lambda t)}$$

onde C1 e C2 são determinados através das condições iniciais.

Sistemas Contínuos – Viga – Equação de Euler

Da equação diferencial função da posição *x*, o problema de autovalores resulta no autovalor

$$\beta^4 = \frac{\lambda^2}{c^2} = \frac{\rho A \lambda^2}{E I}$$

E na autofunção associado (formas de vibrar características) definido por:

$$\boxed{X(x) = A\cosh \beta x + B\sinh \beta x + C\cos \beta x + D\sin \beta x}$$

onde A, B, C e D são obtidos através das condições de contorno do problema específico.

Sistemas Contínuos – Viga – Equação de Euler – Exemplo

Achar as freqüências naturais e os modos de vibrar de uma viga engastada – livre cujas condições de contorno são:

$$a)\ \left(X\right)_{x=0} = 0 \qquad c)\left(\frac{d^2X}{dx^2}\right)_{x=L} = 0$$

$$b)\left(\frac{dX}{dx}\right)_{x=0} = 0 \qquad d)\left(\frac{d^3X}{dx^3}\right)_{x=L} = 0$$

Considerando a função X(x) na sua forma mais geral

$$X(x) = C_1(\cos\beta x + \cosh\beta x) + C_2(\cos\beta x - \cosh\beta x) +$$
$$C_3(\sin\beta x + \sinh\beta x) + C_4(\sin\beta x - \sinh\beta x)$$

Sistemas Contínuos – Viga – Equação de Euler – Exemplo

Aplicando as condições de contorno obtemos as seguintes relações para as constantes de integração:

$$a)\ C_1 = 0 \qquad b)\ C_3 = 0$$

e utilizando as relações c) e d)

$$0 = C_2\left(\cos\beta L + \cosh\beta L\right) + C_4\left(\sin\beta L + \sinh\beta L\right)$$

$$0 = C_2\left(-\sin\beta L + \sinh\beta L\right) + C_4\left(\cos\beta L + \cosh\beta L\right)$$

$$C_2 = \frac{-C_4\left(\cos\beta L + \cosh\beta L\right)}{\left(-\sin\beta L + \sinh\beta L\right)}$$

$$\frac{-C_4\left(\cos\beta L + \cosh\beta L\right)}{\left(-\sin\beta L + \sinh\beta L\right)} + C_4\left(\sin\beta L + \sinh\beta L\right) = 0$$

$$C_4\left[\left(\cos\beta L + \cosh\beta L\right)^2 + \left(\sin^2\beta L - \sinh^2\beta L\right)\right] = 0$$

Sistemas Contínuos – Viga – Equação de Euler – Exemplo

Da ultima relação acima, para que esta seja satisfeita, deve-se cumprir que:

$$\boxed{\cos \beta L \, \cosh \beta L = 0 \quad \left(equação\ característica \right)}$$

Na tabela abaixo encontram-se os primeiros valores que verificam a igualdade acima:

$\beta_1 L$	$\beta_2 L$	$\beta_3 L$	$\beta_4 L$	$\beta_5 L$	$\beta_6 L$
1,875	4,694	7,855	10,996	14,137	17,279

Considerando que

$$c^2 = \frac{EI}{\rho A} \qquad \beta_i^4 = \frac{\lambda_i^2}{c^2} = \frac{\rho A \lambda_i^2}{EI}$$

Sistemas Contínuos – Viga – Equação de Euler – Exemplo

E as frequências naturais são obtidas através da relação:

$$\lambda_i = \omega_{n_i} = (\beta_i L)^2 \sqrt{\frac{EI}{\rho A L^4}} \qquad [rad / s]$$

e a solução é dada por:

$$y(x,t) = \sum_{i=1}^{\infty} X_i(x)\left(A_i\, sen \lambda_i t + B_i \cos \lambda_i t\right)$$

$$com \quad X_i(x) = C_2\left(\cos \beta_i x + \cosh \beta_i x\right) + C_4\left(\sin \beta_i x - \sinh \beta_i x\right)$$

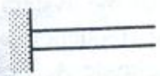
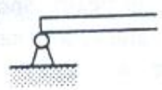
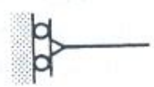
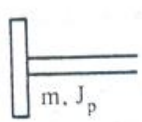
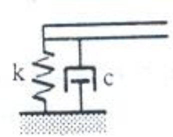
Sistemas Contínuos – Viga – Equação de Euler – Exemplo

Valores numéricos de $(\beta l)^2$ para distintas condições de contorno

Posição da viga	$(\beta_1 l)^2$ Fundamental	$(\beta_2 l)^2$ Segundo modo	$(\beta_3 l)^2$ Terceiro modo
Apoiada simplesmente	9,87	39,5	88,9
Cantilever ou em balanço	3,52	22,4	61,7
Duplamente livre	22,4	61,7	121,0
Duplamente engastada	22,4	61,7	121,0
Engastada-articulada	15,4	50,0	104,0
Articulada-livre	0	15,4	50,0

Sistemas Contínuos – Viga – Equação de Euler – Exemplo

Condições de contorno para vibração lateral

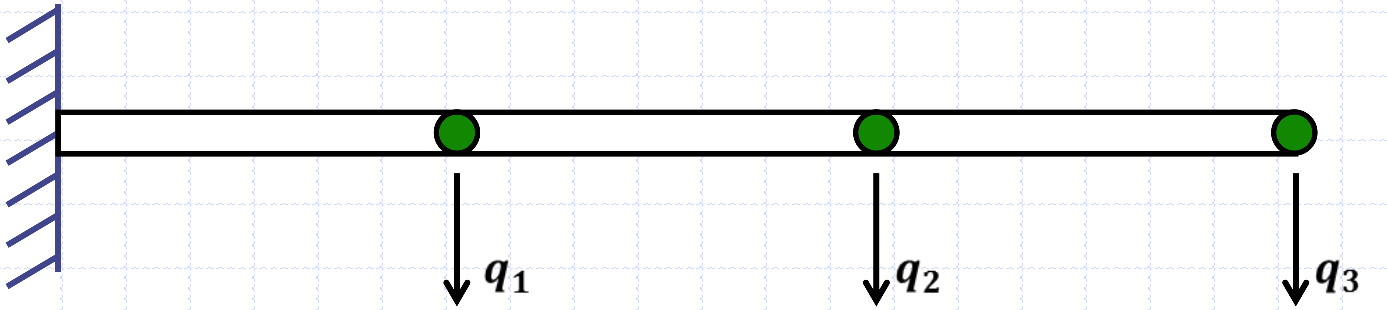
Case		Boundary condition left, $x = 0$	Boundary condition right, $x = l$
Clamped (deflection, slope = 0)		$y(0, t) = 0$ $\dfrac{\partial y}{\partial x} = 0$	$y(l, t) = 0$ $\dfrac{\partial y}{\partial x} = 0$
Pinned (deflection, moment = 0)		$y(0, t) = 0$ $\dfrac{\partial^2 y}{\partial x^2} = 0$	$y(l, t) = 0$ $\dfrac{\partial^2 y}{\partial x^2} = 0$
Sliding (slope, shear = 0)		$\dfrac{\partial y}{\partial x} = 0$ $\dfrac{\partial^3 y}{\partial x^3} = 0$	$\dfrac{\partial y}{\partial x} = 0$ $\dfrac{\partial^3 y}{\partial x^3} = 0$
Free (moment, shear = 0)		$\dfrac{\partial^2 y}{\partial x^2} = 0$ $\dfrac{\partial^3 y}{\partial x^3} = 0$	$\dfrac{\partial^2 y}{\partial x^2} = 0$ $\dfrac{\partial^3 y}{\partial x^3} = 0$
Mass m and moment of inertia J_P		$EI\dfrac{\partial^2 y}{\partial x^2} = -J_P\dfrac{\partial^3 y}{\partial x\,\partial t^2}$ $EI\dfrac{\partial^3 y}{\partial x^3} = -m\dfrac{\partial^2 y}{\partial t^2}$	$EI\dfrac{\partial^2 y}{\partial x^2} = J_P\dfrac{\partial^3 y}{\partial x\,\partial t^2}$ $EI\dfrac{\partial^3 y}{\partial x^3} = m\dfrac{\partial^2 y}{\partial t^2}$
Damper c and spring k		$EI\dfrac{\partial^3 y}{\partial x^3} = -ky - c\dfrac{\partial y}{\partial t}$ $\dfrac{\partial^2 y}{\partial x^2} = 0$	$EI\dfrac{\partial^3 y}{\partial x^3} = ky + c\dfrac{\partial y}{\partial t}$ $\dfrac{\partial^2 y}{\partial x^2} = 0$

Sistemas Contínuos – Viga – Equação de Euler – Exemplo

Dados da viga de alumínio engastada-livre:

L = 600 mm
b = 40 mm
h = 4 mm

$$\lambda_i = \omega_{n_i} = \left(\beta_i L\right)^2 \sqrt{\frac{EI}{\rho A L^4}} \quad [rad/s]$$



Sistemas Contínuos - Problema de Autovalores

- Examinando o problema derivado na equação da viga, a equação diferencial de quarta ordem em função do deslocamento:

$$X_i''''(x) + \beta_i^4 X_i(x) = 0$$

e definindo:

$$\gamma_i = \beta_i^4$$

- Este problema é caracterizado como um problema de autovalores de forma tal que a derivada quarta da autofunção $X_i(x)$ é igual à mesma autofunção multiplicada por um escalar γ_i (autovalor).

Sistemas Contínuos – Ortogonalidade

- Considerando as seguintes autofunções *i* e *j*:

$$X_i''''(x) = \gamma_i X_i(x)$$

$$X_j''''(x) = \gamma_j X_j(x)$$

- Multiplicando X_j na primeira equação, X_i na segunda equação e integrando sobre a longitude da viga:

$$\int_0^L X_i''''(x)\, X_j(x)\,dx = \gamma_i \int_0^L X_i(x)\, X_j(x)\,dx$$

$$\int_0^L X_j''''(x)\, X_i(x)\,dx = \gamma_j \int_0^L X_j(x)\, X_i(x)\,dx$$

Sistemas Contínuos – Ortogonalidade

- Integrando por partes o lado esquerdo da igualdade da equação anterior

$$\left[X_i'''(x)\ X_j(x)\right]_0^L - \left[X_i''(x)\ X'_j(x)\right]_0^L + \int_0^L X_i''(x)\ X_j''(x)\,dx = \gamma_i \int_0^L X_i(x)\ X_j(x)\,dx$$

$$\left[X_j'''(x)\ X_i(x)\right]_0^L - \left[X_j''(x)\ X'_i(x)\right]_0^L + \int_0^L X_j''(x)\ X_i''(x)\,dx = \gamma_j \int_0^L X_j(x)\ X_i(x)\,dx$$

- Em geral por condição de contorno:

$$\begin{array}{lll} livre & \Rightarrow X''=0 & X'''=0 \\ engastado & \Rightarrow X=0 & X'=0 \\ simplesmente\ apoiado & \Rightarrow X=0 & X''=0 \end{array}$$

Sistemas Contínuos – Ortogonalidade

- O que leva a conclusão que o primeiro e o segundo termo são nulos. Assim, obtemos:

$$(\gamma_i - \gamma_j)\int_0^L X_i\, X_j\ dx = 0$$

- Então, chega-se à conclusão que se $i \neq j$, então $\gamma_i \neq \gamma_j$ e:

$$\int_0^L X_i X_j\ dx = 0, \quad \int_0^L X_i'' X_j''\, dx = 0 \quad \text{e} \quad \int_0^L X_i''' X_j'''\, dx = 0$$

As equações acima representam a relação de ortogonalidade de vibração transversal em vigas.

Sistemas Contínuos – Ortogonalidade

Quando $i = j$, a primeira integral das equações dará um escalar α_i:

$$\int_0^L X_i^{\,2}\; dx = \alpha_i$$

- A segunda e a terceira equações tomam a forma:

$$\int_0^L X_i\,'''\,X_i\, dx = \int_0^L \left(X_i\,''\right)^2 dx = \gamma_i\;\; \alpha_i = \beta_i^{\,4}\;\; \alpha_i = \left(\frac{\lambda_i}{c}\right)^2\;\; \alpha_i$$

Sistemas Contínuos – Ortogonalidade – Exemplo

- Com o propósito de realizar uma transformação, assim como será feito no caso discreto, para resolver o problema, tomemos a equação de movimento:

$$\rho A \frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial t^2}\, dx + EI\, \frac{\partial^4 y(x,t)}{\partial x^4}\, dx = 0$$

e para uma viga de seção constante:

$$A(x) = A \qquad\qquad I(x) = I$$

e chamando de $\rho A = m$ (massa por unidade de longitude) e $EI = r$ (rigidez flexional), a equação de movimento pode ser escrita:

$$m \frac{\partial^2 (y(x,t))}{\partial t^2} dx + r \frac{\partial^4 (y(x,t))}{\partial x^4} dx = 0$$

Sistemas Contínuos – Ortogonalidade – Exemplo

- Pelo Teorema de Expansão, podemos escrever a solução do problema da forma:

$$y(x,t) = \sum_{i=1}^{\infty} p_i(t)\ X_i(x)$$

com $i=1, 2, 3,\ldots$ e definindo $p_i(t)$ como coordenadas generalizadas principais.

Substituindo $y(x,t)$ na equação de movimento:

$$\sum_{i=1}^{\infty} \left(m\, \ddot{p}_i\ X_i + r\, p_i\ X_i\,'''' \right) dx = 0$$

Premultiplicando por X_j (a j-ésima autofunção) e integrando em L, obtemos:

$$\sum_{i=1}^{\infty} \left(m\, \ddot{p}_i \int_0^L X_i\ X_j\ dx + r\, p_i \int_0^L X_i\,''''\ X_j\ dx \right) dx = 0$$

Sistemas Contínuos – Ortogonalidade – Exemplo

• Devido à ortogonalidade das funções de forma, a equação anterior só toma valores distintos de zero quando $i = j$. Assim, a equação de movimento em função das coordenadas principais $p_i(t)$ será:

$$m_{p_i}\ddot{p}_i(t) + r_{p_i} p_i(t) = 0 \quad , com \;\; i = 1, 2, 3, \ldots$$

$p_i(t) \rightarrow$ Coordenadas principais generalizadas

$m_{p_i} = m\int_0^L X_i^2 dx = m\alpha_i \rightarrow$ massa modal ou massa em coord. principais

$r_{p_i} = r\int_0^L X_i'''' X_i dx = \int_0^L (X_i'')^2 dx = m\lambda_i^2\alpha_i \rightarrow$ rigidez modal ou rigidez em coordenadas principais

Sistemas Contínuos – Ortogonalidade

• Se as autofunções são ortonormalizadas através de $\sqrt{m\alpha_i}$, isto é, cada autofunção é dividida por este valor escalar, as seguintes relações são obtidas:

$$\int_0^L (X_i)^2 \, dx = 1$$

$$\int_0^L X_i\,'''\, X_i \, dx = \int_0^L (X_i\,'')^2 \, dx = \beta_i^{\,4} = \left(\frac{\lambda_i}{c}\right)^2$$

A equação diferencial em coordenadas principais, considerando autofunções ortonormalizadas:

$$\ddot{p}_i(t) + \lambda_i^2\, p_i(t) = 0 \quad , com \;\; i = 1, 2, 3, \ldots$$

$$\lambda_i = \omega_i$$

Sistemas Contínuos – Ortogonalidade

A equação diferencial em coordenadas principais, considerando autofunções ortonormalizadas e vibração forçada:

$$\ddot{p}_i(t)+\lambda_i^2\ p_i(t)=f(t)\int_0^l X_i\ dx\ =g_i(t),\qquad com\ i=1,2,3\ldots.$$

Equação de movimento de um sistema equivalente de um grau de liberdade. No domínio da frequência:

$$\left(-\Omega^2+\lambda_i^2\right)P_i(\Omega)=G_i(\Omega),\qquad com\ i=1,2,3\ldots.$$

$$P_i(\Omega)=\frac{G_i(\Omega)}{\left(-\Omega^2+\lambda_i^2\right)}\qquad\qquad y(x,t)=\sum_{i=1}^{\infty}p_i(t)\ X_i(x)$$