DINÂMICA DE ROTORES

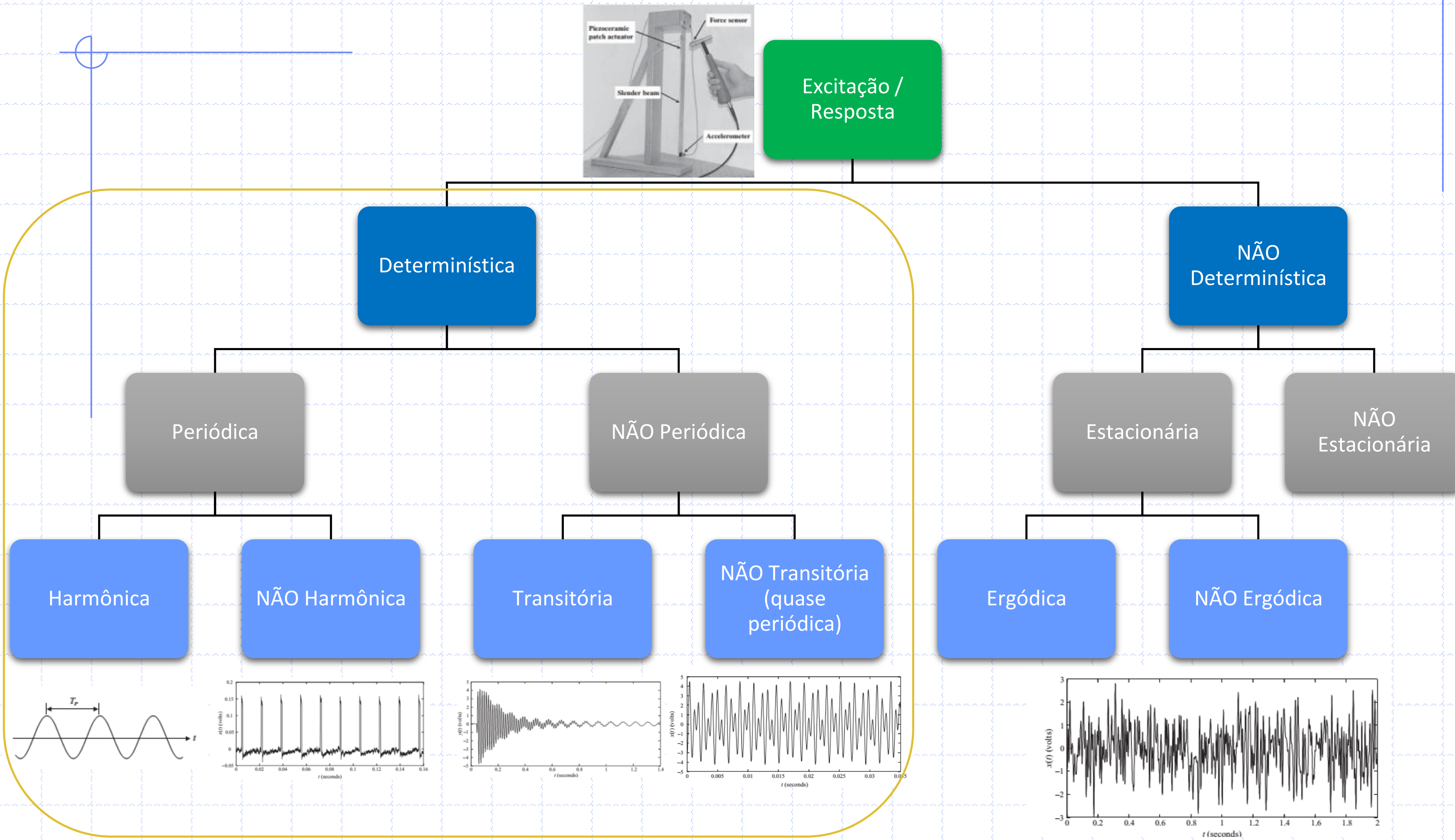
Prof. Dr. Carlos Alberto Bavastri
Msc. Thiago da Silva
Lucas Bortolotto
Samuel Cavalli

Universidade Federal do Paraná

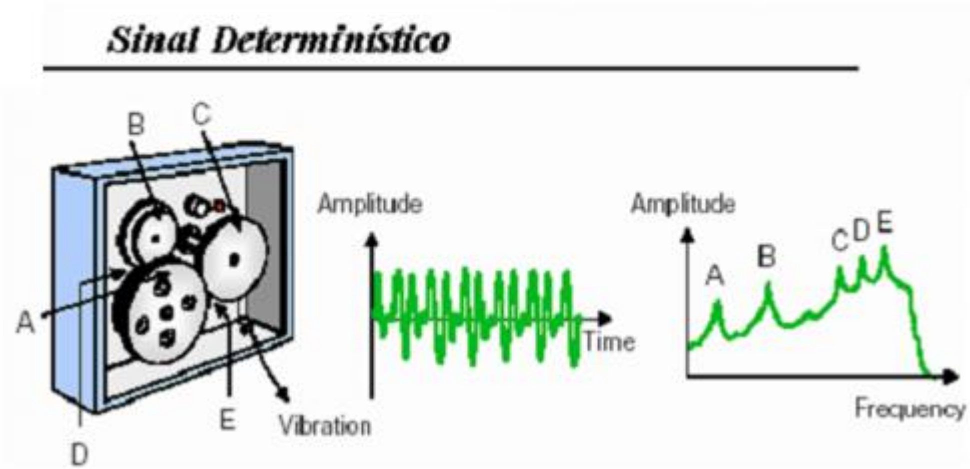
1. TEORIA BÁSICA DE VIBRAÇÕES
A) SINAIS DETERMINÍSTICOS

CLASSIFICAÇÃO DE SINAIS

Classificação de Sinais



Sinais Determinísticas e Aleatórias

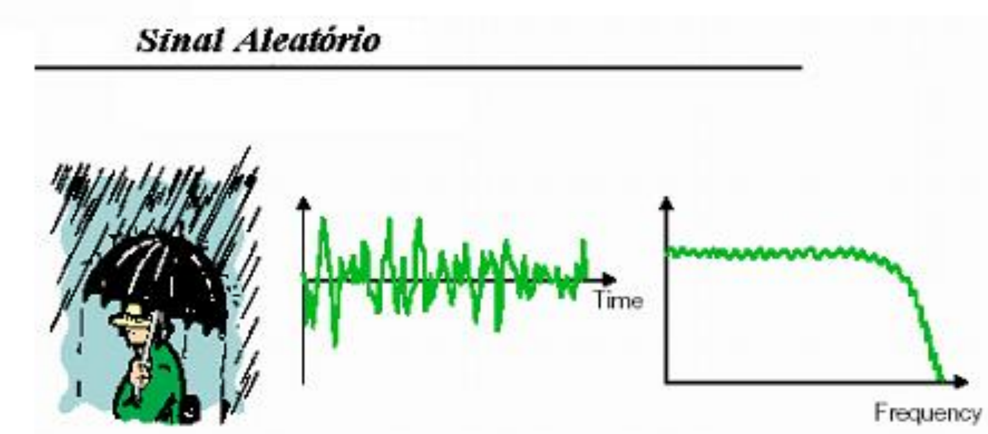


Um fenômeno ou uma função que o represente se diz que é determinístico quando suas características são previsíveis.

$$f(t) = \underbrace{A\cos(\Omega t+\phi)}_{\text{conhecidos}}$$

Previsível para $\forall\ t$

Sinais Determinísticas e Aleatórias



Se uma estrutura não é especificamente conhecida, será, de um ponto de vista dinâmico, imprevisível, aleatória ou não determinística.

Excitação ALEATÓRIA DETERMINÍSTICA

Sistema não DETERMINÍSTICO

Resposta ALEATÓRIA

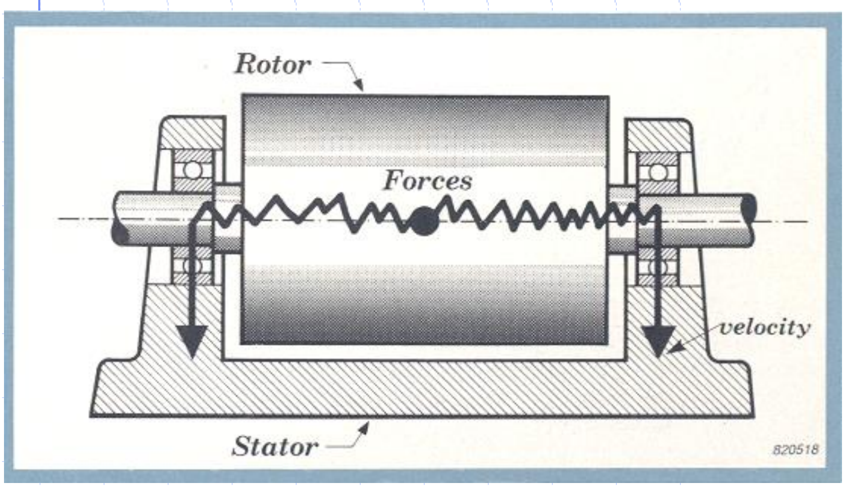
- Para este tipo de estrutura qualquer que seja a entrada, a saída será aleatória

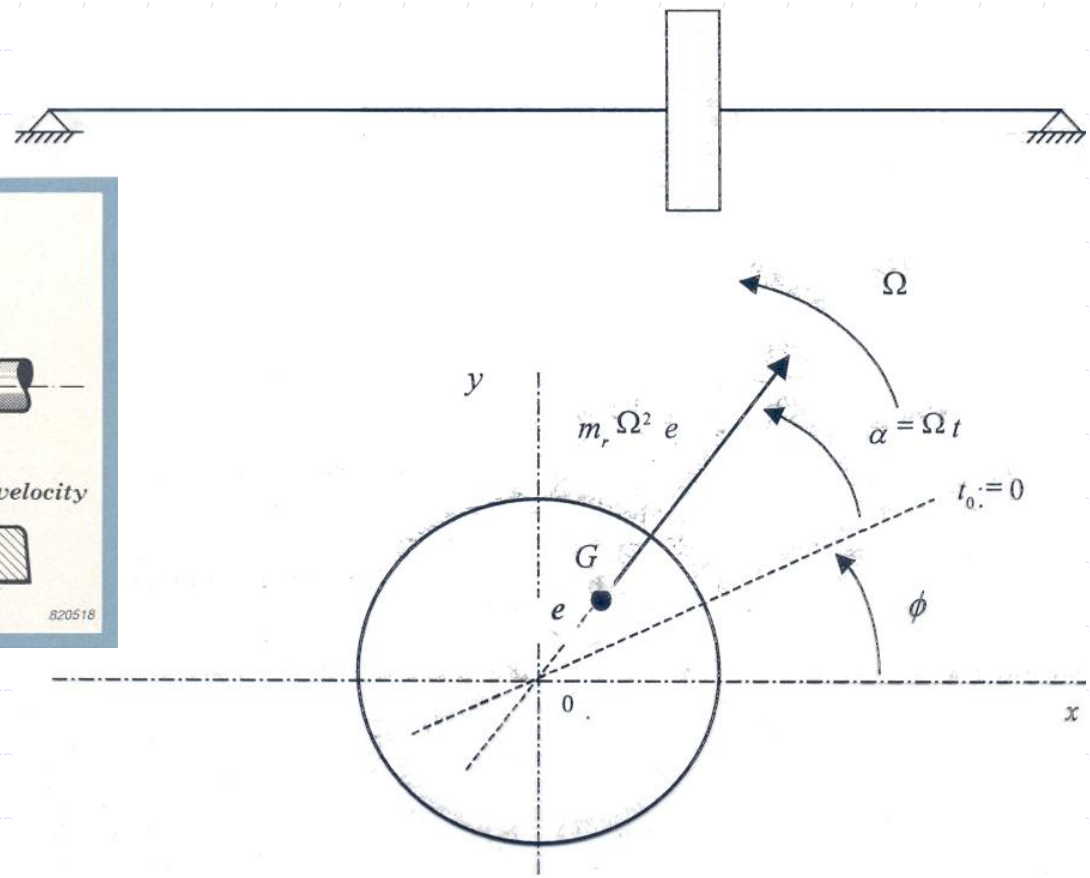
1. TEORIA BÁSICA DE VIBRAÇÕES

A) SINAIS DETERMINÍSTICOS

◆ Estrutura ou Sistemas Determinísticos

Exemplo: consideremos um disco montado sobre um eixo rígido e apoiado sobre dois mancais rígidos. Consideremos ainda, como sempre ocorre, que exista uma excentricidade ***e*** entre o centro de massa e o centro geométrico do disco.





Estrutura ou Sistemas Determinísticos

Hipótese 1: **não** existe atrito nos mancais;

- t_0 sempre conhecido;
- G na posição inferior, sobre o plano $z = 0$;
- Em todo momento a aceleração e a velocidade de rotação se conhece o tempo t_0 para o qual o rotor alcança sua rotação constante Ω;
- A força centrífuga, devida a excentricidade, será

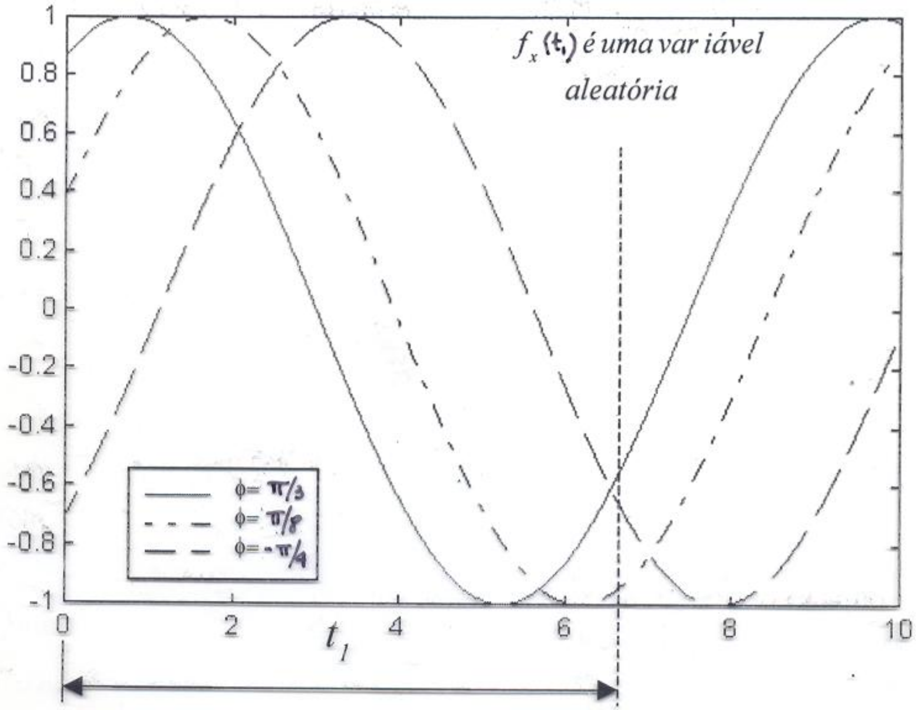
$$f_x(t) = m_r \Omega^2 e \cos(\Omega t + \phi)$$

$$f_y(t) = m_r \Omega^2 e \sin(\Omega t + \phi)$$

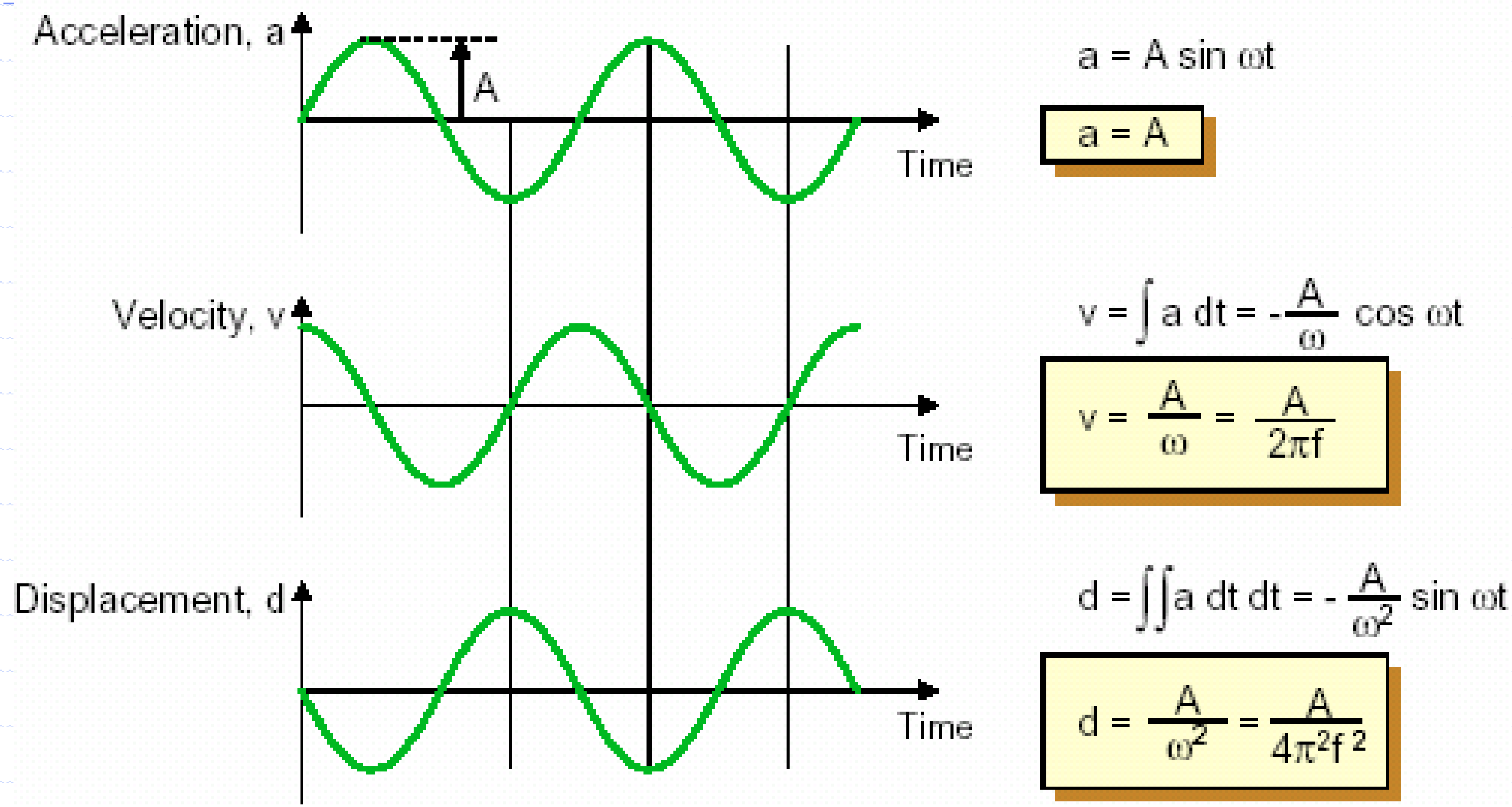
Estrutura ou Sistemas Determinísticos

Hipótese 2: **existe** atrito nos mancais;

- Ao deixar de rodar o disco não parará sempre na mesma posição, tornando ϕ imprevisível, uma variável aleatória. Não se pode antecipadamente afirmar quais serão os valores das forças em um instante t.
- Ou seja, $\boldsymbol{t}, \boldsymbol{f_x(t)}$ e $\boldsymbol{f_y(t)}$ se tornam variáveis aleatórias;
- Para cada ensaio podemos determinar $f_x(t)$ e $f_y(t)$ e por tanto achar ϕ (cada ensaio é uma realização);
- As possíveis funções $f_x(t)$ e $f_y(t)$ formam uma "população", onde cada elemento desta população é uma amostra.



Funções Harmônicas



Funções Harmônicas

É um dos modelos de excitação e resposta mais importantes dos sistemas físicos

Modelos equivalentes

$$\boxed{f(t) = A\cos\Omega t + B(\Omega)\sin(\Omega t)}$$

$$\boxed{f(t) = P(\Omega)\cos(\Omega t + \varphi(\Omega))}$$

$$\boxed{f(t) = P(\Omega)\sin(\Omega t + \Psi(\Omega))}$$

Os parâmetros $A(\Omega), B(\Omega), P(\Omega), \varphi(\Omega)$ e $\psi(\Omega)$ são constantes em t e $\Omega \geq 0$:

Funções Harmônicas

Onde

$$A(\Omega) = P(\Omega)\cos\varphi(\Omega) \qquad B(\Omega) = -P(\Omega)\,sen\,\varphi(\Omega)$$

ou

$$A(\Omega) = P(\Omega)\cos\varphi(\Omega) \qquad B(\Omega) = -P(\Omega)\,sen\,\varphi(\Omega)$$

A amplitude

$$P(\Omega) = \sqrt{A^2(\Omega) + B^2(\Omega)}$$

A fase

$$\tan\varphi(\Omega) = \tan\psi(\Omega) = -1$$

Funções Harmônicas – Propriedades

- Periódica

$$T = \frac{2\pi}{\Omega}$$

- Portanto a frequência é dada por:

$$f = \frac{\Omega}{2\pi} \therefore \Omega = 2\pi f\,[s^{-1}]$$

- Relação de unidades:

$$f = [Hz] = \frac{n[rpm]}{60}; \Omega = \frac{\pi n}{30} = [s^{-1}]$$

Modelo de Exponenciais Complexas

$$f(t) = F(\Omega)e^{i\Omega t} + F^*(\Omega)e^{-i\Omega t}$$

Pelo Teorema de Euler

$$e^{i\Omega t} = \cos\Omega t + i\sin\Omega t$$

$$e^{-i\Omega t} = \cos\Omega t - i\sin\Omega t$$

$$\cos\Omega t = \frac{e^{i\Omega t} + e^{-i\Omega t}}{2}$$

$$\sin\Omega t = \frac{e^{i\Omega t} - e^{-i\Omega t}}{2i}$$

Modelo de Exponenciais Complexas

Das equações anteriores, é possível achar a amplitude complexa do sinal

$$F(\Omega) = \frac{[A(\Omega) - iB(\Omega)]}{2}$$

Cujo módulo está relacionado com amplitude do sinal

$$|F(\Omega)| = \frac{\sqrt{A^2(\Omega) = B^2(\Omega)}}{2} = \frac{P(\Omega)}{2}$$

Para achar a fase da amplitude complexa

$$\boxed{F(\Omega) = |F(\Omega)|\, e^{i\varphi(\Omega)}}$$

Modelo de Exponenciais Complexas

Substituindo na equação de exponenciais complexas

$$f(t)=|F(\Omega)|\left(e^{i\left(\Omega t+\varphi_F(\Omega)\right)}+e^{-i(\Omega t+\varphi_F\,\Omega)}\right)=2|F(\Omega)|\cos\left(\Omega t+\varphi_F(\Omega)\right)$$

$$f(t)=P(\Omega)\cos\left(\Omega t+\varphi(\Omega)\right)$$

Comparando as equações

$$\boxed{\varphi_F(\Omega)=\varphi(\Omega)}$$

Extensão domínio frequência

- É óbvio que Ω, como grandeza física é >0.
- Matematicamente, é possível introduzir a variável $\Omega \leq 0$.

Considerando que:

$$A(\Omega)\ \text{é uma função par de}\ \Omega \Rightarrow A(\Omega) = A(-\Omega)$$
$$B(\Omega)\ \text{é uma função impar de}\ \Omega \Rightarrow B(\Omega) = -B(-\Omega)$$

Assumimos que $B(0) = 0$, para $\Omega < 0$, tem-se:

$$\boxed{f(t) = A(-\Omega)\cos(-\Omega t) + B(-\Omega)\, sen(-\Omega t) = A(\Omega)\cos(\Omega t) + B(\Omega)\, sen(\Omega t)}$$

Extensão domínio frequência

$$\boxed{|F(\Omega)| = |F(-\Omega)|}$$

Assim, $|F(\Omega)|$ é uma função par.

Outras considerações

$$\boxed{\begin{aligned} B(\Omega) &= -P\ sen(\varphi(\Omega)) \\ B(-\Omega) &= -P\ sen(\varphi(-\Omega)) \\ B(\Omega) &= P\ sen(\varphi(-\Omega)) \end{aligned}}$$

Uma vez que P é uma função par por definição e B é impar.

Extensão domínio frequência

Assim, chega-se à conclusão que

$$\varphi(\Omega) = -\varphi(-\Omega) \quad \Rightarrow \quad \varphi\ (\Omega) \text{ é uma } \textbf{função ímpar} \text{ de } \Omega$$

$$F(\Omega) = |F(\Omega)| e^{i\phi_F(\Omega)} \quad \Rightarrow \quad |F(\Omega)| \ \text{é par}$$

$$\phi_F(\Omega) \ \text{é impar}$$

Assim, a função harmônica pode ser expressa por:

$$f(t) = F(\Omega) e^{i\Omega t} + F(-\Omega) e^{-i\Omega t} \qquad \text{com } \forall\ \Omega$$

$$f(t) = F(\Omega) e^{i\Omega t} + F(-\Omega) e^{-i\Omega t} \qquad \Omega \neq 0$$

Extensão domínio frequência

- Definindo:

$$\Omega_j \triangleq \Omega$$
$$\Omega_{-j} \triangleq -\Omega$$
$$\Omega_0 \triangleq 0$$

Representação de uma harmônica pura somada a uma função (dc) constante

$$f(t) = \sum_{k=-1}^{1} F(\Omega) e^{i\Omega_k t}$$

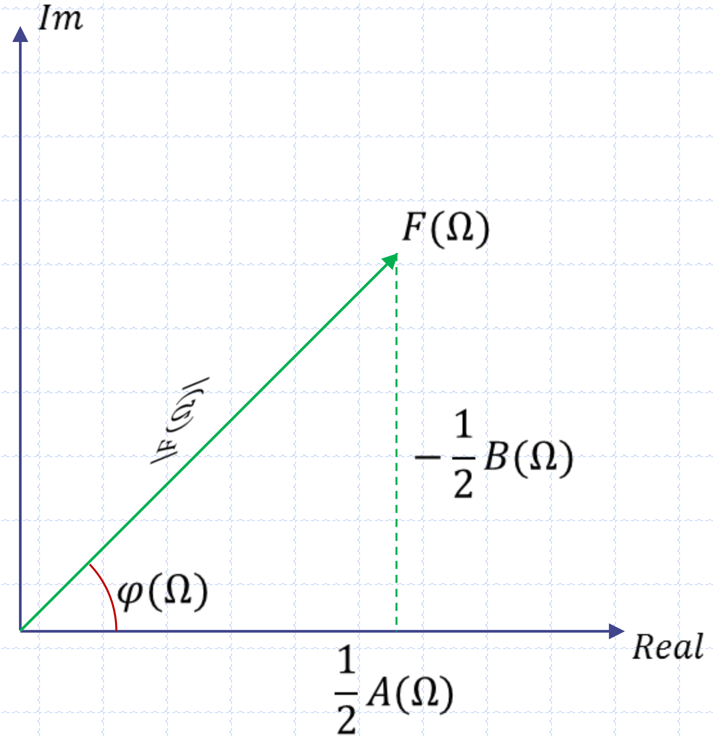
A resultante da soma de n funções harmônicas

$$f(t) = \sum_{k=-n}^{n} F(\Omega) e^{i\Omega_k t}$$

Modelo de Exponenciais Complexas

- Representando graficamente $F(\Omega)$, com $\varphi(\Omega)$ de $(-\pi, +\pi)$
- $\boldsymbol{F(\Omega)}$ possui toda informação do sinal:

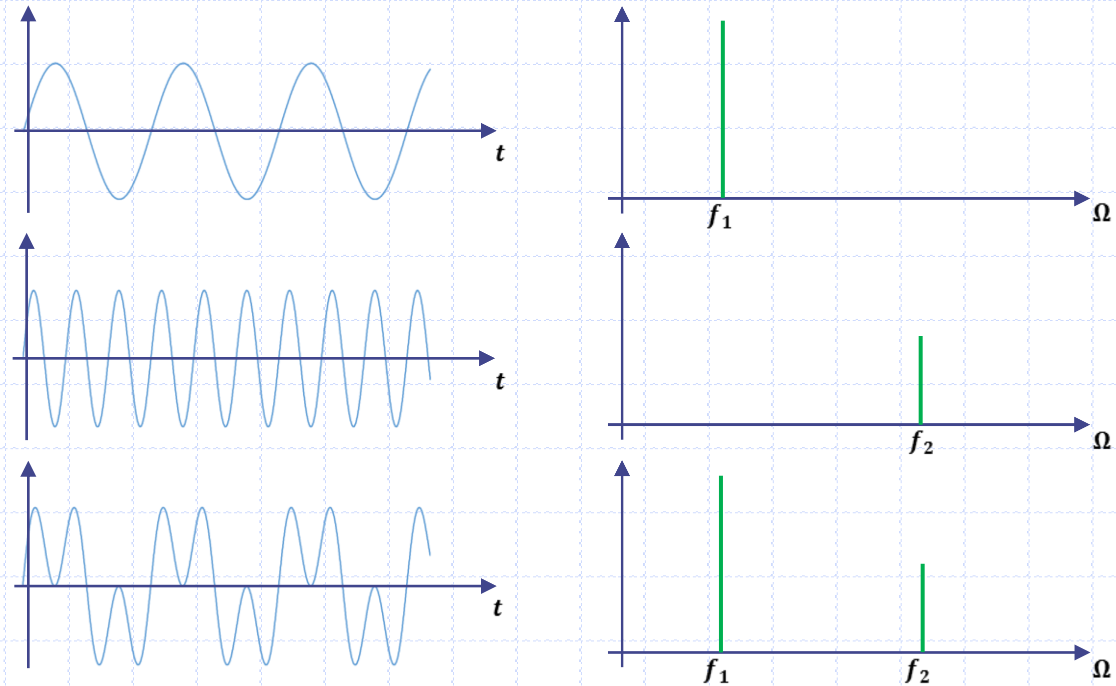
$$AMPLITUDE\ -FASE\ -FREQUÊNCIA$$



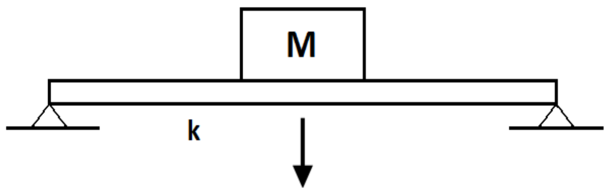
Espectro

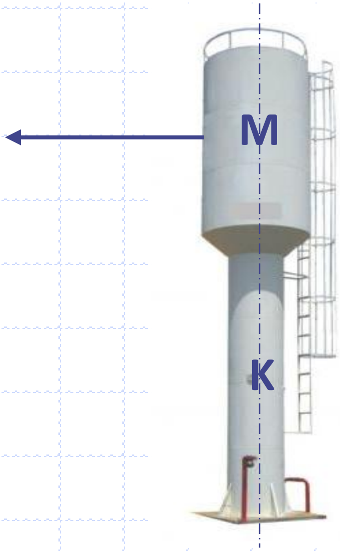
- Modelo matemático preferível utilizado em análise de vibrações;
- Concentra a informação → Magnitude + Frequência;
- Obtido via, para o caso de funções harmônicas, modelo de exponenciais complexas .

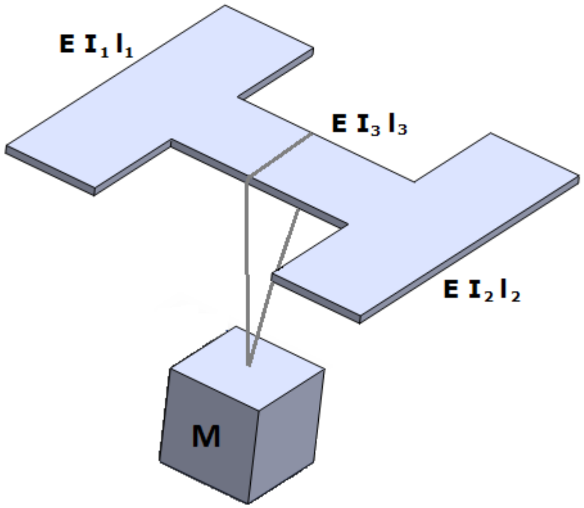
$$E(\Omega) = | F(\Omega) |$$



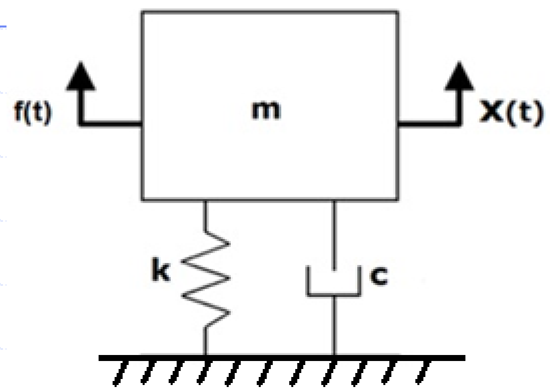
Exemplos de Modelos de 1GL







Sistemas de 1 Grau de Liberdade (1GL)



Modelo equivalente de 1GL

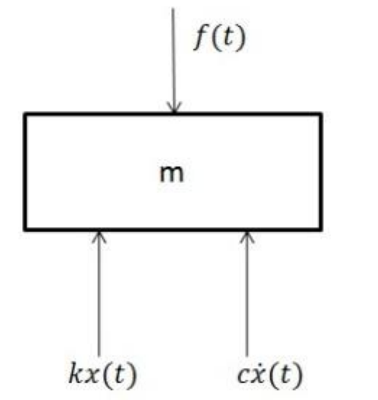


Diagrama de Corpo Livre

$$m\ddot{x}(t)+c\dot{x}(t)+kx(t)=f(t)$$

- Sendo *f(t)* uma excitação harmônica, pode-se reescrever :

$$f(t)=F(\Omega)e^{i\Omega t}$$

$$x(t)=X(\Omega)e^{i\Omega t}$$

$$\dot{x}(t)=i\Omega X(\Omega)e^{i\Omega t}$$

$$\ddot{x}(t)=\Omega^2 X(\Omega)e^{i\Omega t}$$

Sistemas de 1 Grau de Liberdade (1GL)

- Substituindo-as na equação de movimento:

$$\left[-\Omega^2 m + i\Omega c + k\right] X(\Omega) = F(\Omega)$$

$$X(\Omega) = F(\Omega)\,[\alpha(\Omega)] \quad \Rightarrow \quad \boxed{\text{Deslocamento}}$$

$$\boxed{[\alpha(\Omega)] = \frac{X(\Omega)}{F(\Omega)} = \frac{1}{-\Omega^2 m + i\Omega c + k}}$$

FRF – Receptância

Sistemas de 1 Grau de Liberdade (1GL)

- Definindo:

$$V(\Omega) = i\Omega X(\Omega) \qquad A(\Omega) = \Omega^2 X(\Omega)$$

$$\boxed{[\gamma(\Omega)] = \frac{V(\Omega)}{F(\Omega)} = \frac{i\Omega}{-\Omega^2 m + i\Omega c + k}}$$

FRF – Mobilidade

$$\boxed{[S(\Omega)] = \frac{A(\Omega)}{F(\Omega)} = \frac{\Omega^2}{-\Omega^2 m + i\Omega c + k}}$$

FRF – Inertância

Sistemas de 1 Grau de Liberdade (1GL)

- Existem também funções características do sistema obtidas através das relações inversas, para um modelo de um grau de liberdade, da receptância, mobilidade e eniertância:

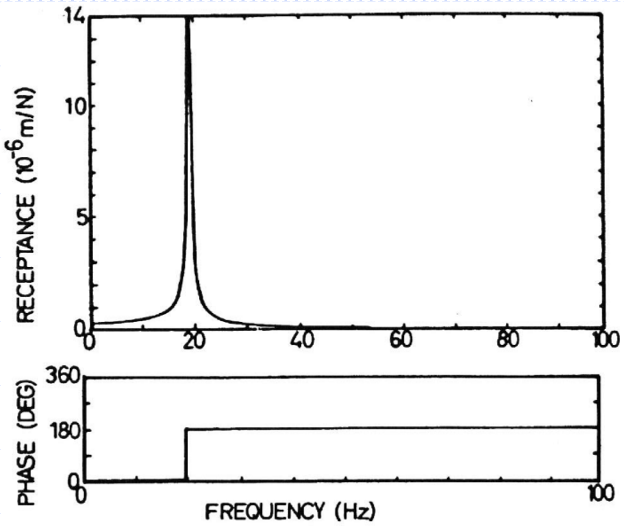
$$\boxed{[K(\Omega)] = \frac{F(\Omega)}{X(\Omega)}} \longrightarrow \boxed{\text{Rigidez dinâmica}}$$

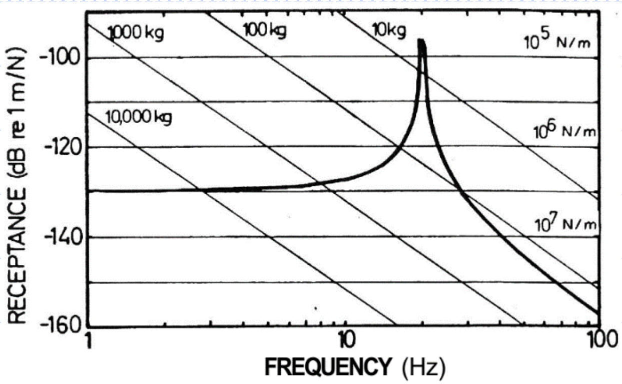
$$\boxed{[Z(\Omega)] = \frac{F(\Omega)}{V(\Omega)}} \longrightarrow \boxed{\text{Impedância mecânica}}$$

$$\boxed{[M(\Omega)] = \frac{F(\Omega)}{A(\Omega)}} \longrightarrow \boxed{\text{Mass dinâmica}}$$

Sistemas de 1 Grau de Liberdade (1GL) – Diagrama de Bode

- Graficamente





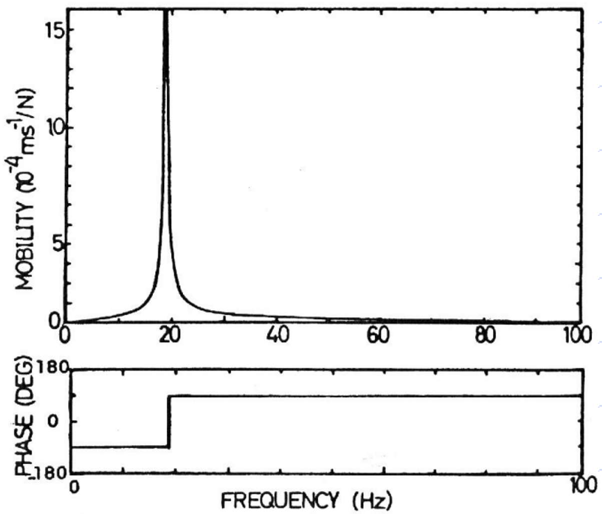
Receptância

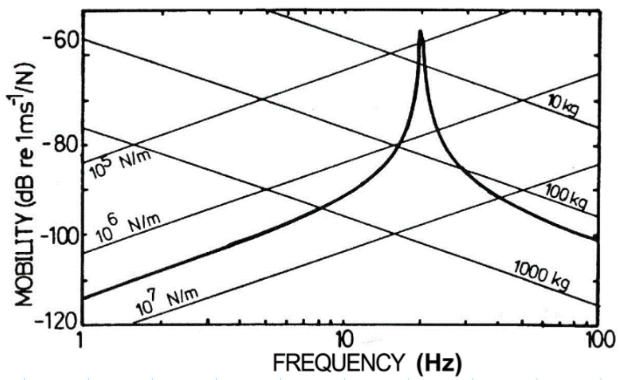
$$\Omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

$$\Omega_{\max} = \Omega_n \sqrt{1-\xi^2}$$

Sistemas de 1 Grau de Liberdade (1GL) – Diagrama de Bode

- Graficamente



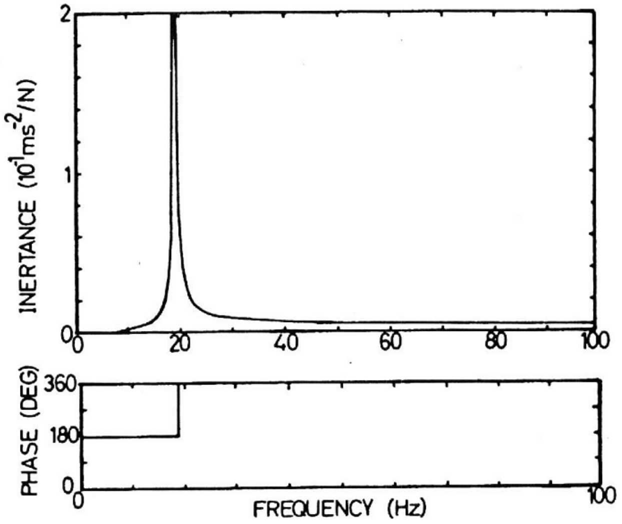


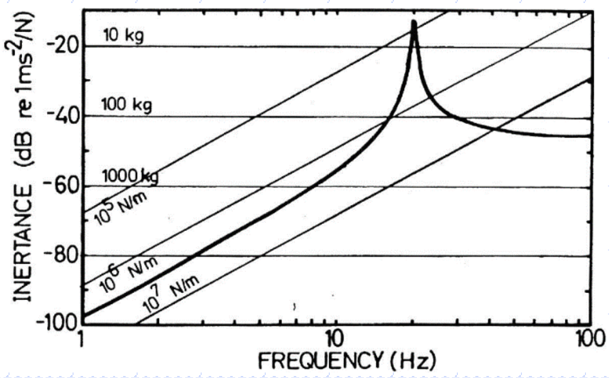
Mobilidade

$$\Omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

$$\Omega_{\max} = \Omega_n$$

◆ Sistemas de 1 Grau de Liberdade – Diagrama de Bode (dB)





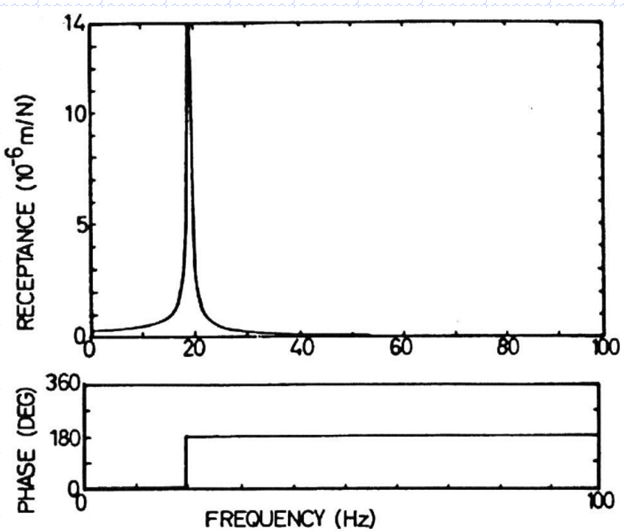
Inertância

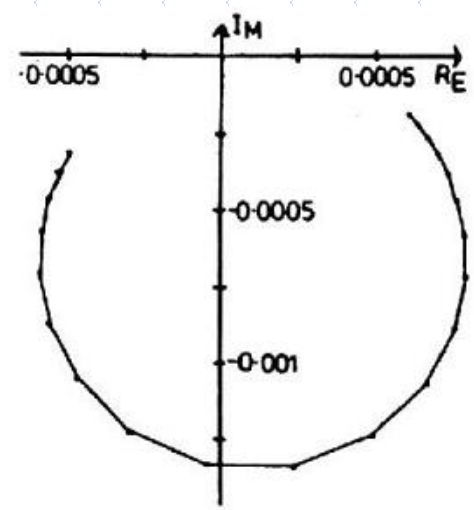
$$\Omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

$$\Omega_{max} = \frac{\Omega_n}{\sqrt{1-\xi^2}}$$

Sistemas de 1 Grau de Liberdade (1GL) – Diagrama de Nyquist

- Graficamente

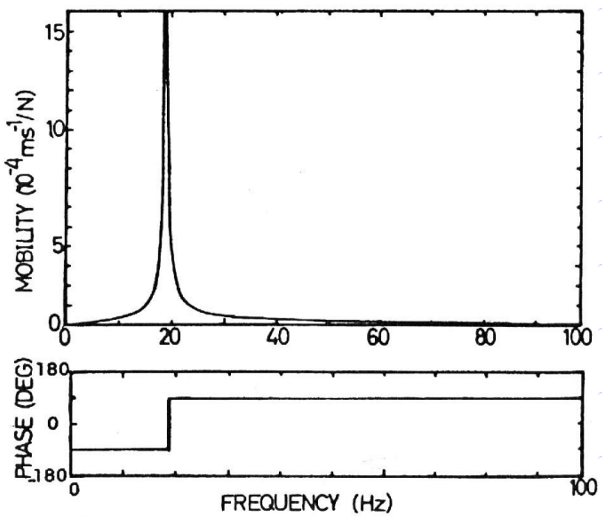


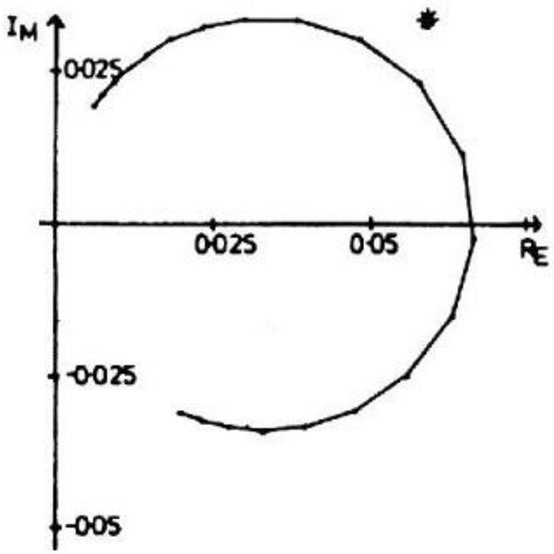


Receptância

◈ Sistemas de 1 Grau de Liberdade (1GL) – Diagrama de Nyquist

- Graficamente

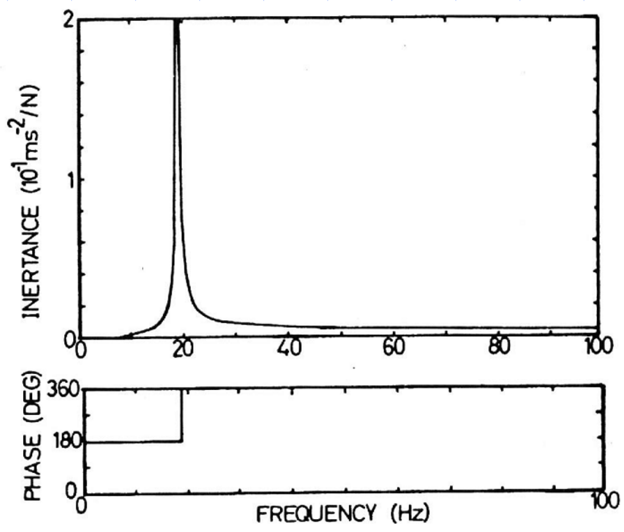


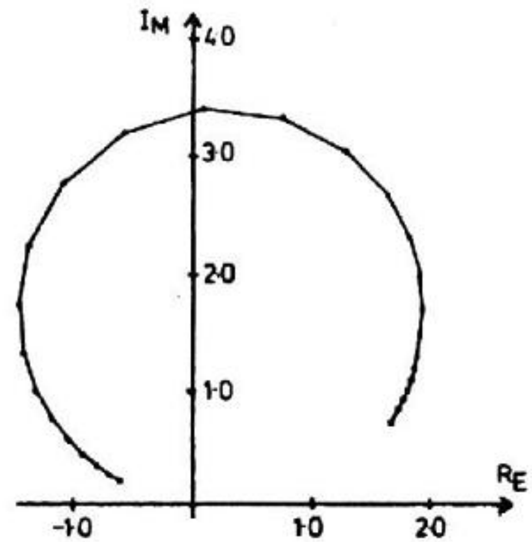


Mobilidade

◆ Sistemas de 1 Grau de Liberdade (1GL) – Diagrama de Nyquist

- Graficamente

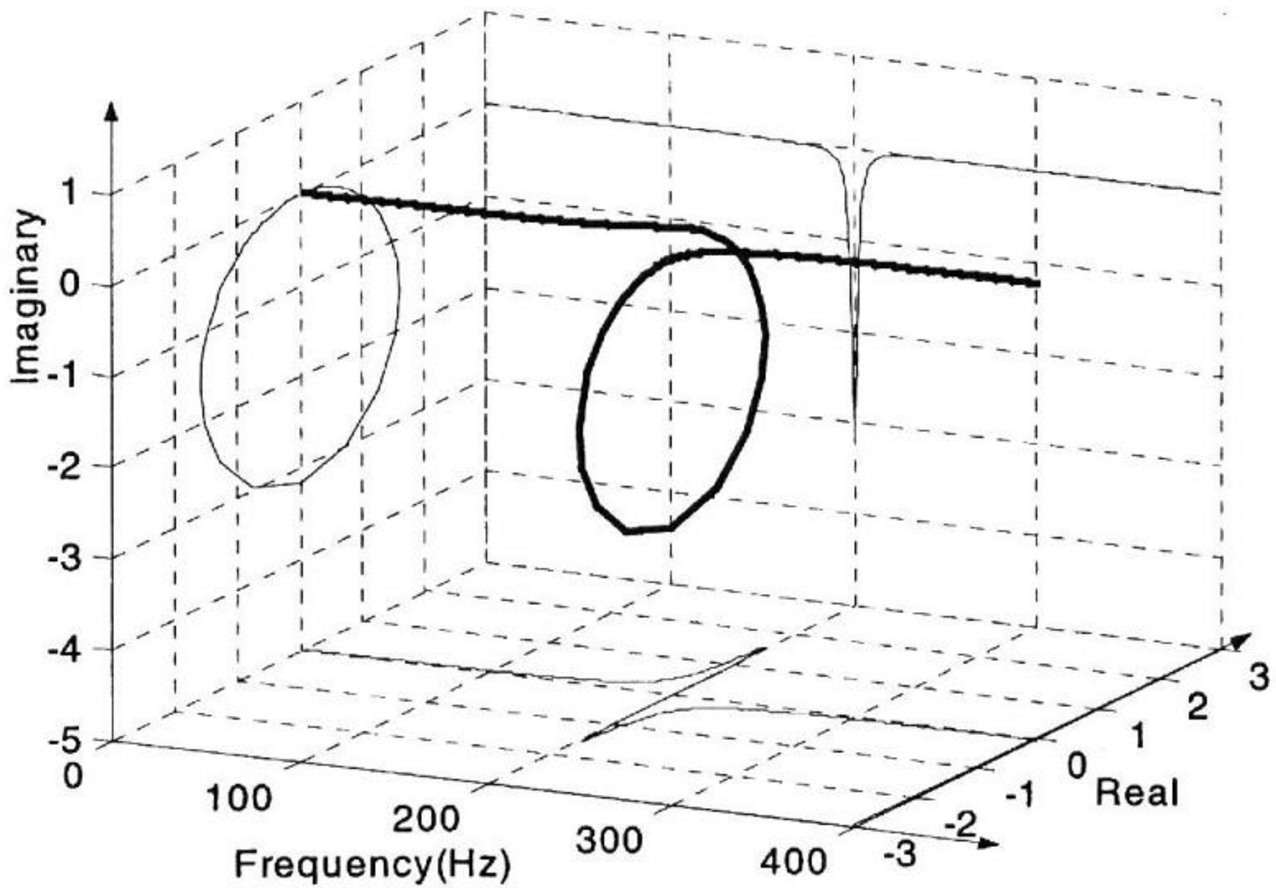




Inertância

◆ Sistemas de 1 Grau de Liberdade (1GL) – FRF

- Representação em 3D de uma FRF



Instabilidade (vibração livre)

- Pequenas perturbações → Grandes deslocamentos;
- Amplificação crescente da resposta do sistema
- Pode provocar graves danos a uma estrutura ou parte dela;
- Não há excitação forçada e sem perturbações, isto é, $f(t)=0$;

Instabilidade (vibração livre)

- Assim, dada a seguinte equação homogênea

$$m\ddot{x}(t)+c\dot{x}(t)+kx(t)=0$$

- Considerando a resposta como: $x(t)=C\ e^{st}$

- Substituindo na equação diferencial, tem-se:

$$\left(ms^2+cs+k\right)e^{st}=0$$

- Para se ter a solução ≠ da trivial:

$$ms^2+cs+k=0 \longrightarrow \text{Eq. característica}$$

Instabilidade (vibração livre)

- Solução:

$$\boxed{s_{1,2} = \frac{-c \pm \sqrt{c^2 - 4mk}}{2m} = -\frac{c}{2m} \pm \sqrt{\left(\frac{c}{2m}\right)^2 - \frac{k}{m}}}$$

- Tendo a resposta para o par de raízes da eq. anterior, com amortecimento <u>subcrítico ($0 < \xi < 1$)</u> :

$$x(t) = C_1 e^{s_1 t} + C_2 e^{s_2 t}$$

Instabilidade (vibração livre)

- E sabendo que

$$c/m = 2\xi\Omega_n \qquad k/m = \Omega_n^2 \qquad \Omega_d = \Omega_n\sqrt{1-\xi^2}$$

- Tem-se

$$\boxed{s_{1,2} = -\xi\,\Omega_n \pm \Omega_d}$$

- Com isto temos a seguinte resposta do sistema:

$$x(t) = e^{-\xi\,\Omega_n t}\left(C_1 e^{i\Omega_d t} + C_2\, e^{-i\Omega_d t}\right)$$

$$x(t) = e^{-\xi\,\Omega_n t}\left(A\cos\Omega_d t + B\sin\Omega_d t\right)$$

Resposta vibratória

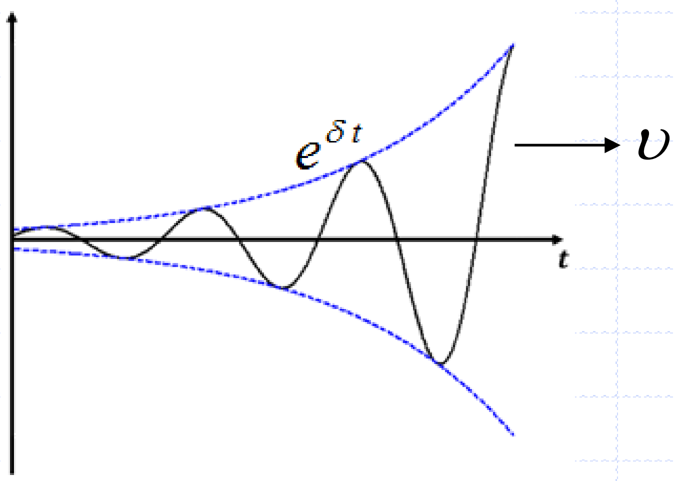
Decremento Exponencial

$$C_1 = C_2^{\,*} = \frac{A - i\,B}{2}$$

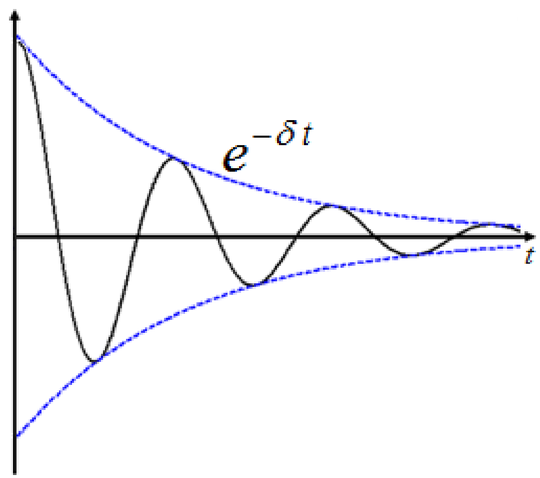
Instabilidade (vibração livre)

$$s_{1,2} = \delta \pm i\upsilon$$

- A instabilidade é dada pelo sinal da parte real (δ) da raiz s. Se a mesma for positiva, o sistema é instável, e vice-versa:



Instável



Estável

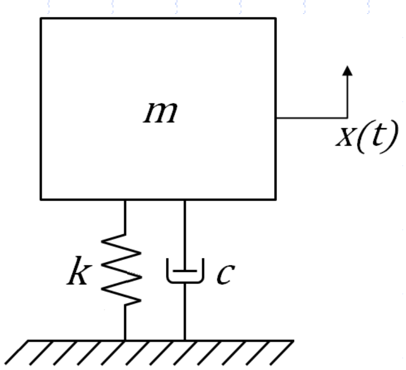
◆ Ressonância (vibração forçada)

- Aparece em sistemas sujeitos à excitação externa *f(t)*;

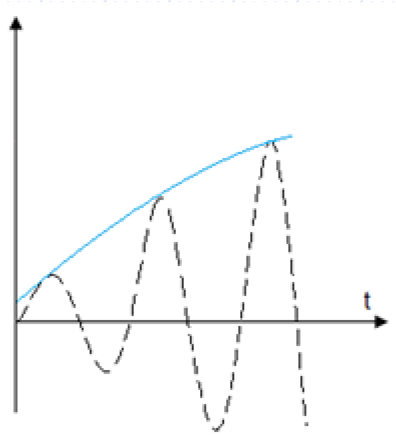
- Ocorre quando uma força de excitação *f(t)* possui uma frequência igual a frequência natural:

$$\frac{\Omega}{\Omega_n} = 1$$

$$x(t) = x_h(t) + x_p(t)$$

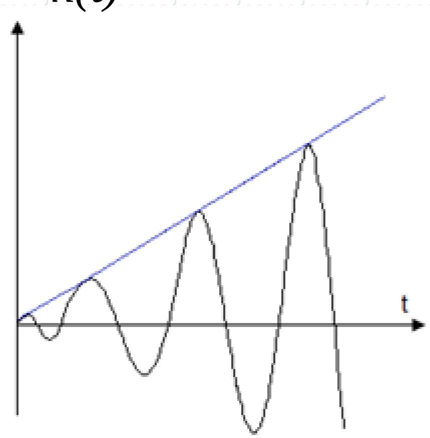


$x(t)$



Sistema amortecido

$x(t)$



Sistema não amortecido

UFPR

UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ

1. TEORIA BÁSICA DE VIBRAÇÕES

B) SÉRIE, ESPECTRO E TRANSFORMADA DE FOURIER

Série de Fourier

- Seja $f(t)$ uma função periódica com período $\Omega_1=2\pi/T$

- Fourier afirmou que uma função periódica pode ser representada por uma série de funções harmônicas:

$$\boxed{f(t)=\sum_{j=-\infty}^{+\infty} F(\Omega_j)\, e^{i\Omega_j t}}, \qquad \Omega_j = j\Omega_1, \qquad j=0,\pm1,\pm2,\ldots$$

- Para conhecer o valor de $F(\Omega_j)$, multiplicamos a ambos lados da equação por $e^{-i\Omega_n t}$ e integramos em um período T.

$$\int_T f(t) e^{i\Omega_n t}\, dt = \int_T \sum_{j=-\infty}^{+\infty} F(\Omega_j) e^{i(\Omega_j-\Omega_n)t} dt$$

Série de Fourier

- Como:

$$\int_T e^{i(\Omega_j-\Omega_n)t}\,dt = \begin{cases} T, \text{se } j = n \\ 0, \text{se } j \neq n \end{cases}$$

- Onde:

$$\Omega_n = n\Omega_1, \qquad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

$$\Omega_1 = 2\pi / T$$

- Assim:

$$\boxed{F(\Omega_n) = \frac{1}{T}\int_T f(t)\,e^{-i\Omega_n t}\,dt}$$

Série de Fourier

- Devemos ter cuidado com $F(\Omega)$, este será nulo para $\Omega \neq \Omega_j$ = jΩj ;
- Se $\Omega_0=0$

$$F(0)=\frac{1}{T}\int_T f(t)\,dt$$

conhecido como valor médio de *f(t)*.

<u>NOTA:</u>

- Salvo para algumas funções simples o cálculo dos coeficientes da Série de Fourier é complicado se tentarmos realizar uma integração direta;
- Na prática, geralmente não se tem *f(t)* em forma analítica. O que se obtém ou se dispõe são alguns valores de *f(t)* através de medições em campo → se deve realizar uma integração numérica.

Série de Fourier

- A série de Fourier nos diz que a energia de um sinal periódico é transportada em determinadas freqüências.
- Essas freqüências são: a fundamental e os múltiplos inteiros da fundamental "Ω_1".
- As freqüências múltiplas de Ω_1 são conhecidas como harmônicas.

Espectro de Fourier

Por definição, o espectro de um sinal é dado por

$$E(\Omega) = |F(\Omega)|$$

como F(Ω) é hermitiana → E(Ω) é simétrico

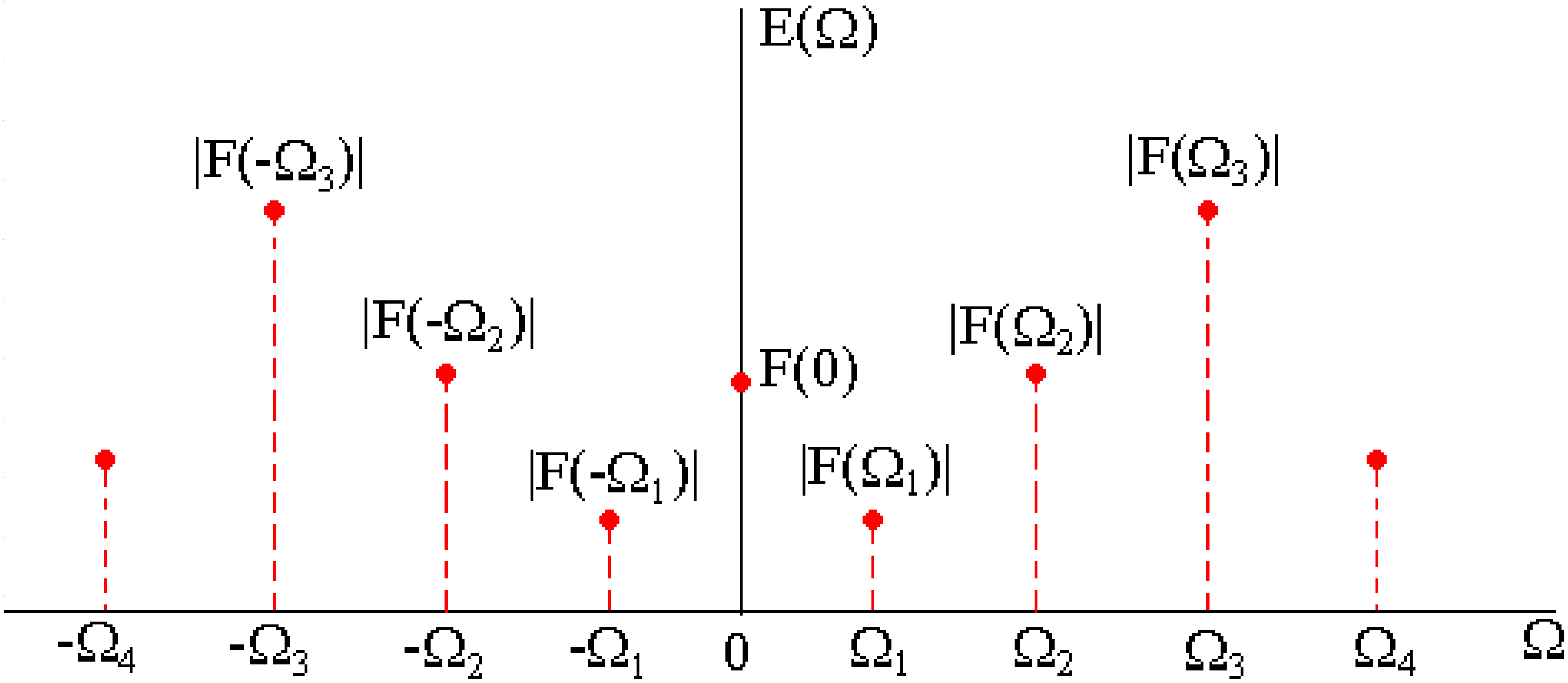
- O espectro de Fourier é discreto já que: $\Omega_j = j\Omega_1, \qquad j = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$

e $\qquad \Omega_1 = \dfrac{2\pi}{T}, \qquad \text{se } \Omega \neq \Omega_j = j\Omega_j \rightarrow E(\Omega) = 0$

- É comum unir o ponto E(Ω_j) ao eixo das freqüências Ω dando origem às LINHAS ESPECTRAIS.

Espectro de Fourier

Espectro de um sinal periodico



Espectro de Fourier

Nota:

- Um gráfico de espectro de Fourier mostra em que frequência o sinal carrega energia. Se o sinal é uma onda sonora, o espectro indicará em que frequências (harmônicos) o som é mais forte.

- A maioria das funções periódicas de interesse em vibrações podem ser representadas através da Série de Fourier, tanto para funções contínuas quanto p/ funções contínuas por partes.

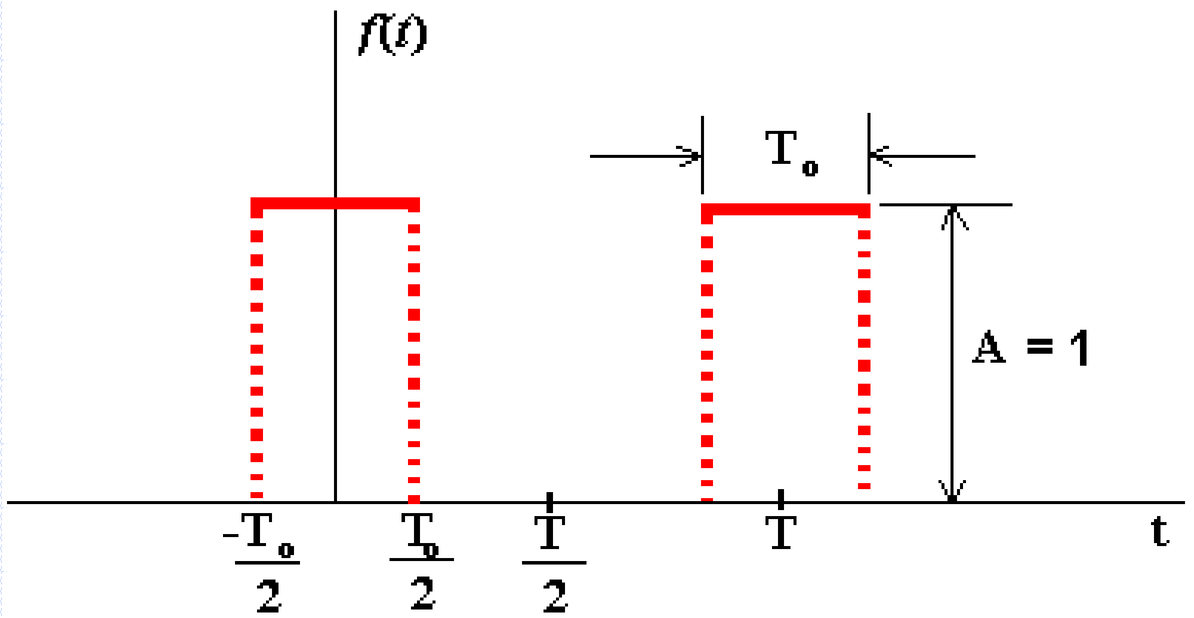
- Toda função que cumpre com as condições de Dirichlet possui representação por série de Fourier. Nas descontinuidades, a serie infinita converge em media para os valores de $x(t)$.

◈ Espectro de Fourier – Exemplo

- Seja *f(t)* dada pela figura abaixo (de período T)

$$f(t) = \begin{cases} 1, & se \quad |t| < T_0/2 \\ 0, & se \quad T_0/2 < |t| < T/2 \end{cases}$$

$\boldsymbol{T = m\, T_0}$



Espectro de Fourier – Exemplo

- Os coeficientes de Fourier (amplitudes complexas harmônicas)

$$F\left(\Omega_j\right) = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f\left(t\right) e^{-i\Omega_j t} dt = \frac{A}{T}\frac{e^{-i\Omega_j t}}{-i\Omega_j}\Bigg|_{-T_o/2}^{T_o/2}$$

$$F\left(\Omega_j\right) = \frac{2A}{T}\frac{\sin \Omega_j \, T_0/2}{\Omega_j}$$

como: $T = \dfrac{2\pi}{\Omega_1}; \quad \Omega_1 = \dfrac{\Omega_j}{j} \rightarrow T = \dfrac{j\,2\pi}{\Omega_j}$

Espectro de Fourier – Exemplo

- Pode-se provar que:

$$F(\Omega_j) = \frac{A}{m} \frac{\sin {}^{j\pi}\!/_{m}}{{}^{j\pi}\!/_{m}} \Rightarrow \text{como } f(t) \text{ é par}, F(\Omega) \text{ é real}$$

- Os coeficientes ficam definidos por:

$$F(0) = \frac{A}{m}; \quad j = 0 \qquad\qquad F(\Omega_j) = \frac{A}{j\pi} \sin\left(\frac{j\pi}{m}\right) \quad j \neq 0$$

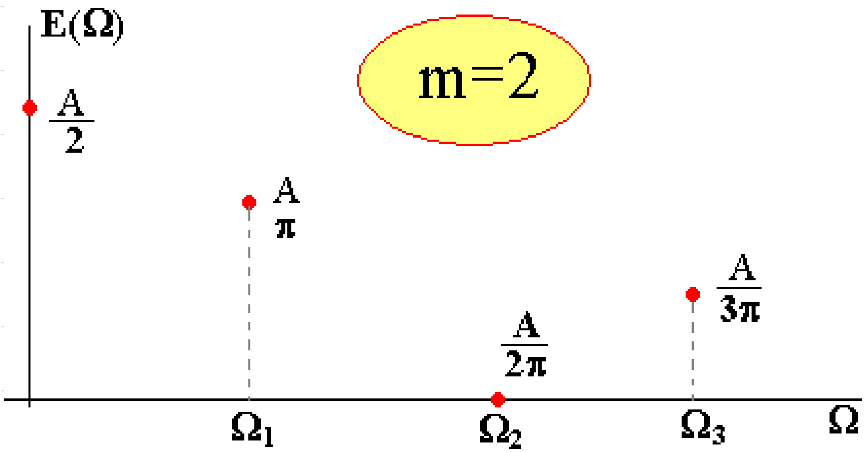
Espectro de Fourier – Exemplo

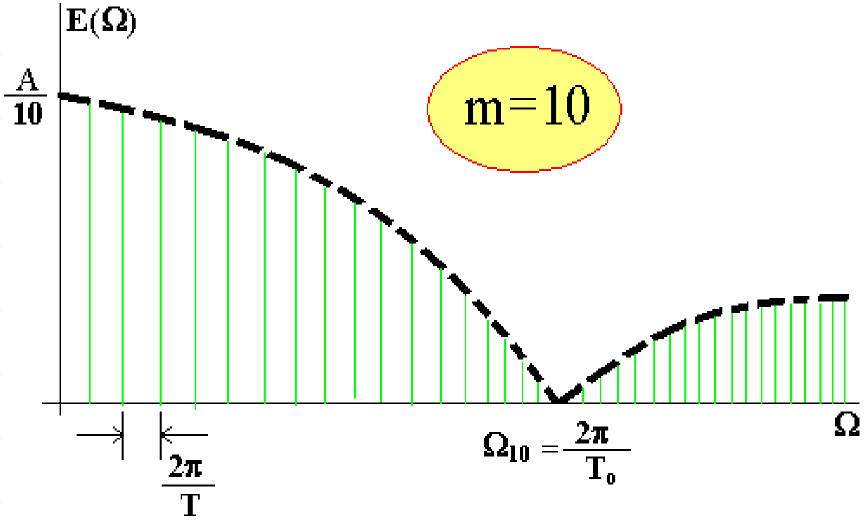
- As figuras abaixo mostram o espectro de Fourier para os valores de m=2 e m=10, como:

T_o = **cte**
T = **variável**

$$m\Omega_1 = \frac{2\pi}{T_o}$$

$$T = mT_o$$





Transformada de Fourier

- No exemplo anterior vimos que a medida que $m \uparrow \rightarrow E(\Omega) \downarrow$;

- Também vimos que o número de linhas espectrais entre $\Omega=0$ e $\Omega=2\pi/T$ aumenta proporcionalmente a T e as distancias entre estas $(2\pi/T)$ são reduzidas a zero.

- Se tomarmos o produto:

$$F(\Omega_j)T = \int_{-T/2}^{T/2} f(t)\, e^{-i\Omega_j t} dt$$

poderá ser finito quando $T \rightarrow \infty$, isto é, o espectro poderá não desaparecer quando $T \rightarrow \infty$

Transformada de Fourier

- Isto é, se T$\rightarrow\infty$, $\Omega_1=2\pi/T_0$ tende a zero. Chamando $j\Omega_1=\Omega$, já que j $\rightarrow\infty$:

$$\lim_{T\to\infty} F(j\Omega_1)\,T \Rightarrow \boxed{F(\Omega)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,e^{-i\Omega t}\,dt}$$

TRANSFORMADA DE FOURIER

- Partindo da Série de Fourier é possível definir a Transformada Inversa de Fourier

$$f(t)=\sum_{j=-\infty}^{\infty} F(j\Omega_1)\,e^{i\,j\Omega_1 t}=\frac{1}{T}\sum_{j=-\infty}^{\infty} F(j\,\Omega_1)T\,e^{i\,j\Omega_1 t}$$

$$=\frac{1}{2\pi}\sum_{j=-\infty}^{\infty} F(j\,\Omega_1)T\,e^{i\,j\Omega_1 t}\,\Omega_1$$

Pois: $T={}^{2\pi}\!/_{\Omega_1}$

Transformada de Fourier

- Fazendo $\Omega 1=\Delta\Omega$:

$$f(t)=\frac{1}{2\pi}\sum_{j=-\infty}^{\infty}F(j\Omega_1)T\,e^{i\,j\Omega_1 t}\,\Delta\Omega$$

- Tomando: $\lim\limits_{T\to\infty} \Rightarrow \boxed{f(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}F(\Omega)e^{i\Omega t}d\Omega}$

$$j\,\Omega_1 \to \Omega$$

TRANSFORMADA INVERSA DE FOURIER

- Se esta integral existe, se diz que $F(\Omega)$ é a Transformada de Fourier de $f(t)$ e conhecendo esta, $f(t)$ pode ser recuperado.

- Este par de equações é denominado de ***Par de Fourier***.

$$F(\Omega)=\Im(f(t)) \qquad\qquad f(t)=\Im^{-1}(F(\Omega))$$

Existência da Transformada de Fourier

Existência de $F(\Omega)$:

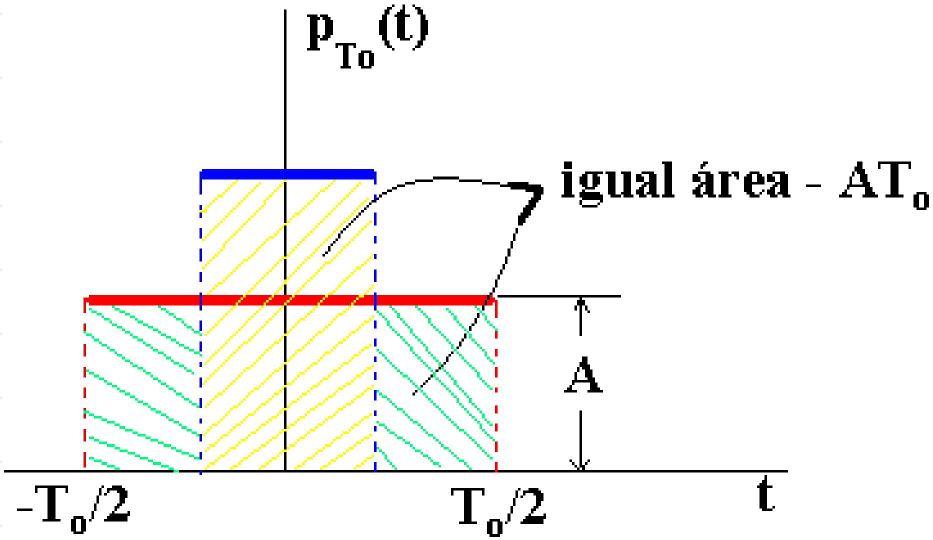
A existência de $F(\Omega)$ é garantida se:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|\, dt < \infty$$

- Portanto, a função $f(t)$ é absolutamente convergente.
- As funções periódicas não são absolutamente convergentes;
- Portanto, não são "Fourier Transformáveis".

Transformada de Fourier – Exemplo 1

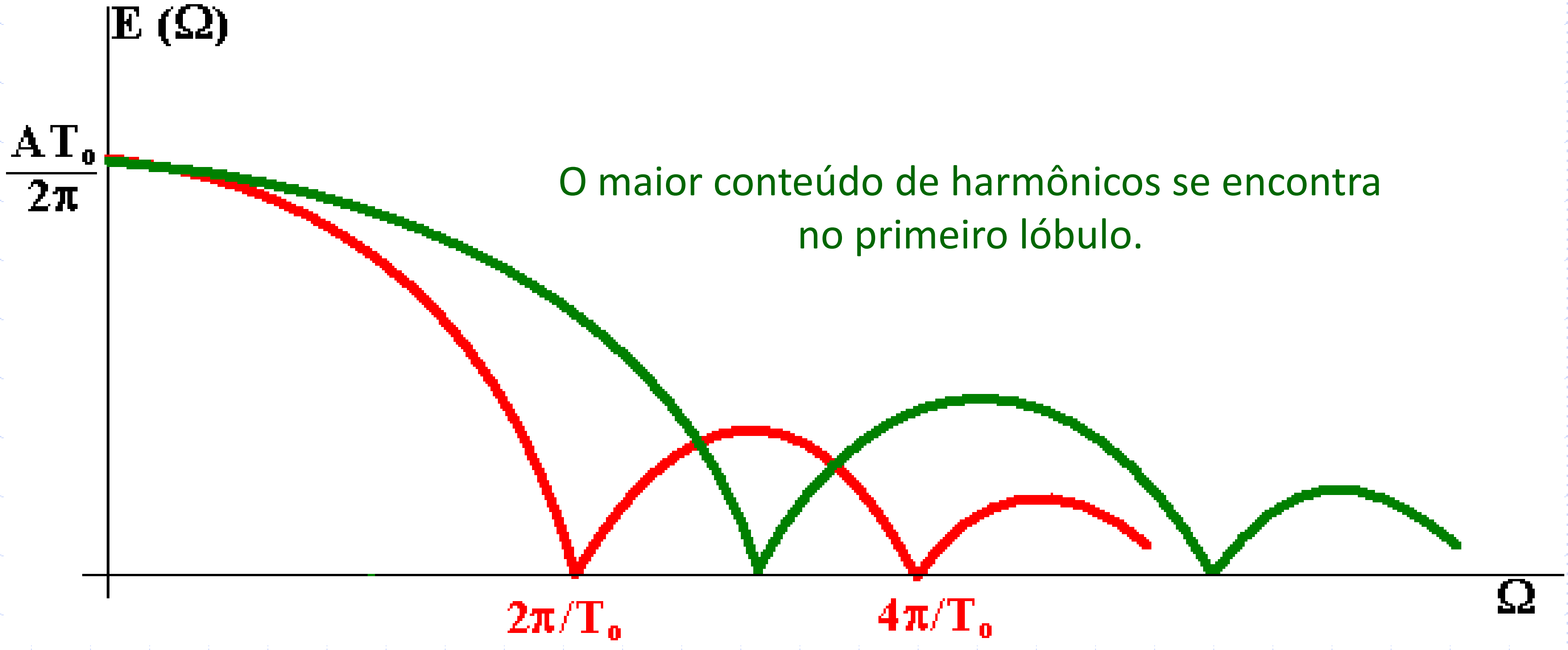
$$F(\Omega) = \frac{A}{2\pi}\int_{-To/2}^{To/2} e^{-i\Omega t}\,dt = \frac{A}{2\pi}\;\frac{\left. e^{-i\Omega t}\right|_{-To/2}^{To/2}}{-i\Omega}$$



- A função anterior (função portão) tem conteúdo harmônico nulo em $2\pi/T_0$ não conduz energia;

Transformada de Fourier – Exemplo 2

$$F(\Omega)=\frac{AT_0}{2\pi}\;\frac{\sin\left(\Omega T_0/2\right)}{\Omega T_0/2}$$



Transformada de Fourier – Exemplo 2

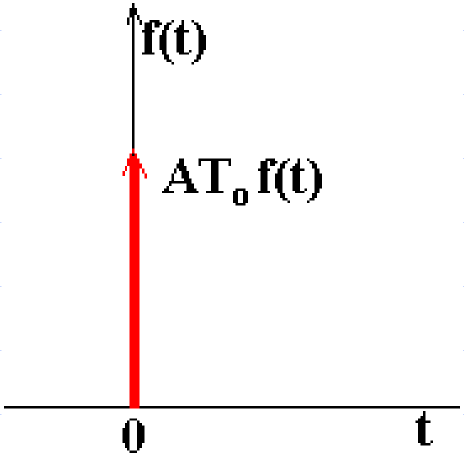
- Se o impulso se mantém constante, enquanto $T_o \to 0$ ($A \to \infty$) então no limite tende a:

$$f(t) = AT_o\delta(t)$$

sendo $\delta(t)$ a "Função Impulso Unitária de Dirac".

$$\delta(t) = \begin{cases} \infty & \text{se} \quad t=0 \\ 0 & \text{se} \quad t \neq 0 \end{cases} \qquad \int_{-\varepsilon}^{+\varepsilon} \delta(t)\,dt = 1, \quad \varepsilon > 0$$

A função $\delta(t)$ é representa na figura ao lado:



$AT_o\delta(t) \Rightarrow$ é um impulso de intensidade AT_o

$\delta(t) \Rightarrow$ é um impulso unitário

Transformada de Fourier – Exemplo 2

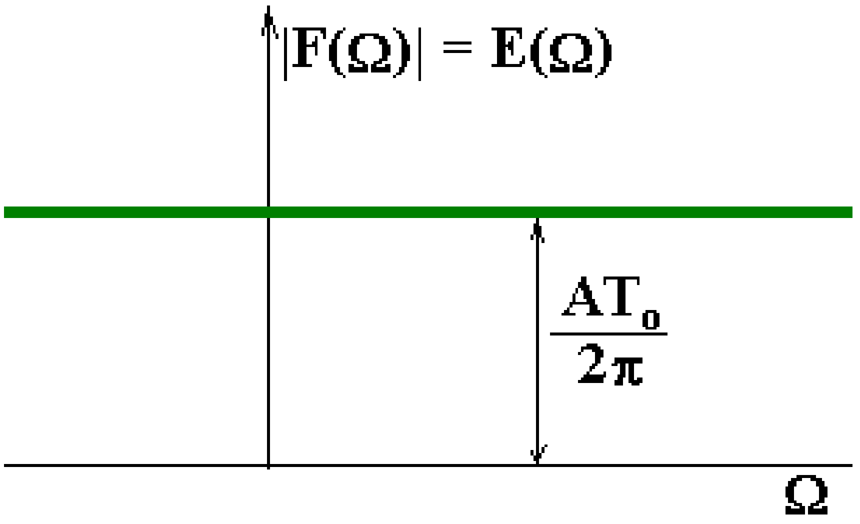
Obs: obviamente os pontos $2\pi/T_o\ ,\quad 4\pi/T_o\ ,\cdots$ tendem para infinito quando $T_o \to 0$

- Por outro lado, se $T_o \to 0$ (x=0):

aplicando o teorema de L'Hôpital $$\lim_{x \to 0} \frac{\sin\ x}{x} = 1$$

$$\Im\left(f\left(t\right)\right) = \frac{AT_o}{2\pi}$$

por conseguinte; $$\Im(\delta(t)) = \frac{1}{2\pi}$$



Transformada de Fourier – Exemplo 2

- A função impulso tem conteúdo harmônico uniforme em toda a faixa de frequência $-\infty, +\infty$;

- Também vimos que a medida que $T_o \to 0$, o conteúdo harmônico de $f(t)$ cresce nas altas frequências

Observações:

- Este fato é fundamental nos "testes" de impacto. $\left({}^{2\pi}\!/_{T_o} \to \infty \right)$
- Todas as frequências são excitadas com a mesma amplitude, o sistema responde mostrando suas características dinâmicas, se mostra como ele é.

Propriedades da Transformada de Fourier

<u>Linearidade:</u>

Se

$$F_1(\Omega)=\Im\left(f_1(t)\right) \quad \text{e} \quad F_2(\Omega)=\Im\left(f_2(t)\right)$$

com a_1, a_2 constantes reais.

$$\Im\left(a_1 f_1(t)+a_1 f_1(t)\right)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\left[a_1 f_1(t)+a_1 f_1(t)\right]e^{-i\Omega t}dt$$

$$=\frac{a_1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} f_1(t)e^{-i\Omega t}dt+\frac{a_2}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} f_2(t)e^{-i\Omega t}dt$$

$$=a_1\Im\left(f_1(t)\right)+a_2\Im\left(f_2(t)\right)$$

$$\boxed{=a_1 F_1(\Omega)+a_2 F_2(\Omega)}$$

Propriedades da Transformada de Fourier

Escala no tempo

Se: $$F(\Omega)=\Im(f(t))\Rightarrow \Im(f(at))=\frac{1}{|a|}F\left(\frac{\Omega}{a}\right)$$

- Esta propriedade diz que ampliando - (reduzindo) a escala de tempo se reduz (amplia) a frequência.

$$\Im(f(-t))=F(-\Omega)$$

Consequência:

- Propriedade de escala na frequência.

$$F(\Omega)=\Im(f(t))\Rightarrow \Im^{-1}(F(a\Omega))=\frac{1}{|a|}f\left(\frac{t}{a}\right)$$

Propriedades da Transformada de Fourier

Teorema de Deslocamento no Tempo e na Frequência:

$$F(\Omega)=\Im(f(t))\Rightarrow \Im(f(t-t_o))=F(\Omega)e^{-i\Omega t_0}$$

- Teorema de Deslocamento na Frequência:

$$\boxed{\Im\left(f(t)e^{i\Omega_o t}\right)=F(\Omega-\Omega_o)}$$

- Conseqüência:

$$\boxed{\Im(f(t)\cos\Omega_o t)=\frac{1}{2}F(\Omega-\Omega_o)+\frac{1}{2}F(\Omega+\Omega_o)}$$

Transformada de Fourier

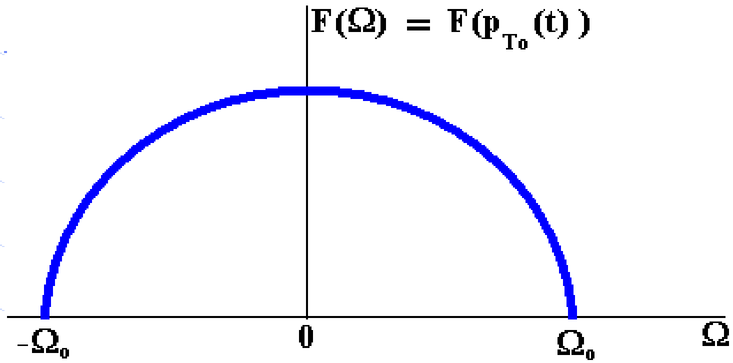
Exemplo: consideremos, novamente, a função portão:

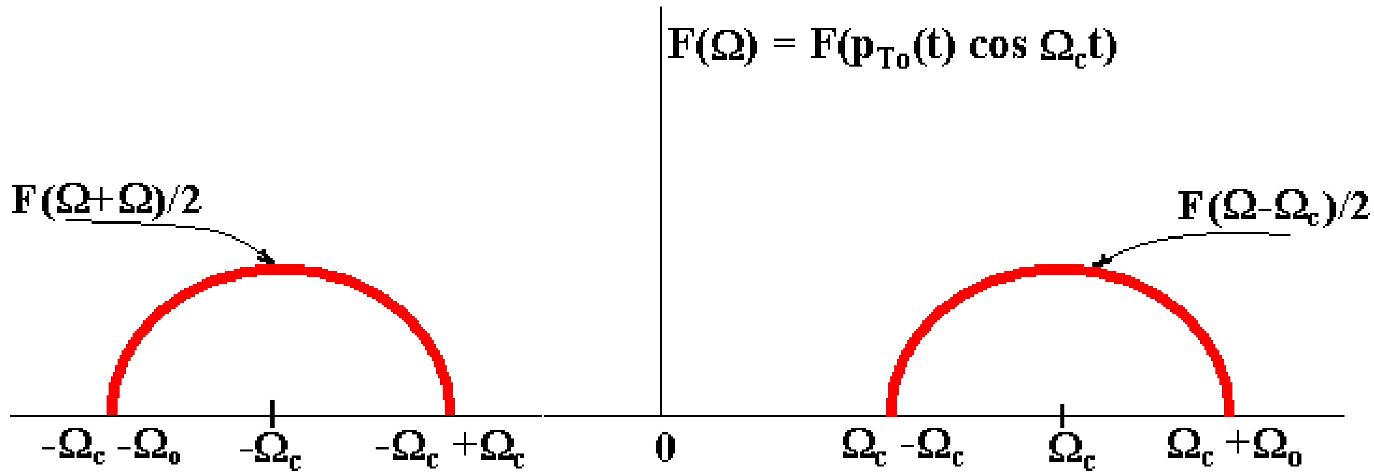
$$p_{T_o}(t) = \begin{cases} A & \text{para} \quad |t| < T_o/2 \\ 0 & \text{para} \quad |t| > T_o/2 \end{cases}$$

- A função $p_{T_o}(t)\cos\Omega_c t$ representa uma parte truncada da função cosseno ou um impulso modulado.
- Considerando a transformada da função portão tem-se:

$$\Im\left(p_{T_o}(t)\cos\Omega_c t\right) = \frac{AT_o}{4\pi}\frac{\sin\left[(\Omega-\Omega_o)T_o/2\right]}{(\Omega-\Omega_o)T_o/2} + \frac{AT_o}{4\pi}\frac{\sin\left[(\Omega+\Omega_o)T_o/2\right]}{(\Omega+\Omega_o)T_o/2}$$

◈ Transformada de Fourier

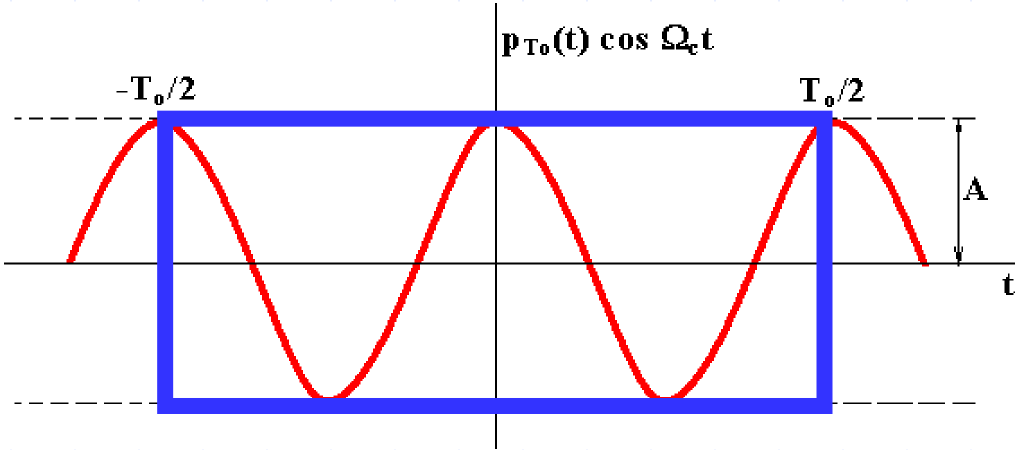


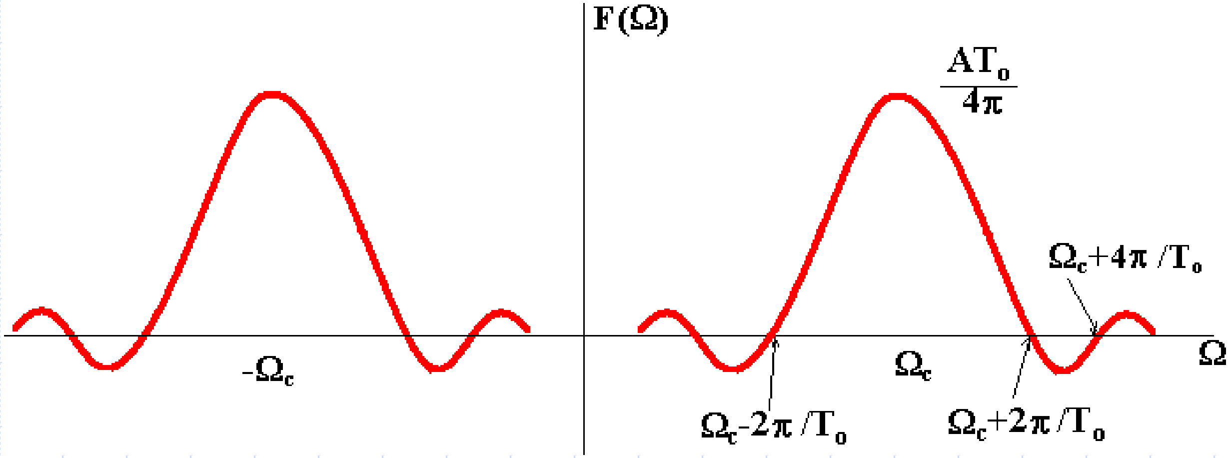


Obs: no exemplo anterior poderíamos ter utilizado, $e^{-i\Omega^{To}/_{2}}$ neste caso, deve utilizar a transformada na frequência apropriada.

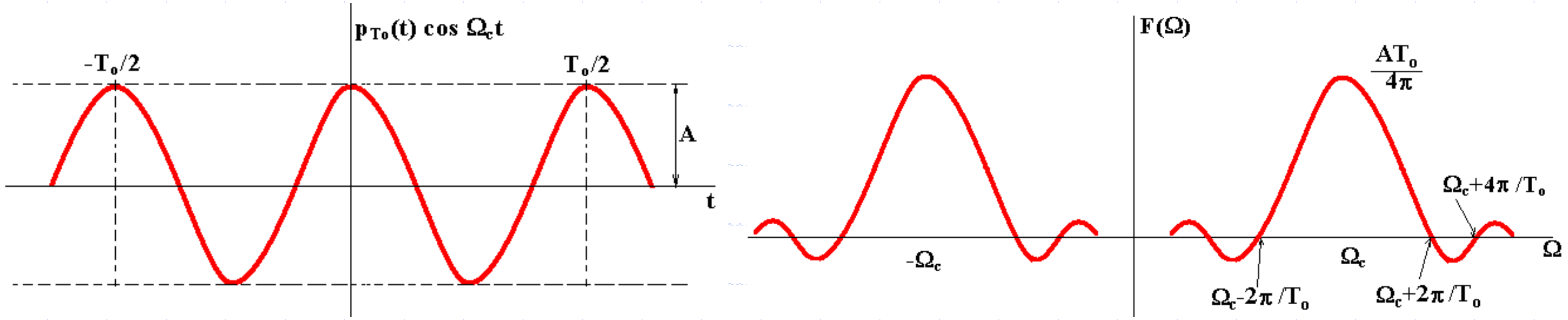
Transformada de Fourier

Exemplo: na pratica quando adquirimos um sinal o que se faz é colocar janelas para limitar o tempo de medição (existem vários tipos de janelas, sendo a mais comum a janela “retangular” ou “portão”).





Transformada de Fourier



- Na prática todas as funções são medidas durante um intervalo de tempo finito;
- A função portão se comporta como uma janela, tomando apenas uma parte da função harmônica, durante T_o segundos;
- Esta parte da função cosseno, não é exatamente uma função cosseno como definida matematicamente não é periódica de -∞ à +∞
- Seu espectro contém mais harmônico que "Ω_c" – quanto menor é T_o maior será o conteúdo de harmônico de medição".
- Se $T_o \rightarrow \infty$ o conteúdo de harmônico se restringe a Ω_c.

Transformada de Fourier

Propriedade de Simetria:

se:

$$F(\Omega) = \Im\big(f(t)\big) \Rightarrow$$

$$\Im\big(F(t)\big) = {f(-\Omega)}\big/{2\pi}$$

demonstração:

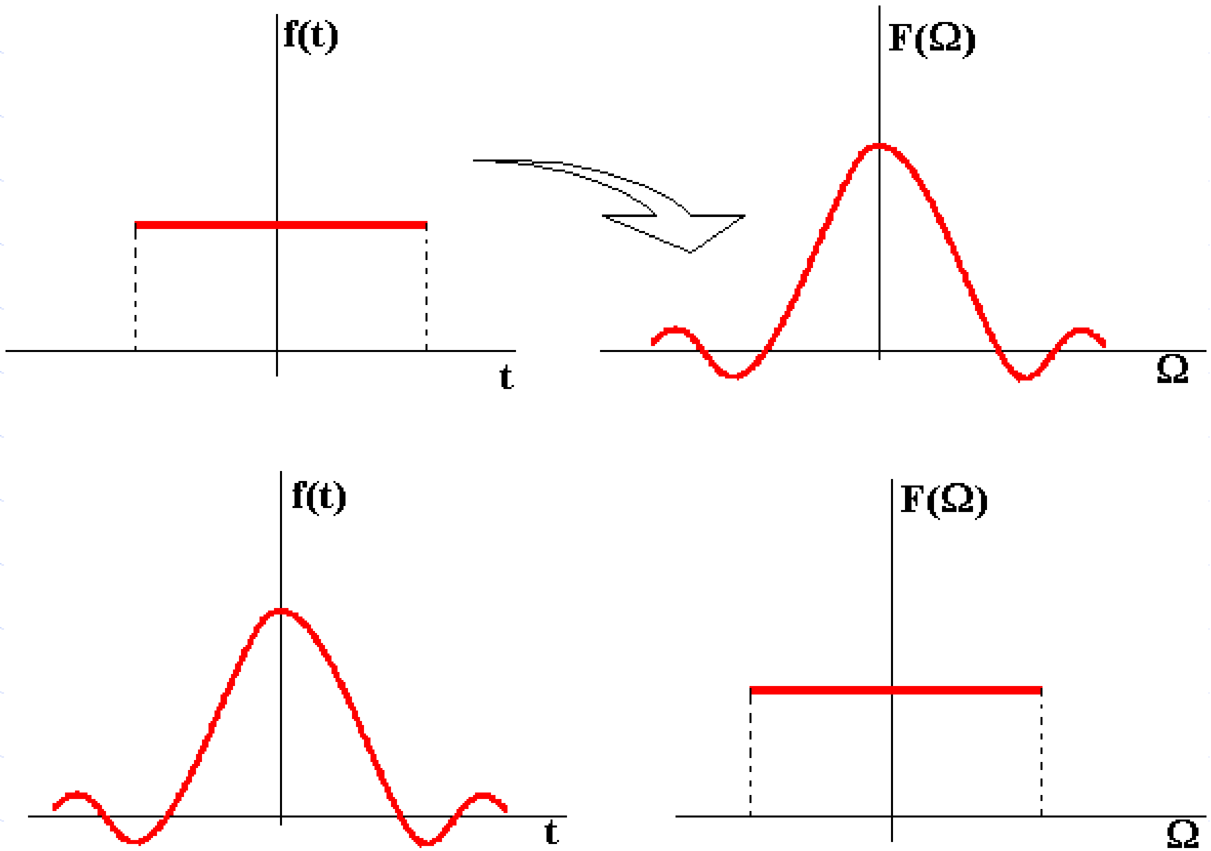
$$f(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} F(\Omega)\, e^{i\Omega t}\, d\Omega \qquad f(-t) = \int_{-\infty}^{+\infty} F(\Omega)\, e^{-i\Omega t}\, d\Omega$$

- Fazendo uma troca de variáveis, trocando Ω por t e % por 2π tem-se:

$$f(-\Omega)\big/_{2\pi} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} F(t)\, e^{-i\Omega t}\, dt = \Im\big(F(t)\big)$$

Transformada de Fourier

Nota: conhecendo a transformada de $f(t)$, consequentemente conhecendo $f\ (t) \rightarrow$ podemos encontrar a transformada de $F(t)$.



Transformada de Fourier

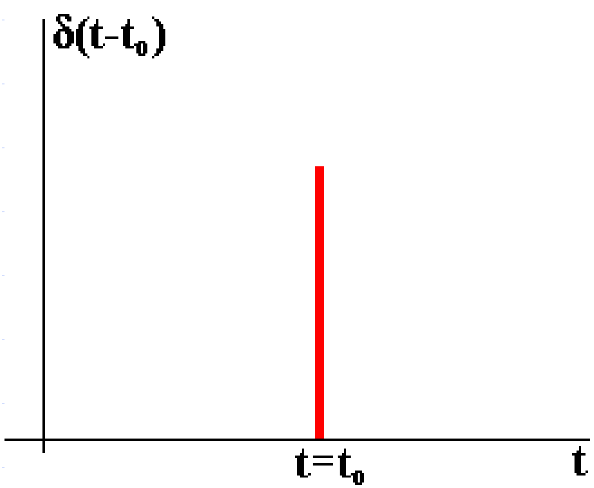
Função Impulso de Dirac:

- Seja $\phi(t)$, uma função continua de t.
- A função impulso unitário de Dirac será definida como uma função simbólica pela relação:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \phi(t)\, \delta(t - t_o)\, dt = \phi(t_o)$$

onde: $\phi(t)$ é a função de prova.

Transformada de Fourier



Desta forma δ (t), pode ser tratado como uma função qualquer sempre que não se pergunte o valor dela para $t=t_o$. Sua representação é:

Algumas Propriedades Importantes:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t)\, \phi(t+t_o)dt = \phi(t_o)$$

Conclui-se que $\delta(t)$ “amostra” a função no valor que o argumento de δ se anula.

Transformada de Fourier

Transformada da função impulso: $$\Im(\delta(t)) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) e^{-i\Omega t} dt$$

por definição do Delta de Dirac:

$$\Im(\delta(t)) = \frac{1}{2\pi} e^{-i\Omega t}\Big|_{t=0} = \frac{1}{2\pi}$$

$$\Im(\delta(t)) = \frac{1}{2\pi}; \forall \Omega \in (-\infty, +\infty)$$

$$\Im^{-1}(1, \Omega \in (-\infty, +\infty)) = 2\pi\,\delta(t)$$

conclusão: $$\Im^{-1}(\delta(\Omega)) = +1. -\infty < t < +\infty$$

$$\Im(1, -\infty < t < +\infty) = \delta(\Omega)$$

Transformada de Fourier

Identidade:

$$\delta(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\Omega t} d\Omega$$

demonstração: $2\pi\delta(t) = \Im^{-1}\left(F(\Omega) = 1, \Omega \in \Re^1\right) = \int_{-\infty}^{+\infty} 1.e^{i\Omega t} dt$

consequência $\rightarrow$

já que: $\delta(t)$ é par

$$\boxed{\delta(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} cos\,\Omega t\ d\Omega}$$

Transformada de Fourier

Transformada de $e^{i\Omega_o t}$

$$\Im\left(e^{i\Omega_o t}\right) = \delta\left(\Omega - \Omega_o\right)$$

- demonstrar usando o teorema

$$\Im\left(f\left(t\right)e^{i\Omega_o t}\right) = F\left(\Omega - \Omega_o\right)$$

considerando a função *f* (*t*) = 1.

Transformada de Fourier

Transformada de cosseno e seno:

- A existência de uma Transformada de Fourier exige que a função seja absolutamente integrável;

- A função $\delta(t)$ não é realmente uma função e sim uma distribuição.

Em termos de função; $$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\Omega t}\, d\Omega$$

não existe, não converge, entretanto é igual a $\delta\,(t)$

Transformada de Fourier

- Veremos como obter a transformada de uma função seno e cosseno, que não são absolutamente integrável, através de uma distribuição.

- Vimos um teorema que diz:

$$\Im\left(f\left(t\right)\cos\Omega_c t\right) = \frac{1}{2}F\left(\Omega - \Omega_c\right) + \frac{1}{2}F\left(\Omega + \Omega_c\right)$$

onde:

$$F\left(\Omega\right) = \Im\left(f\left(t\right)\right)$$

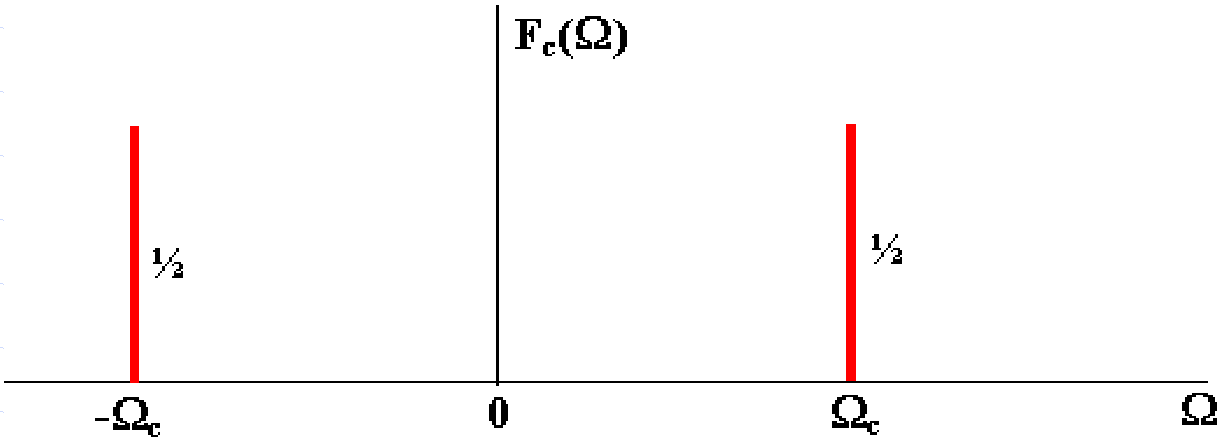
Transformada de Fourier

Transformando:

$$f(t) = 1 \rightarrow F(\Omega) = \delta(\Omega)$$

$$F_c(\Omega) = F(\cos\Omega_c t) = \tfrac{1}{2}\delta(\Omega - \Omega_c) + \tfrac{1}{2}\delta(\Omega + \Omega_c)$$

$$|F(\Omega)| \quad \text{já que} \ \cos\Omega_c t \ \text{é par.}$$



Transformada de Fourier

- De forma similar, a transformada do seno é:

$$F\left(\sin\Omega_c t\right) = -\frac{i}{2}\,\delta\left(\Omega - \Omega_c\right) + \frac{i}{2}\,\delta\left(\Omega + \Omega_c\right)$$

que é uma função ímpar.

Transformada de Fourier

Transformada da Derivada:

Suponhamos que *f(t)* seja uma função derivável em todo o domínio;

$$\Im\left(\dot{f}(t)\right)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\dot{f}(t)\,e^{-i\Omega t}dt$$

- Integrando por partes;

$$u(t)=e^{-i\Omega t}\quad \text{e} \quad dv(t)=\dot{f}(t)dt$$

- Se *f(t)* é absolutamente convergente, o primeiro termo é nulo.

Transformada de Fourier

$$\Im\left(\dot{f}(t)\right) = \frac{1}{2\pi}\, e^{-i\Omega t}\, f(t)\Big|_{-\infty}^{+\infty} + \frac{i\Omega}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\, e^{-i\Omega t}\, dt$$

$$\Im\left(\dot{f}(t)\right) = i\Omega\Im\left(f(t)\right)$$

$$\Im\left(\ddot{f}(t)\right) = -\Omega^2\Im\left(f(t)\right)$$

- De forma geral:

$$\boxed{\Im\left(f^{(n)}(t)\right) = i^n\Omega^n\Im\left(f(t)\right)}$$

Transformada de Fourier

Convolução de Funções:

- Convolução de funções é um conceito importante em dinâmica de sistemas lineares, como será visto mais adiante.

- Dados $f_1(t)$ e $f_2(t)$, a convolução de $f_1(t)$ com $f_2(t)$ é uma terceira função de t definida por:

$$f(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(x)\ f_2(t-x)\ dx$$

- Frequentemente a notação simbólica é: $f(t) = f_1(t) * f_2(t)$

Transformada de Fourier

Algumas propriedades importantes:

COMUTAÇÃO:

$$f_1(t) * f_2(t) = f_2(t) * f_1(t)$$

ASSOCIATIVA:

$$\left(f_1(t) * f_2(t)\right) * f_3(t) = f_1(t) * \left(f_2(t) * f_3(t)\right)$$

Propriedade: a convolução de uma função *f(t)* com $\delta(t)$ = *f(t).*

Transformada de Fourier

<u>Teorema da Convolução no Tempo:</u>

$$\Im\left(f_1(t) * f_2(t)\right) = 2\pi F_1(\Omega) F_2(\Omega)$$

- demonstração:

$$\Im\left(f_1(t) * f_2(t)\right) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\left[\int_{-\infty}^{+\infty} f_1(x) f_2(t-x)\,dx\right] e^{-i\Omega t}\,dt$$

- trocando a ordem de integração;

$$\Im\left(f_1(t) * f_2(t)\right) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(x)\left[\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} f_2(t-x) e^{-i\Omega t}\,dt\right] dx$$

Transformada de Fourier

- se demonstra que;

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} f_2(t-x)e^{-i\Omega t}dt = F_2(\Omega)e^{-i\Omega t}$$

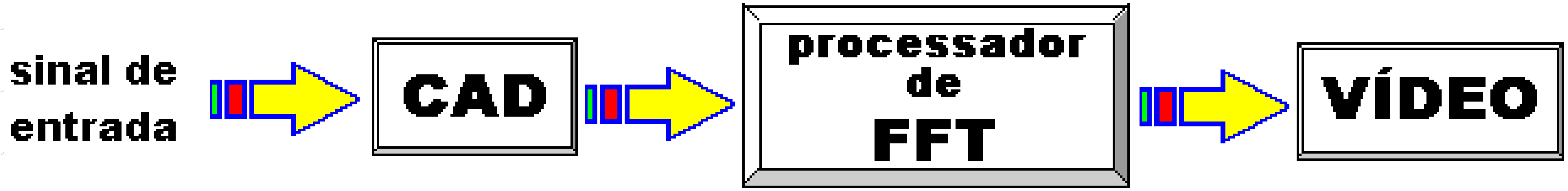
$$\boxed{\Im\left(f_1(t) * f_2(t)\right) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(x) F_2(\Omega) e^{-i\Omega x} dx = 2\pi F_1(\Omega) F_2(\Omega)}$$

<u>Teorema da Convolução na Frequência:</u>

$$\Im\left(F_1(\Omega) * F_2(\Omega)\right) = f_1(t) f_2(t)$$

$$\Im\left(f_1(t) * f_2(t)\right) = F_1(\Omega)F_2(\Omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} F_1(y)F_2(\Omega - y)dy$$

Transformada de Discreta de Fourier



CAD $\rightarrow$ converte um sinal analógico em digital

(em inglês ADC: Analog to Digital Convert);

FFT $\rightarrow$ Transformada Rápida de Fourier (Fast Fourier Transform)

Obs: *(Cooley and TUKEY, 1965)* $\rightarrow$ *2^N pontos reduzem os cálculos de N^2 operações a $N/2 \log_2 N + N/2$soma + $N/2 \log_2 N$ resta* $\rightarrow$ *se N=1024* $\rightarrow$ *200:1*

Transformada de Discreta de Fourier

Observação:

• Na prática, os sinais de vibrações e som possuem formas complicadas. Uma vez mais, não se conhecem suas expressões analíticas.

• Geralmente o que se tem é um sinal elétrico análogo a grandeza que se deseja medir e analisar.

• Nestes casos, o que se faz é “amostrar” o sinal em vários instantes de tempo e calcular a TDF de Fourier, uma aproximação da transformada continua de Fourier (TCF).

Transformada de Discreta de Fourier

Seja *f(t)* um sinal que se deseja transformar para o domínio da frequência:

Transitório

SINAL

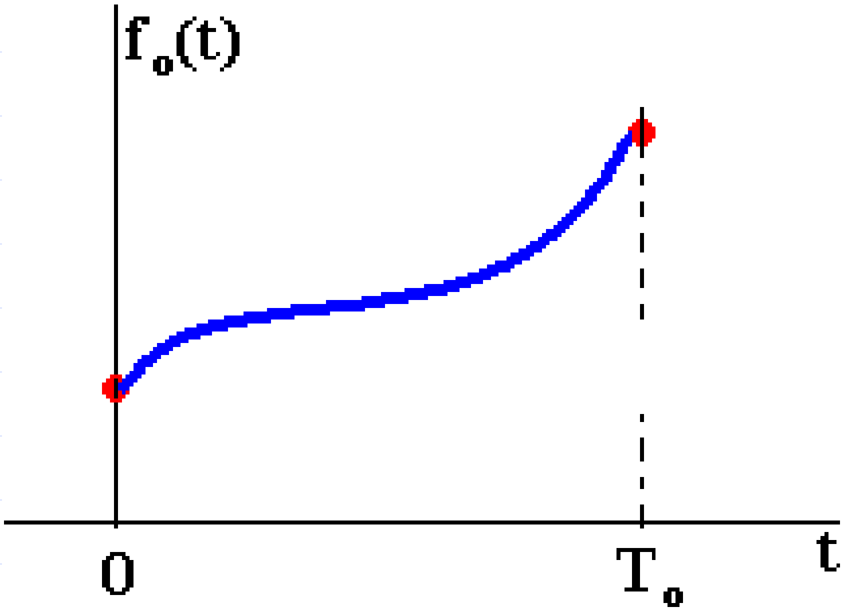
Permanente

- Em ambos os casos existem uma limitação fundamental: o sinal somente pode ser medido durante um tempo finito "T_o";
- Tanto no sinal permanente quanto no transitório (dependendo do amortecimento) informações serão perdidas pela limitação temporal;
- Supõe-se que: a parte do sinal medido contêm as informações suficientes para a análise que se deseja realizar.

Transformada de Discreta de Fourier

Hipóteses: a parte do sinal medido estará entre [0, T_o]. Este último valor será tomado como o período de uma função periódica definida por:

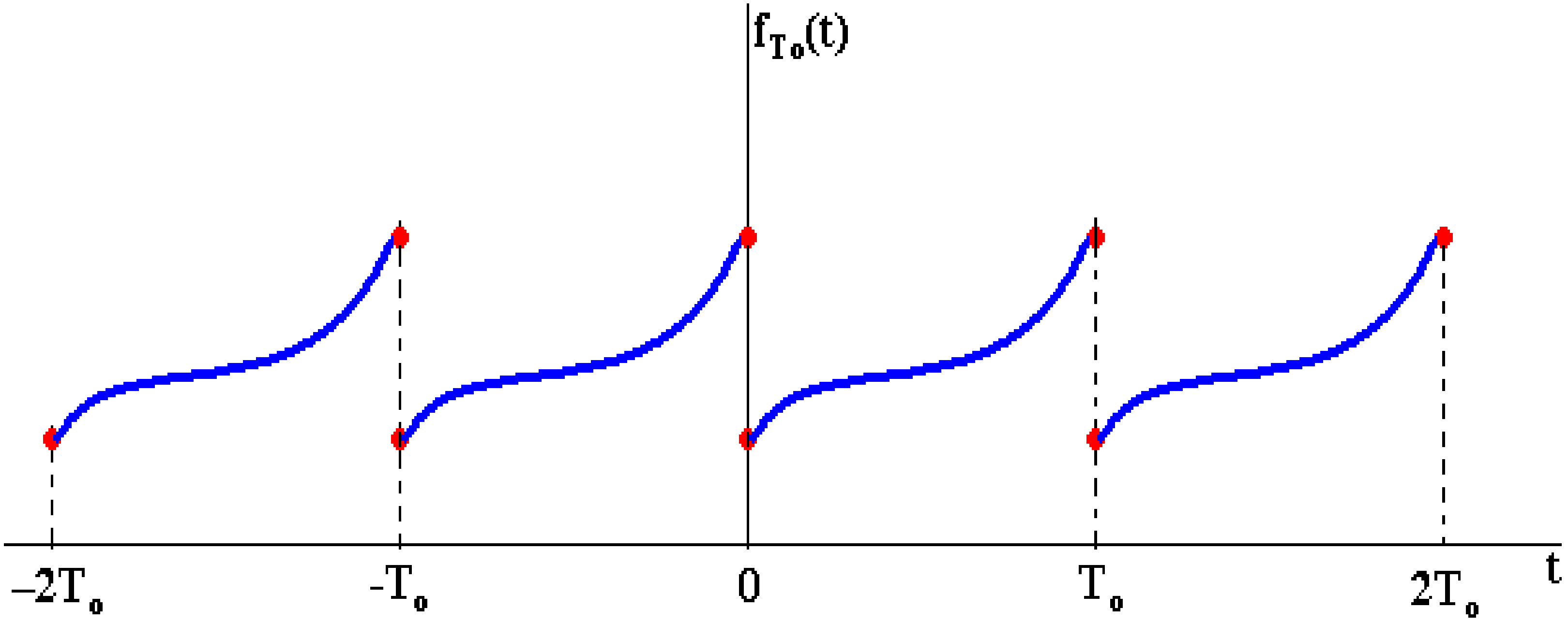
$$f_o(t) = f(t) \quad \text{se} \quad t \in [0, T_o]$$
$$f_o(t) = 0 \quad \text{se} \quad t \notin [0, T_o]$$



Transformada de Discreta de Fourier

A partir deste período básico, se constrói uma função periódica:

$f_{T_o}(t+nT_o) = f_o(t); \quad 0 \leq t \leq T_o, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$



Transformada de Discreta de Fourier

$$f_{T_0}(t) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} F_{T_0}\left(j\frac{2\pi}{T_0}\right) e^{-ij^{2\pi}/_{T_0}t}$$

$$F_{T_0}\left(j\frac{2\pi}{T_0}\right) = \frac{1}{T_0}\int_0^{T_0} f_o(t) e^{-ij^{2\pi}/_{T_0}t}\, dt$$

$$\Omega_j = j^{2\pi}/_{To} \quad com \quad -\infty < j < +\infty$$

Transformada de Discreta de Fourier

Como vimos, vale a seguinte relação:

$$2\pi F_o\left(j\,\frac{2\pi}{T_o} \right) = T_o F_{To}\left(j\,\frac{2\pi}{T_o} \right)$$

onde: $F_o(\Omega)$ seria TCF de $f_o(t)$, simbolicamente; $F_o(\Omega) = \zeta(f_0(t))$

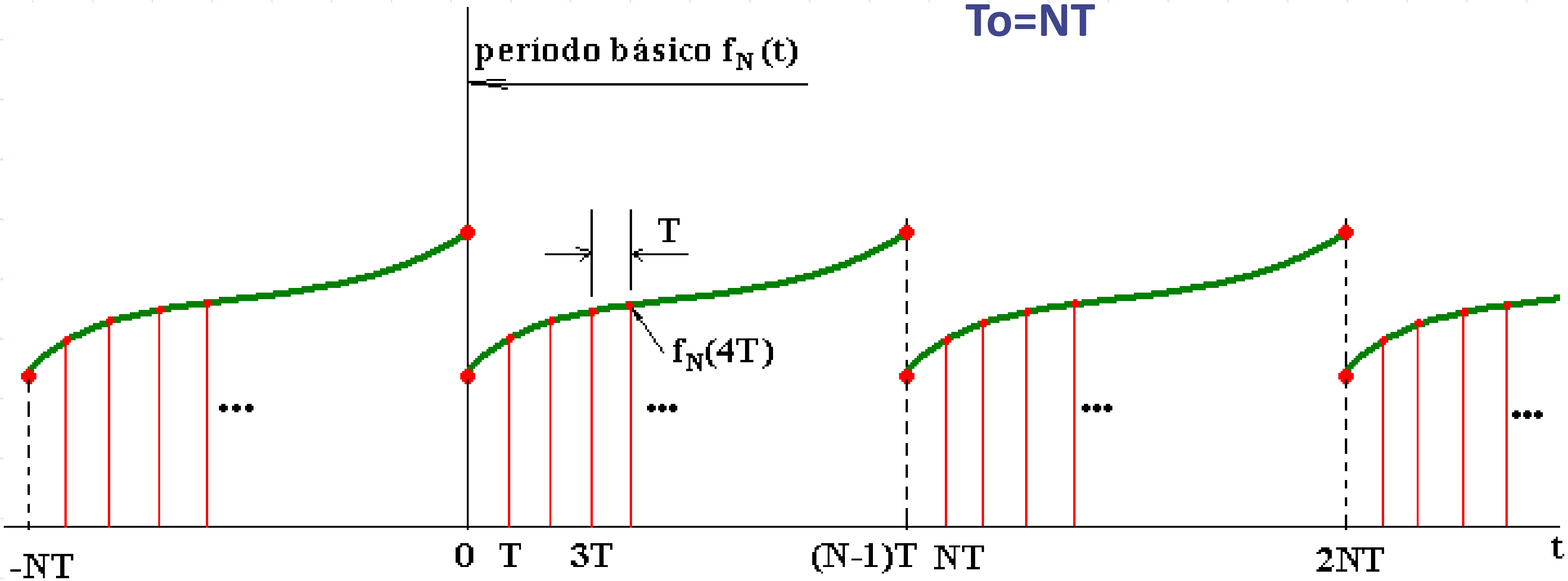
Os coeficientes da Série de Fourier da função $f_{To}(t)$ periódico;

$$F_{T_0}\left(j\,\frac{2\pi}{T} \right) \qquad j \in]-\infty, +\infty[$$

Transformada de Discreta de Fourier

Supondo que T_o (intervalo de medição) tenha sido dividido em "*N*-1" intervalos, ou seja entre 0 e T_o existem "*N*" pontos de divisões;

To=NT



Transformada de Discreta de Fourier

- O resultado desta amostragem, onde:
  - T_o é o intervalo de medição e também o período básico;
  - T é o intervalo entre as amostras de $f_o(t)$;
  - Supondo que todos estes intervalos se mantêm constantes, o resultado será uma sequência periódica das amostras da função $f_{To}(t)$.

A sequência periódica é uma série periódica com período básico $f_N(t)$. Esta última pode ser representada simbolicamente por:

$$f_N(t) = T\sum_{k=0}^{N-1} f_o(t)\,\delta(t-kT) = \sum_{k=0}^{N-1} T\, f_o(kT)\,\delta(t-kT)$$

Transformada de Discreta de Fourier

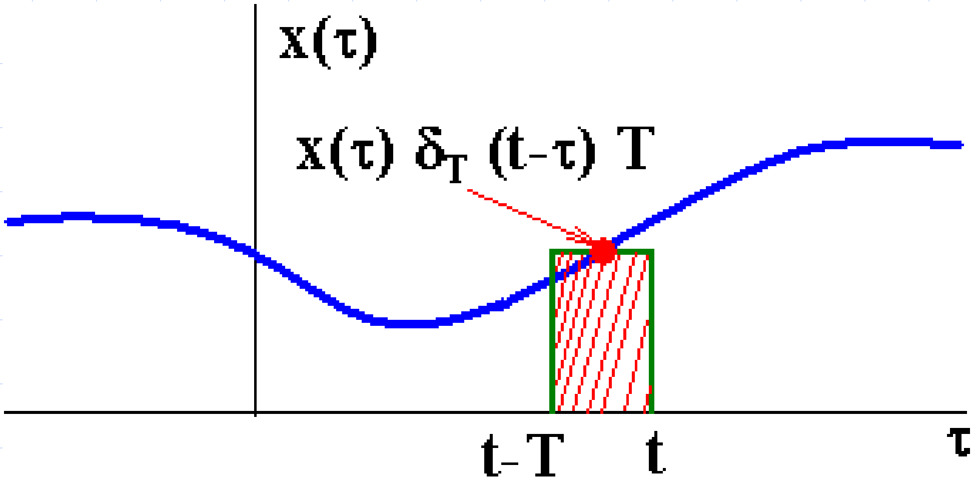
<u>*NOTA*</u>: esta é uma função ideal de amostragem. Na prática o que se faz é:

$$f_N(t) = \sum_{k=0}^{N-1} f_o\,(kT)\,\delta_T\,(t - kT)T$$

<u>onde:</u>

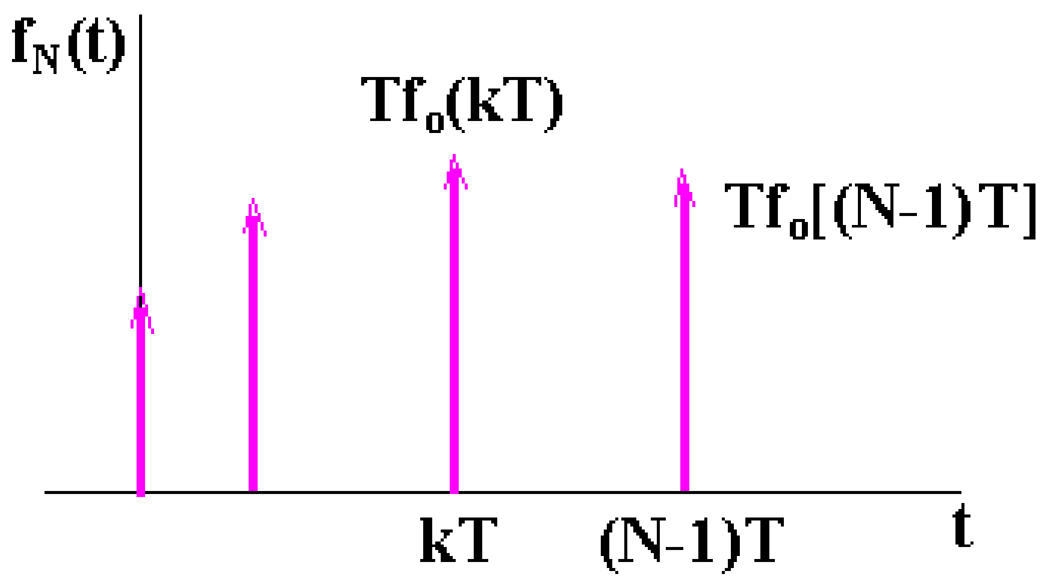
$$\delta_T(t) = \begin{cases} 1/T & 0 \le t < T \\ 0 & \text{para qualquer outro valor} \end{cases}$$

$T\,\delta_T$ tem amplitude unitária e é adimensional.



Transformada de Discreta de Fourier

Desta forma, $f_N(t)$ é uma sequência de impulsos do tipo $Tf_o(kT)$, como mostrado na seguinte figura;



Transformada de Discreta de Fourier

Sendo: $f_N(T)$ o período básico de uma função periódica, é possível desenvolver esta em Série de Fourier.

$$f_{T_0}(t) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} F_{T_0}\left(j\frac{2\pi}{T_0} \right) e^{ij\frac{2\pi}{NT}t}$$

sendo:

$$F_N\left(j\frac{2\pi}{NT} \right) = \frac{1}{NT}\int_0^{T_0} T\sum_{k=0}^{N-1} f_0(t)\delta(t-kT)e^{-ij\frac{2\pi}{NT}t}dt$$

Transformada de Discreta de Fourier

Trocando a ordem da somatória e da integral, fazendo uso das propriedades do delta de Dirac, a expressão acima pode ser escrita:

$$F_N\left(j\frac{2\pi}{NT}\right)=\frac{1}{NT}\sum_{k=0}^{N-1} f_o(kT)\, e^{-i\,j\frac{2\pi}{NT}kT}\,T$$

ou

$$\boxed{F_N\left(j\frac{2\pi}{NT}\right)=\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} f_o(kT)\, e^{-i\,2\pi\, jk/N}}$$

A expressão acima é conhecida como transformada discreta de Fourier, TDF.

Transformada de Discreta de Fourier

Esta expressão é uma versão discreta de:

$$F_{To}\left(j\frac{2\pi}{NT} \right)$$

Desta forma a expressão anterior pode ser ampliada para:

$$2\pi F_o\left(j\frac{2\pi}{NT} \right) = T_o F_{To}\left(j\frac{2\pi}{NT} \right) \cong NTF_N\left(j\frac{2\pi}{NT} \right)$$

É evidente que a desigualdade acima jamais poderá ser uma igualdade, já que $F_N\left(j\frac{2\pi}{NT} \right)$ é um conjunto de amostras de $f_o(t)$.

Transformada de Discreta de Fourier

TRANSFORMADA INVERSA

Para que a TDF seja realmente uma transformada, deve ser possível definir sua inversa.

Assim, conhecendo $F_N\left(j\dfrac{2\pi}{NT}\right)$

tem que ser possível recuperar as amostras $f_o(kT)$ de $f_o(t)$.

Esta transformada existe e vale:

$$f_o(nT) = \sum_{j=0}^{N-1} F_N\left(j\frac{2\pi}{NT}\right) e^{i2\pi\, jn/N}$$

Transformada de Discreta de Fourier

Para demonstrar isto, partimos da TDF e substituímos $f_o(nT)$ pela definição da TIDF $\rightarrow$ chega-se a igualdade:

$$F_N\left(j\frac{2\pi}{NT}\right)=\frac{1}{N}NF_N\left(j\frac{2\pi}{NT}\right)=F_N\left(j\frac{2\pi}{NT}\right)$$

já que:

$$\sum_{k=0}^{N-1} e^{\frac{i2\pi(r-j)}{N}}$$

$$=\begin{cases} N & se \quad r=j \\ 0 & se \quad r\neq j \end{cases}$$

Transformada de Discreta de Fourier

TEOREMA da PERIDICIDADE de TDF

Os coeficientes: $F_N\left(j\frac{2\pi}{NT}\right)$ formam uma série periódica de período $2\pi/T$, sendo T é o intervalo de amostras.

Demonstração:
basta provar que =>

$$F_N\left(j\frac{2\pi}{NT}+n\frac{2\pi}{T}\right)=F_N\left(j\frac{2\pi}{NT}\right)$$

com "*n*" numero inteiro:

$$F_N\left(j\frac{2\pi}{NT}+n\frac{2\pi}{T}\right)=F_N\left(j\frac{2\pi}{NT}+N\frac{2\pi}{NT}n\right)=F_N\left((j+nN)\frac{2\pi}{NT}\right)$$

Transformada de Discreta de Fourier

TEOREMA da PERIDICIDADE de TDF

Por definição de TDF;

$$F_N\left((j+nN)\frac{2\pi}{NT}\right)=\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} f_o(kT)\,e^{-\frac{i2\pi(j+nN)k}{N}}$$

Devemos considerar aqui que:

$$e^{-\frac{i2\pi(j+nN)k}{N}}=e^{-\frac{i2j\pi k}{N}}e^{-i2\pi nk}=e^{-\frac{i2\pi jk}{N}}$$

O que prova que

$$F_N\left((j+nN)\frac{2\pi}{NT}\right)=\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} f_o(kT)\,e^{-\frac{i2\pi jk}{N}}=F_N\left(j\frac{2\pi}{NT}\right)$$

Transformada de Discreta de Fourier

TEOREMA da PERIDIDICIDADE de TDF

• Vejamos então as consequências destes teoremas.

• Em geral, os coeficientes de Fourier, mais acima de *N*-1, podem ser calculados através da seguinte expressão:

$$F_N\left((N+l)\frac{2\pi}{NT}\right) = F_N\left(\frac{2\pi}{T} + l\,\frac{2\pi}{N\,T}\right) = F_N\left(l\,\frac{2\pi}{N\,T}\right)$$

Isto é devido a periodicidade do teorema anterior.

Transformada de Discreta de Fourier

Tomemos alguns valores **positivos** de *“ l ”* $\rightarrow$ utilizando a equação anterior

$$F_N\left(N\frac{2\pi}{NT}\right)=F_N(0)$$

$$F_N\left((N+1)\frac{2\pi}{NT}\right)=F_N\left(1\frac{2\pi}{NT}\right)$$

$$F_N\left((N+2)\frac{2\pi}{NT}\right)=F_N\left(2\frac{2\pi}{NT}\right)$$

$$F_N\left((2N-1)\frac{2\pi}{NT}\right)=F_N\left((N-1)\frac{2\pi}{NT}\right)$$

$$\vdots$$

$$F_N\left((2N)\frac{2\pi}{NT}\right)=F_N\left((N)\frac{2\pi}{NT}\right)=F_N(0)$$

✓ Vimos que a cada

j=N , $F_N\left(N\frac{2\pi}{NT}\right)$

se repete e não tem sentido calcular mais termos que *j=N*-1..

✓A variação de *j*=0, *N*-1 é suficiente para recuperar as amostras $f_o(nT)$, com *n*=0, *N-1*

Transformada de Discreta de Fourier

Tomando alguns valores **negativos** de ***" l "***.

$$F_N\left((N-1)\frac{2\pi}{NT}\right)=F_N\left(-\frac{2\pi}{NT}\right)=F_N^*\left(1\frac{2\pi}{NT}\right)$$

$$F_N\left((N-2)\frac{2\pi}{NT}\right)=F_N\left(-2\frac{2\pi}{NT}\right)=F_N^*\left(2\frac{2\pi}{NT}\right)$$

$$F_N\left(N-\left(\frac{N}{2}-1\right)\frac{2\pi}{NT}\right)=F_N\left(-\left(\frac{N}{2}-1\right)\frac{2\pi}{NT}\right)=F_N^*\left(\left(\frac{N}{2}-1\right)\frac{2\pi}{NT}\right)$$

$$F_N\left(\left(N-\frac{N}{2}\right)\frac{2\pi}{NT}\right)=F_N\left(-\frac{N}{2}\frac{2\pi}{NT}\right)=F_N^*\left(\frac{N}{2}\frac{2\pi}{NT}\right)=F_N\left(\left(\frac{N}{2}\frac{2\pi}{NT}\right)\right)$$

$$F_N\left(N-\left(\frac{N}{2}+1\right)\frac{2\pi}{NT}\right)=F_N\left(-\left(\frac{N}{2}+1\right)\frac{2\pi}{NT}\right)=F_N^*\left(\left(\frac{N}{2}+1\right)\frac{2\pi}{NT}\right)\cdots$$

Transformada de Discreta de Fourier

TEOREMA da PERIDICIDADE de TDF

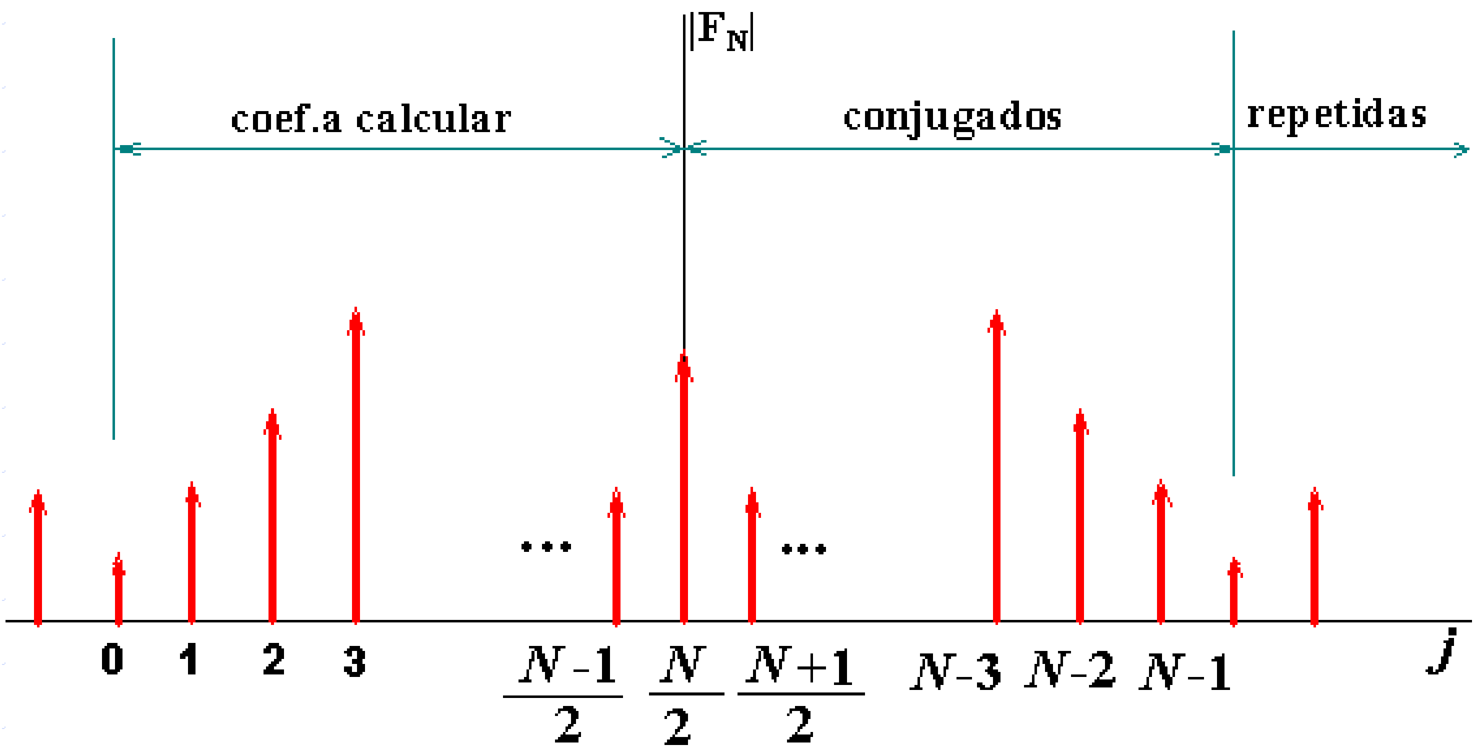
$$F_N^*\left(\frac{N}{2}\frac{2\pi}{NT}\right) = F_N\left(\frac{N}{2}\frac{2\pi}{NT}\right)$$

1. para $j = N/2$ os coeficientes de Fourier são **reais**;

2. os coeficientes de Fourier de $j = \frac{N}{2} + 1$ até N-1 são conjugados daqueles que vão de j=1 até $\frac{N}{2} - 1$

Por mais que todos os coeficientes de Fourier (j=0 até N-1) sejam necessários para recuperar as amostras de $f_o(nT)$, desde o ponto de vista prático, é suficiente calcular somente aqueles que correspondem a j entre 0 e N/2.

Transformada de Discreta de Fourier



Nota: $F(0) = F_N\left(N\frac{2\pi}{NT}\right)$ também são reais

Transformada de Discreta de Fourier

FENÔMENO de ALIASING - (dobramento)

Vamos analisar estes fenômenos em duas óticas diferentes:

1 – Como consequência do fenômeno, periodicidade dos coeficientes de Fourier,

- O fato que à partir de $j = N/2$ os coeficientes de Fourier não

oferecem informação adicional, a maioria das frequências que podem

ser discriminadas pela TDF é: $\left(\frac{N}{2}\right)\frac{2\pi}{NT} = \frac{\pi}{T}$

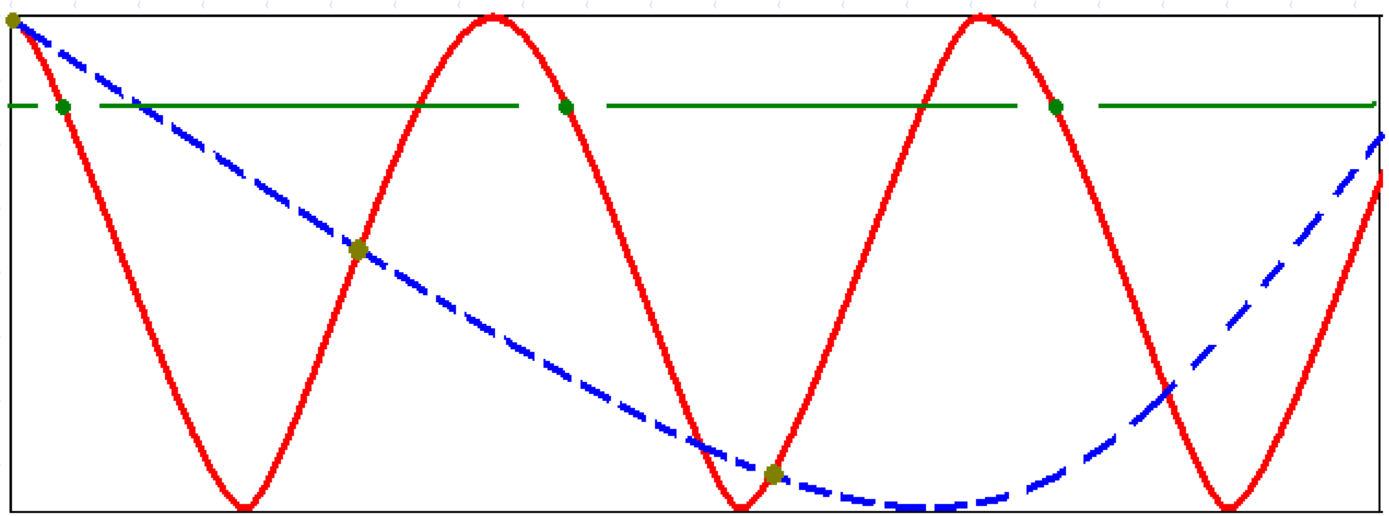
- se usarmos "**frequência de amostragem**".

Transformada de Discreta de Fourier

FENÔMENO de ALIASING - (dobramento)

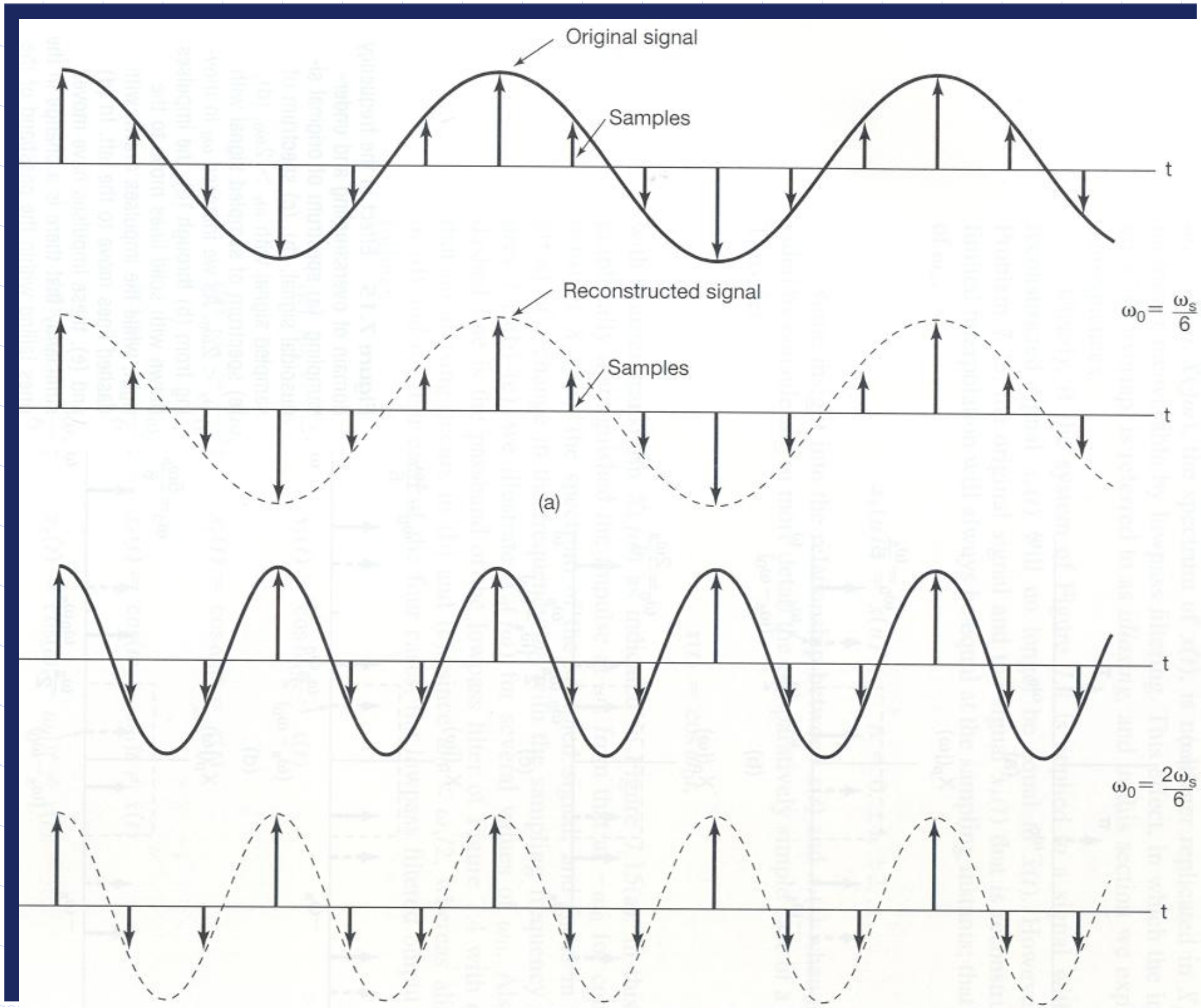
2 – Amostragem de um sinal continuo

Graficamente:



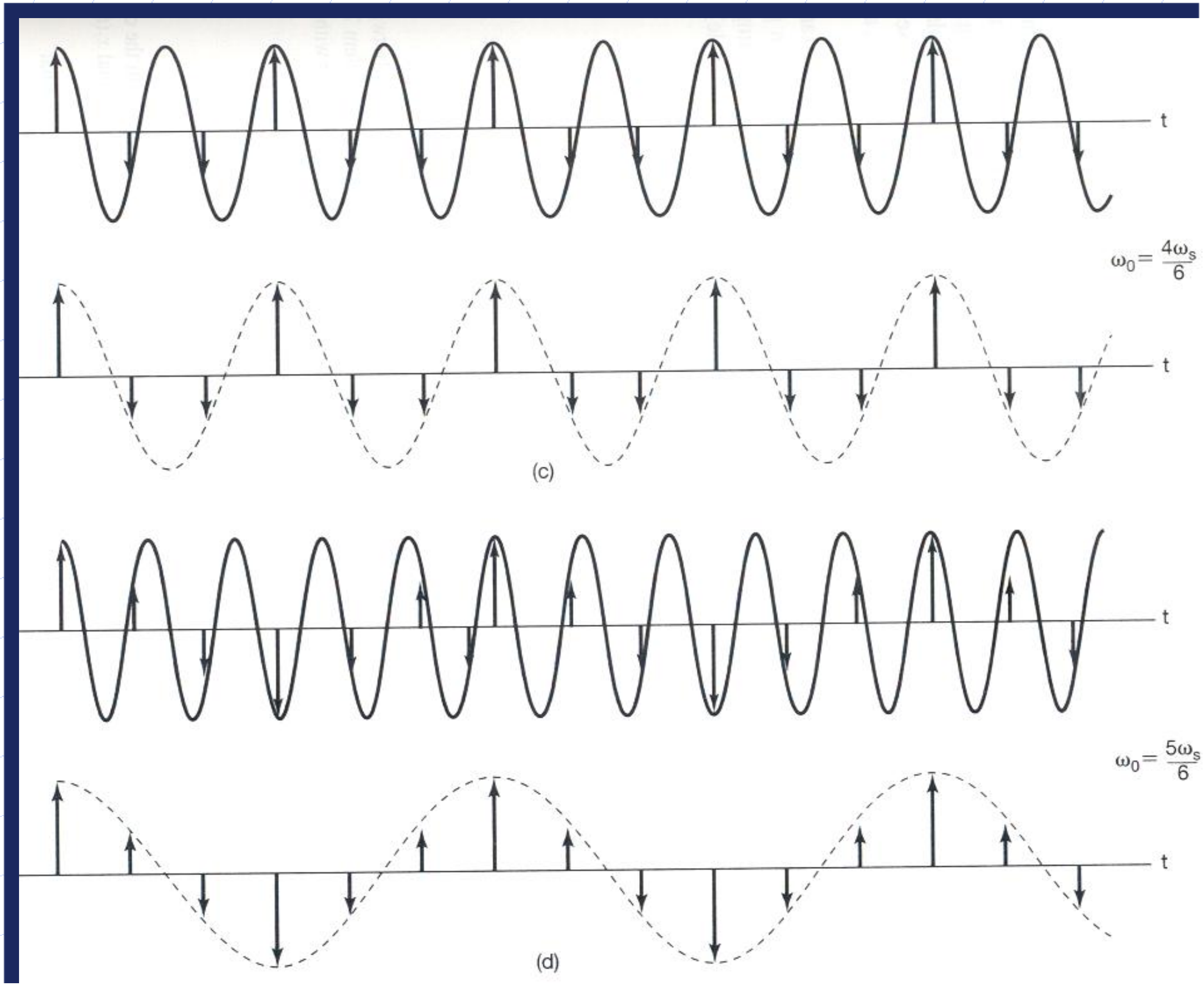
◆ Transformada de Discreta de Fourier

FENÔMENO de ALIASING - (dobramento)



Transformada de Discreta de Fourier

FENÔMENO de ALIASING - (dobramento)



Transformada de Discreta de Fourier

FENÔMENO de ALIASING - (dobramento)

Algumas CONSIDERAÇÕES PRÁTICAS

- Geralmente os equipamentos modernos de medição possuem um filtro anti-aliasing;

- Ainda, poder-se-ia encontrar o valor resultante da frequência de um sinal f_s em presença de aliasing:

$$f_d = \frac{1}{2T}$$

- Para calcular a frequência que contamina o espectro discreto de Fourier, que na realidade corresponde à:

$$f_s > f_d$$

Transformada de Discreta de Fourier

FENÔMENO de ALIASING - (dobramento)

Resolução de Frequências Próximas

- Distância mínima que pode existir em duas componentes harmônicas em um sinal e que podem ser discriminadas.

- Suponhamos que estas harmônicas possuem a frequência f_1 e f_2:

- Se $\Delta f = \left| f_1 - f_2 \right|$ segundo *RAYLEIGH*

$$\Delta f \geq \frac{1}{NT}$$ é a distância entre duas linhas espectrais.

Transformada de Discreta de Fourier

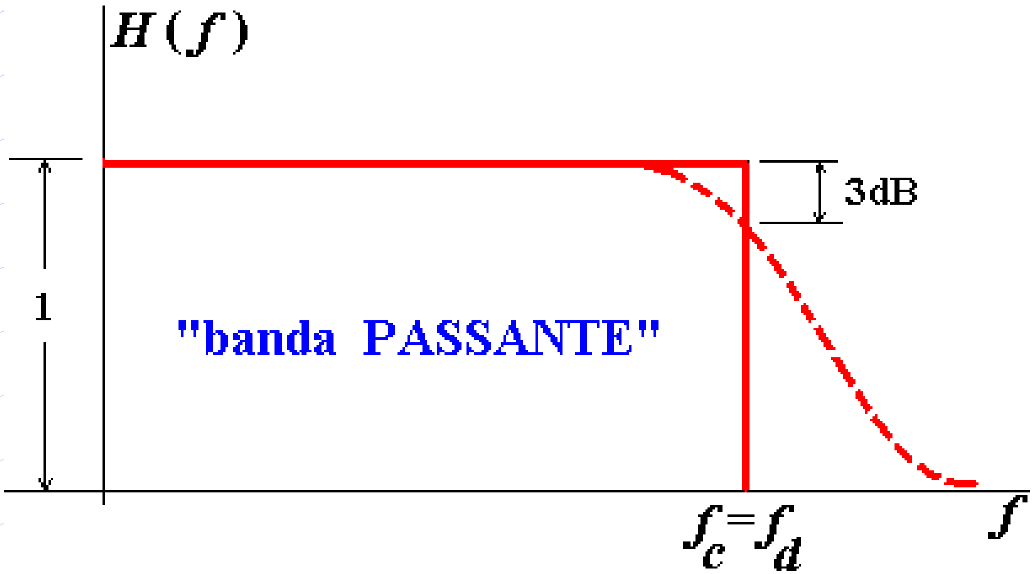
Filtro Anti-Aliasing

Se *T* é o intervalo entre duas amostras consecutivas de frequências máximas possíveis de detectar

$$f_o(t); \quad f_a = \frac{1}{T} \quad f_d = \frac{1}{2T}$$

Nota: Se os sinais possuem harmônicas com frequências maiores que $f_d \rightarrow$ estas se dobram ao redor de f_d, contaminando o espectro.

Obs: Uma forma de evitar este fenômeno é filtrar o sinal através de um filtro passa-baixo – filtro anti-aliasing



Transformada de Discreta de Fourier

Filtro Anti-Aliasing

Na prática, se o sinal máximo que queremos que apareça no viso é f_L:

- o filtro **ideal** : $$f_L = f_d = f_c$$

- para filtro **real**, se adota: $$f_d = 1.28 f_L$$

imperfeição do filtro

$$f_a = \frac{1}{T} = 2 f_d = 2 = 1.28 f_L$$

$$f_a = 2{,}56 f_L$$ Na maioria dos dispositivos comerciais.

Transformada de Discreta de Fourier

Filtro Anti-Aliasing

Falta definir o número de amostras "*N*". Sabendo que:

$$T = \frac{1}{2{,}56\, f_L} \rightarrow T_o = NT$$

(tempo de medição)

Por conveniência numérica (FFT) tomaremos com um inteiro:

m = 8, 9, 10, 11e 12

N = 256, 512, 1024, 2048 e 4026

Transformada de Discreta de Fourier

Outras relações:

$$f_L = N_L \; \Delta f_L$$

$$f_a = 2{,}56\, f_L = 2{,}56 N_L \; \Delta f_L = N \; \Delta f_L$$

$$\rightarrow N = 2{,}56 \; N_L$$

pontos no TEMPO

nº de linhas

$$f_a = \frac{1}{T} = N \; \Delta f_L$$

$$\Delta f_L = \text{resolução} = \frac{1}{NT} = \frac{1}{T_o}$$