1. TEORIA BÁSICA DE VIBRAÇÕES

PROBLEMA DE AUTOVALORES E RESPOSTA EM FREQUÊNCIA

Problema de Autovalores

- Conforme estudado nos métodos anteriores, a equação de movimento de um sistema de múltiplos graus de liberdade é dada por:

$$M\ \ddot{q}(t) + C\ \dot{q}(t) + K\ q(t) = f(t)$$

- Para obter a solução de equação diferencial homogênea, $f(t) = 0$

$$M\ \ddot{q}(t) + C\ \dot{q}(t) + K\ q(t) = 0$$

- Supondo que a solução é dada por

$$q(t) = \phi\ e^{i\Omega t}$$

Problema de Autovalores – Sistema não-amortecido / Amortecimento proporcional

- No sistema <u>não-amortecido</u> ou com amortecimento <u>proporcional</u>, substituindo a solução na equação do sistema, tem-se

$$\left[-\Omega^2 M + K\right]\phi \, e^{i\Omega t} = 0$$

- Ou

$$\left[-\Omega^2 M + K\right]\phi = 0$$

- Sendo $\lambda = \Omega^2$, chega-se ao seguinte problema de autovalores

$$\boldsymbol{K}\,\phi_i = \lambda_i \boldsymbol{M}\,\phi_i$$

$\lambda_i \Rightarrow$ i-ésimo autovalor

$\phi_i \Rightarrow$ i-ésimo autovetor associado

$\sqrt{\lambda_i} = \Omega_i$ → frequência natural do sistema não amortecido

ϕ_i → i-ésimo modo de vibrar.

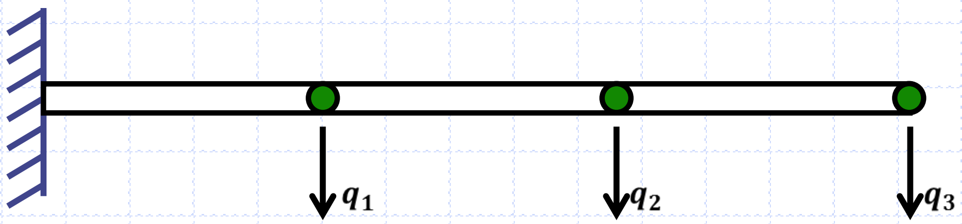
Problema de Autovalores – Sistema não-amortecido / Amortecimento proporcional

- As frequências naturais determinam, para o sistema não amortecido (ou com amortecimento proporcional), as frequências para as quais o sistema possui uma impedância muito baixa ou nula. Ao ser excitado nessa frequência, o sistema responderá com grande amplitude de vibração.

- Os modos de vibrar representam a forma de vibrar do sistema para cada frequência natural do mesmo.

- Quando a frequência de excitação coincide com a alguma das frequências naturais, o sistema amplificará sua vibração, predominantemente na forma de vibrar característica associada á frequência natural excitada.

Problema de Autovalores – Sistema não-amortecido / Amortecimento proporcional



$$\Lambda = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & \\ & \lambda_2 & \\ & & \lambda_3 \end{bmatrix} \quad \Phi = \begin{bmatrix} \phi_{11} & \phi_{12} & \phi_{13} \\ \phi_{21} & \phi_{22} & \phi_{23} \\ \phi_{31} & \phi_{32} & \phi_{33} \end{bmatrix}$$

$\Rightarrow$

No Matlab

$$K\phi = \lambda M\phi$$

$$[\Phi, \Lambda] = eig(K, M)$$

Ortogonalidade dos Modos – Amortecimento proporcional

- Sendo os autovalores λ_i e λ_j distindos entre si, tem-se:

$$\lambda_i = \Omega_i^2 \Rightarrow \Omega_i^2 M\phi_i = K\phi_i$$

$$\lambda_j = \Omega_j^2 \Rightarrow \Omega_j^2 M\,\phi_j = K\phi_j$$

E premultiplicando as equações por ϕ_j^T e ϕ_i^T, respectivamente:

$$\Omega_i^2\ \phi_j^T\ M\ \phi_i = \phi_j^T\ K\ \phi_i$$

$$\Omega_j^2\ \phi_i^T\ M\ \phi_j = \phi_i^T\ K\ \phi_j$$

- Considerando simetria para M e K, mostra-se que:

$$\phi_i^T\ M\ \phi_j = \phi_j^T\ M\ \phi_i$$

$$\phi_i^T\ K\ \phi_j = \phi_j^T\ K\ \phi_i$$

Ortogonalidade dos Modos – Amortecimento proporcional

- Então,

$$\left(\Omega_i^2 - \Omega_j^2\right) \phi_j^T \; M \, \phi_i = 0$$

- Com isso, se $i \neq j \rightarrow \Omega_i \neq \Omega_j$

$$\phi_j^T M \; \phi_i = 0 \qquad \phi_j^T K \; \phi_i = 0$$

- Isto é, os vetores ϕ_i e ϕ_j são <u>ortogonais</u> em relação a M e K.

- Se $i = j$

$$\phi_j^T M \; \phi_j = m_j \qquad \phi_j^T K \; \phi_j = k_j$$

Ortogonalidade dos Modos – Amortecimento proporcional

- Matricialmente

$$\begin{bmatrix} \ddots & & \\ & m_i & \\ & & \ddots \end{bmatrix} = \Phi^T M \, \Phi \qquad \begin{bmatrix} \ddots & & \\ & k_i & \\ & & \ddots \end{bmatrix} = \Phi^T K \, \Phi$$

- Ortogonalizando os autovetores ϕ_i por $\sqrt{m_i}$, ou seja

$$\left[\frac{\phi_1}{\sqrt{m_1}} ; \; \frac{\phi_2}{\sqrt{m_2}} ; \ldots ; \frac{\phi_n}{\sqrt{m_n}} \right] = \Phi_o$$

- Obtêm-se, então:

$$\Phi_o^T M \; \Phi_o = [I] \qquad \Phi_o^T K \; \Phi_o = \begin{bmatrix} \ddots & & \\ & \lambda_i & \\ & & \ddots \end{bmatrix} = \Lambda$$

Ortogonalidade dos Modos – Amortecimento proporcional

- Como o amortecimento C é proporcional → $C = \alpha\, M + \beta\, K$
- Assim,

$$\Phi_o^T C\ \Phi_o = \begin{bmatrix} \ddots & & \\ & {c_i}/{m_i} & \\ & & \ddots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \ddots & & \\ & 2\xi_i \Omega_i & \\ & & \ddots \end{bmatrix} = \Gamma$$

onde ξ_i e Ω_i , são a razão de amortecimento e a frequência natural, respectivamente.

- Devido os ϕ_i serem ortogonais em relação a M, C e K (para amortecimento proporcional), estes vetores podem ser usados como uma base para achar a solução do sistema.

Resposta no domínio da frequencia – Amortecimento proporcional

- Supõe-se que a solução do sistema é dada por:

$$\{q(t)\} = \Phi \{p(t)\}$$

- Esta eq. representa uma transformação de coordenadas do espaço de configuração para o espaço modal através da matriz Φ
  - $\{q(t)\} \rightarrow$ coordenadas generalizadas no espaço de configuração
  - $\{p(t)\} \rightarrow$ coordenadas generalizadas principais no espaço modal do sistema;

- Aplicando esta eq. na equação do movimento e pré multiplicando tudo por Φ^T

$$[I]\ddot{p}(t) + [\Gamma]\dot{p}(t) + [\Lambda]p(t) = \Phi^T f(t)$$

Resposta no domínio da frequencia – Amortecimento proporcional

- Aplicando a Tranformada de Fourier na eq. anterior, tem-se

$$\left[-\Omega^2 I + i\Omega\Gamma + \Lambda\right] P(\Omega) = \Phi^T F(\Omega)$$

- Como $\quad Q(\Omega) = \Phi\, P(\Omega)$

- A resposta do sistema será dada por

$$\boxed{Q(\Omega) = \Phi\left[-\Omega^2 I + i\Omega\Gamma + \Lambda\right]^{-1} \Phi^T F(\Omega)}$$

$$\boxed{FRF \Rightarrow H(\Omega)}$$

Problema de Autovalores – Amortecimento Geral

- Dado um sistema

$$M\ddot{q}(t)+C\dot{q}(t)+Kq(t)=f(t)$$

onde as matrizes M, C e K são reais e simétricas e o amortecimento C é <u>não proporcional</u>, assume-se que

$$\{f\}=0 \quad \text{e} \quad \{q\}=\{\phi\}\,e^{st}$$

- Então a eq. acima se torna:

$$\left[s^2M+sC+K\right]\{\phi\}=0$$

- Ou,

$$[D]\,\{\phi\}_i=0, \qquad i=1,\ldots,n.$$

Problema de Autovalores – Amortecimento Geral

- Para encontrar uma solução ≠ da trivial, $\phi \neq 0$, a matriz D deve ser singular, isto é

$$\det|D| = 0$$

- Isto leva à equação característica do sistema, com $2n$ raízes:

$$s^{2n} + p_1 s^{2n-1} + \ldots + p_{2n-1} s + p_{2n} = 0$$

e os coeficientes p são reais pois as matrizes M, C e K são reais.

- A solução é encontrada no espaço de estados ($2n$ dimensional), onde a variável de estado é

$$y(t) = \begin{Bmatrix} q(t) \\ \dot{q}(t) \end{Bmatrix}$$

Problema de Autovalores – Amortecimento Geral

- Reescrevendo a equação geral em função da variável de estados

$$[C \quad M]_{n\times 2n}\,\dot{y}(t)_{2n\times 1} + [K \quad 0]_{n\times 2n}\,y(t)_{2n\times 1} = f(t)_{2n\times 1}$$

Sistema de *n* equações com *2n* incógnitas

- Então, adicionando a igualdade absoluta abaixo, forma-se um sistema de *2n* equações com *2n* incognitas:

$$[M \quad 0]_{n\times 2n}\,\dot{y}(t)_{2n\times 1} + [0 \quad -M]_{n\times 2n}\,y(t)_{2n\times 1} = 0_{2n\times 1}$$

- Portanto:

$$\begin{bmatrix} C & M \\ M & 0 \end{bmatrix}_{2n\times 2n} \dot{y}(t)_{2n\times 1} + \begin{bmatrix} K & 0 \\ 0 & -M \end{bmatrix}_{2n\times 2n} y(t)_{2n\times 1} = \begin{Bmatrix} f(t) \\ 0 \end{Bmatrix}_{2n\times 1}$$

Problema de Autovalores – Amortecimento Geral

- Ou, simplificadamente

$$A\,\dot{y}(t) + B\,y(t) = g(t)$$

- Considerando *g(t)=0* e supondo

$$y(t) = \theta\,e^{st}$$

- Como: $y(t) = \begin{Bmatrix} q(t) \\ \dot{q}(t) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \phi\,e^{st} \\ s\phi\,e^{st} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \phi \\ s\phi \end{Bmatrix} e^{st} \Rightarrow \theta = \begin{Bmatrix} \phi \\ s\phi \end{Bmatrix}$

- Assim, a equação simplificada torna-se

$$[sA + B]\theta = 0$$

- Analogamente, o problema de autovalores para amortecimento geral é

$$B\theta_i = \lambda_i A\theta_i \qquad \text{e} \qquad \lambda = -s$$

Problema de Autovalores – Amortecimento Geral – Ortogonalidade

- Se A e B são simétricos, é fácil mostrar como foi visto, que a seguinte relação de ortogonalidade é satisfeita.

$$\theta_j^T A \theta_k = a_j \delta_{jk} \qquad \delta_{jk} \Rightarrow \text{Delta de Kronecker}$$

$$\theta_j^T B \theta_k = b_j \delta_{jk} \qquad j,k = 1,\ldots,2n$$

- Ortonormalizando Θ : $\dfrac{\theta_1}{\sqrt{a_1}},\ldots,\dfrac{\theta_n}{\sqrt{a_n}}$

- Chega-se a:

$$\theta_j^T A \theta_k = \delta_{jk}$$

$$\theta_j^T B \theta_k = \lambda_j \delta_{jk}$$

Problema de Autovalores – Amortecimento Geral – Ortogonalidade

- Matricialmente:

$$\Theta^T B \Theta = \Lambda \qquad \Theta^T A \Theta = I$$

- onde

$$\Theta = \left[\theta_1, \ldots, \theta_{2n}\right] \qquad \Lambda = diag\left(\lambda_i\right)$$

Matriz Modal Matriz Espectral

Problema de Autovalores – Amortecimento Geral – Ortogonalidade

- Expandindo as condições de ortogonalidade, obtemos:

$$\begin{Bmatrix} \phi_j & s_j\phi_j \end{Bmatrix}_{1x2n} \begin{bmatrix} C & M \\ M & 0 \end{bmatrix}_{2nx2n} \begin{Bmatrix} \phi_k \\ s_k\phi_k \end{Bmatrix}_{2nx1} = \delta_{jk}$$

$$\begin{Bmatrix} \phi_j & s_j\phi_j \end{Bmatrix}_{1x2n} \begin{bmatrix} K & 0 \\ 0 & -M \end{bmatrix}_{2nx2n} \begin{Bmatrix} \phi_k \\ s_k\phi_k \end{Bmatrix}_{2nx1} = -s_j\delta_{jk}$$

$$\phi_j^T C \phi_k + s_j\phi_j^T M \phi_k + \phi_j^T M\phi_k s_k = \delta_{jk}$$

$$(s_j + s_k)\phi_j^T M \phi_k + \phi_j^T C\phi_k = \delta_{jk}$$

$$s_j s_k \phi_j^T M \phi_k - \phi_j^T K\phi_k = -s_j\delta_{jk}$$

Se $j \neq k$, e s_j=s_k

$$2s_j \phi_j^T M \phi_k + \phi_j^T C\phi_k = 0$$

$$s_j = -\frac{\phi_j^T C\phi_k}{2\phi_j^T M \phi_k} = -\frac{c_j}{2m_j} = \frac{2\xi_j\Omega_j m_j}{2m_j}$$

$$\boxed{s_j = -\xi_j\Omega_j}$$

$$s_j^2\phi_j^T M \phi_k - \phi_j^T K\phi_k = 0$$

$$s_j^2 = \frac{\phi_j^T K\phi_k}{\phi_j^T M \phi_k} = \frac{k_j}{m_j} = \Omega_j^2$$

$$\boxed{|s_j| = |-\lambda_j| = \Omega_j}$$

Problema de Autovalores – Amortecimento Geral – Resposta no domínio da frequência

- Como no espaço de estado a eq. de movimento é dada por

$$A\dot{y}(t)+By(t)=g(t)$$

- E fazendo $\boxed{\{q(t)\}=\Theta\{p(t)\}}$ e pré multiplicando por $\boxed{\Theta^T}$

$$\Theta^T A\Theta\dot{p}(t)+\Theta^T B\Theta p(t)=\Theta^T g(t)$$

- Devido as propriedades de ortogonalidade:

$$I\ \dot{p}(t)+\Lambda\ p(t)=\Theta^T g(t)$$

Problema de Autovalores – Amortecimento Geral – Resposta no domínio da frequência

- Aplicando a transformada de Fourier e reorganizando a equação:

$$\left[i\Omega\, I + \Lambda\right]\mathrm{P}(\Omega) = \Theta^{T} G(\Omega)$$

- Sabendo que: $\mathrm{Y}(\Omega) = \Theta\, P(\Omega)$

- Portanto:

$$\mathrm{Y}(\Omega) = \boxed{\Theta\left[i\Omega\, I + \Lambda\right]^{-1}\Theta^{\mathrm{T}}}\, G(\Omega)$$

FRF (espaço de estado)

◆ Modelo especial versus modelo modal e FRFs

Modelo espacial e modelo modal