

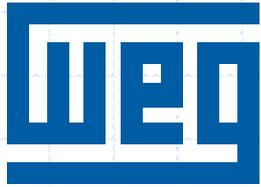


DINÂMICA DE ROTORES

Prof. Dr. Carlos Alberto Bavastri
Msc. Thiago da Silva
Lucas Bortolotto
Samuel Cavalli

Universidade Federal do Paraná



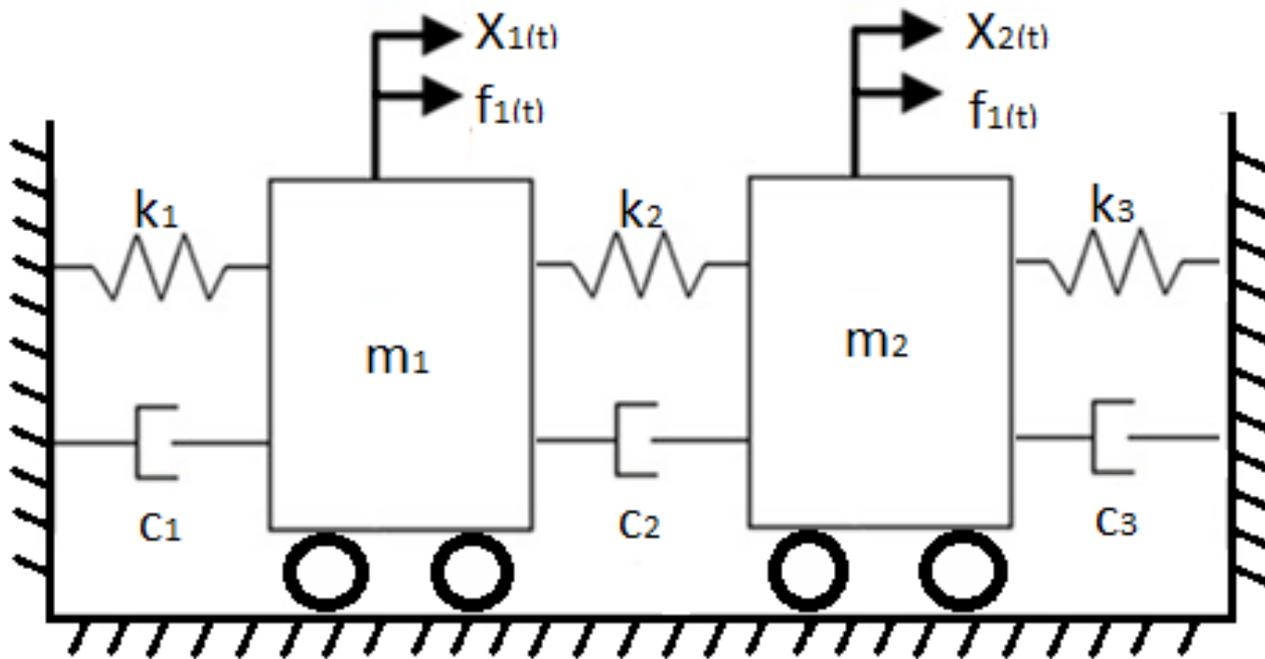


1. TEORIA BÁSICA DE VIBRAÇÕES

SISTEMAS DE MULTIPLOS GRAUS DE LIBERDADE

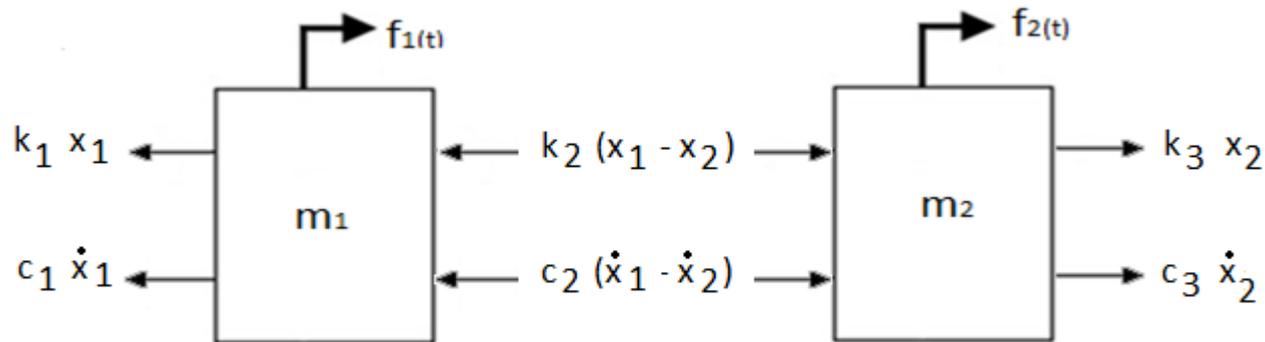
◆ Sistemas de Múltiplos Graus de Liberdade

Dado um sistema de dois graus de liberdade,



◆ Sistemas de Múltiplos Graus de Liberdade

Fazendo então o diagrama do corpo livre



e aplicando a 2ª Lei de Newton

$$f_1(t) - k_1 x_1 - k_2 (x_1 - x_2) - c_1 \dot{x}_1 - c_2 (\dot{x}_1 - \dot{x}_2) = m_1 \ddot{x}_1(t)$$

$$f_2(t) - k_3 x_2 - c_3 \dot{x}_2 + k_2 (x_1 - x_2) + c_2 (\dot{x}_1 - \dot{x}_2) = m_2 \ddot{x}_2(t)$$

◆ Sistemas de Múltiplos Graus de Liberdade

É possível achar a equação de movimento:

$$m_1 \ddot{x}(t) + (k_1 + k_2)x_1(t) + (c_1 + c_2)\dot{x}_1(t) - k_2x_2(t) - c_2\dot{x}_2(t) = f_1(t)$$

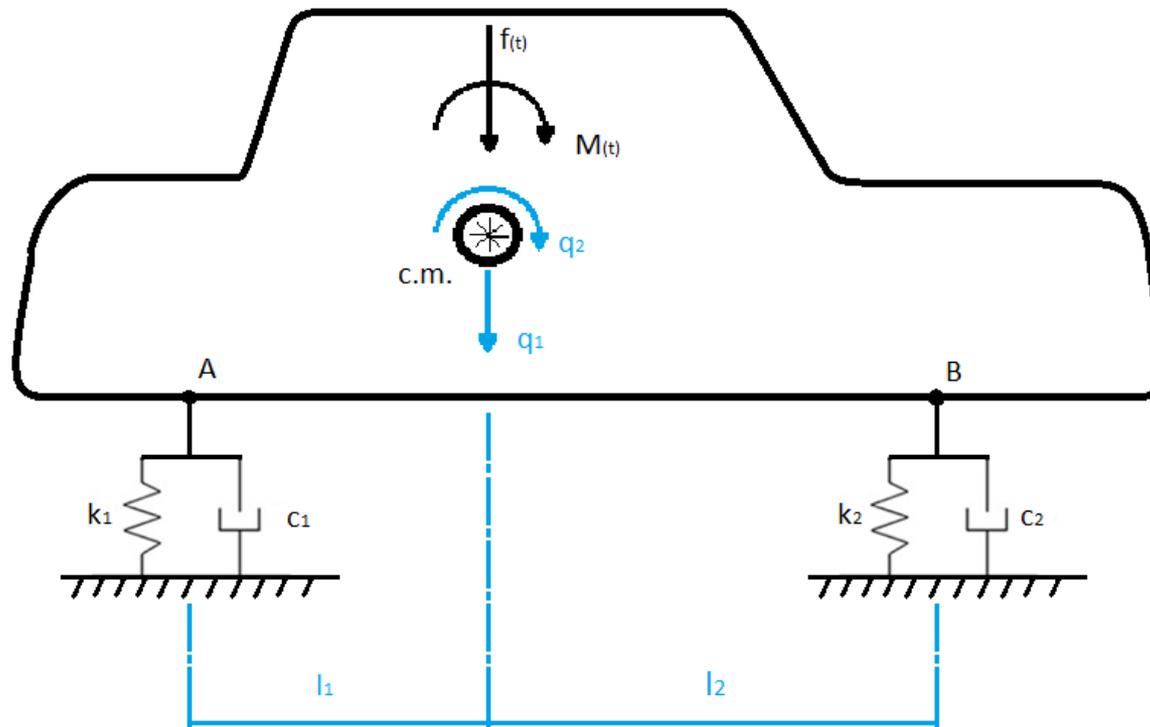
$$m_2 \ddot{x}(t) + (k_2 + k_3)x_2(t) + (c_2 + c_3)\dot{x}_2(t) - k_2x_1(t) - c_2\dot{x}_1(t) = f_2(t)$$

Ou em sua forma matricial

$$\begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix} \{\ddot{x}\} + \begin{bmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 \\ -k_1 & k_2 + k_3 \end{bmatrix} \{x\} + \begin{bmatrix} c_1 + c_2 & -c_2 \\ -c_2 & c_2 + c_3 \end{bmatrix} \{\dot{x}\} = \{f\}$$

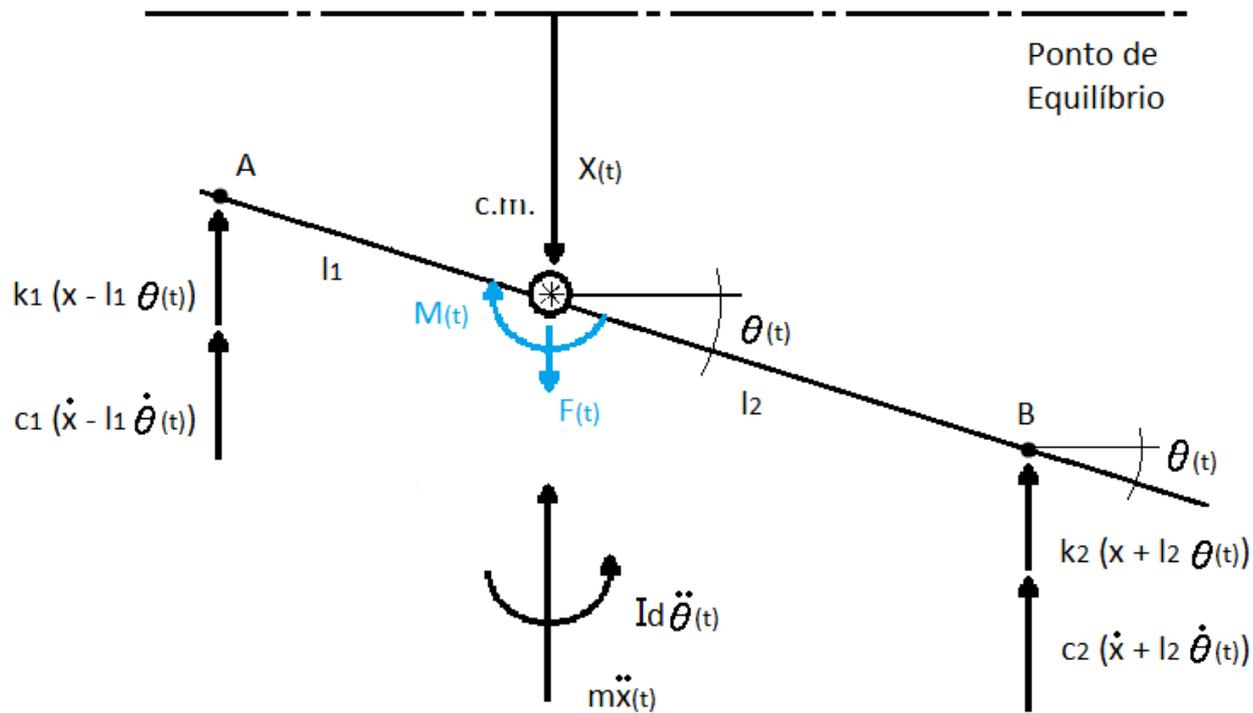
◆ Sistemas de Múltiplos Graus de Liberdade

O modelo de dois graus de liberdade pode representar simplificada-mente uma suspensão automotiva, conforme abaixo:



◆ Sistemas de Múltiplos Graus de Liberdade

Seu diagrama de corpo livre fica:



◆ Sistemas de Múltiplos Graus de Liberdade

e aplicando a 2ª Lei de Newton:

$$f(t) - k_1(x - l_1\theta) - c_1(\dot{x} - l_1\dot{\theta}) - k_2(x + l_2\theta) - c_2(\dot{x} - l_2\dot{\theta}) = m\ddot{x}(t)$$

$$k_1(x - l_1\theta) + c_1(\dot{x} - l_1\dot{\theta})l_1 + M(t) - k_2(x + l_2\theta)l_2 - c_2(\dot{x} - l_2\dot{\theta})l_2 = I_d\ddot{\theta}(t)$$

Na forma matricial

$$\begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & I_d \end{bmatrix} \{\ddot{q}\} + \begin{bmatrix} c_1 + c_2 & c_2l_2 - c_1l_1 \\ c_2l_2 - c_1l_1 & c_2l_2^2 + c_1l_1^2 \end{bmatrix} \{\dot{q}\} + \begin{bmatrix} k_1 + k_2 & k_2l_2 - k_1l_1 \\ k_2l_2 - k_1l_1 & k_2l_2^2 + k_1l_1^2 \end{bmatrix} \{q\} = \{f(t)\}$$

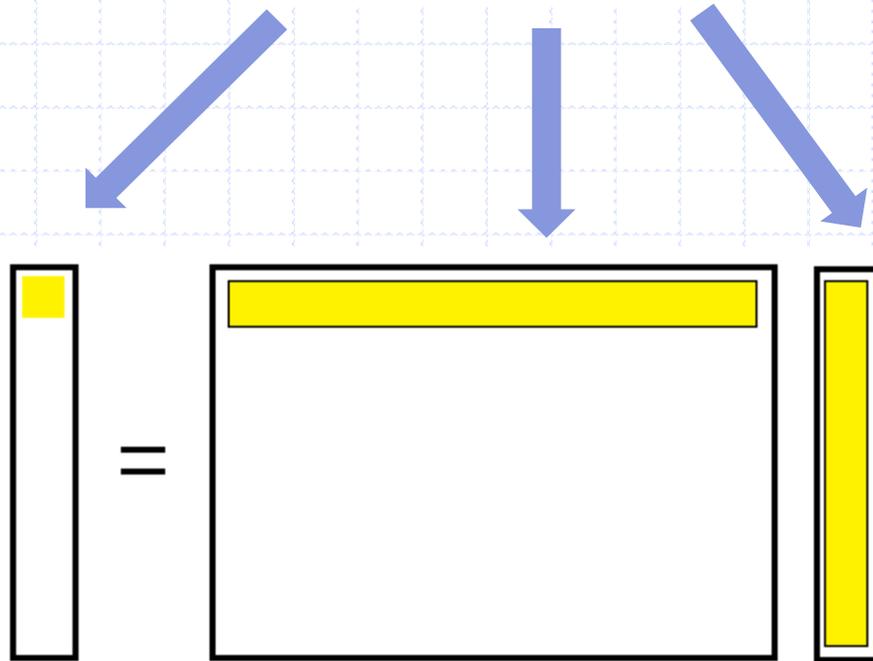
$$\{q\} = \begin{Bmatrix} x(t) \\ \theta(t) \end{Bmatrix}$$

$$\{f(t)\} = \begin{Bmatrix} f(t) \\ M(t) \end{Bmatrix}$$

◆ Coeficientes de Influência

Rigidez: A força de reação inserida pelas propriedades elásticas é dada por:

$$Q_i = \sum_{j=1}^n k_{ij} q_j$$



◆ Coeficientes de Influência

Supondo que:

$$q_s = 1 \quad e \quad q_{j \neq s} = 0$$



$$Q_i = k_{is}$$

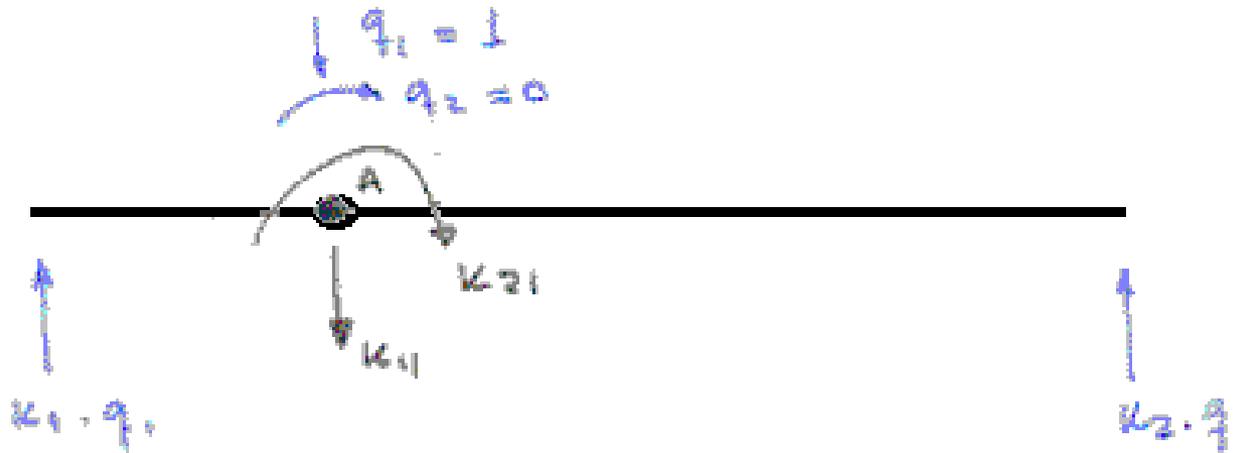
Com isto sempre é possível achar a matriz de rigidez K.

O mesmo conceito é aplicado às matrizes C e M. Nesses casos, utilizamos as coordenadas de velocidade, \dot{q} , e aceleração, \ddot{q} , ao invés do deslocamento.

◆ Coeficientes de Influência – Aplicação

Usando este método no exemplo anterior, tendo

$$q_1 = 1 \quad e \quad q_2 = 0$$



◆ Coeficientes de Influência – Aplicação 01

Para o equilíbrio, os somatórios de forças e momentos são dados por:

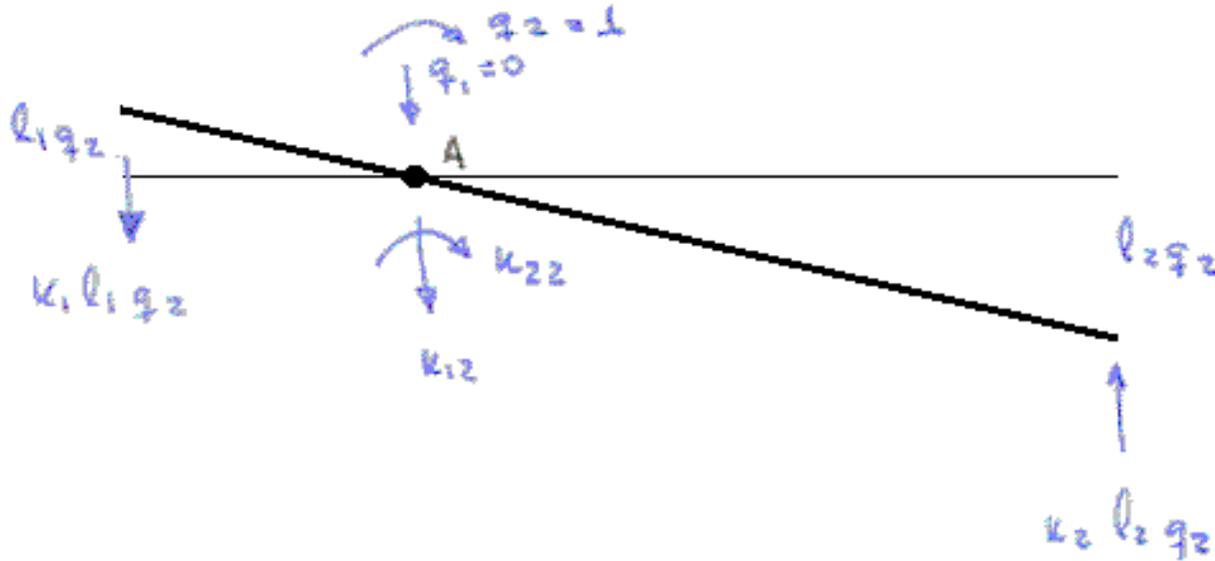
$$\sum F_{vertical} = 0 \Rightarrow -k_1 - k_2 + k_{11} = 0 \Rightarrow k_{11} = k_1 + k_2$$

$$\sum M_A = 0 \Rightarrow k_1 l_1 - k_2 l_2 + k_{21} l_1 = 0 \Rightarrow k_{21} = k_2 l_2 - k_1 l_1$$

Com isto, encontramos a primeira coluna da matriz K

◆ Coeficientes de Influência – Aplicação 01

$$q_2 = 1 \text{ e } q_1 = 0$$



$$\sum F_{vertical} = 0 \Rightarrow -k_{12} - k_1 l_1 \cdot 1 - k_2 l_2 \cdot 1 = 0 \Rightarrow k_{12} = k_2 l_2 + k_1 l_1$$

$$\sum M_A = 0 \Rightarrow k_1 l_1 l_1 + k_2 l_2 l_2 + k_{22} = 0 \Rightarrow k_{22} = k_1 l_1^2 - k_2 l_2^2$$

◆ Coeficientes de Influência – Aplicação 01

Então:

$$K = \begin{bmatrix} k_1 + k_2 & k_2 l_2 - k_1 l_1 \\ k_2 l_2 - k_1 l_1 & k_2 l_2^2 + k_1 l_1^2 \end{bmatrix}$$

Analogamente, fazendo:

$$\dot{q}_1 = 1 \quad e \quad \dot{q}_2 = 0$$

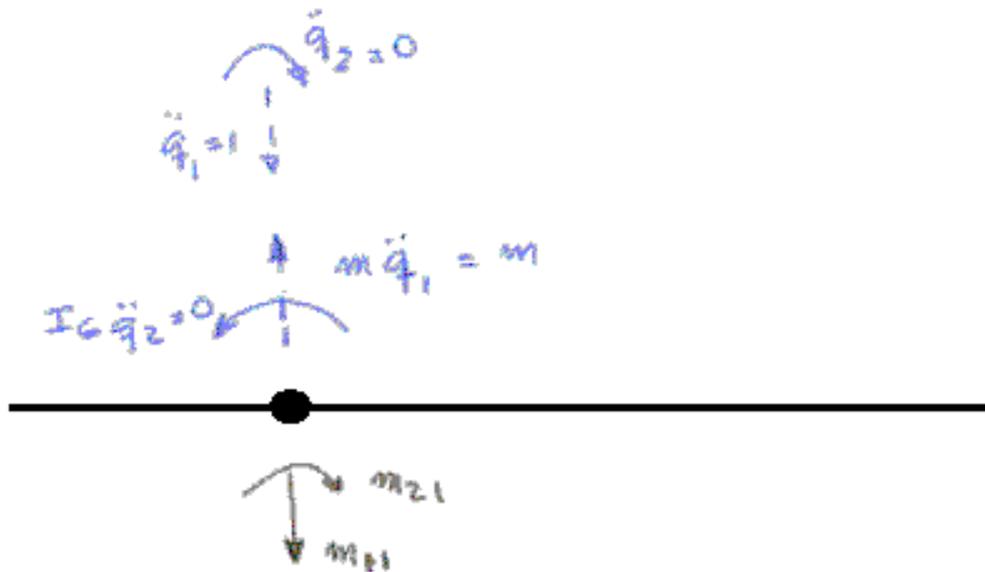
$$\dot{q}_2 = 1 \quad e \quad \dot{q}_1 = 0$$

$$C = \begin{bmatrix} c_1 + c_2 & c_2 l_2 - c_1 l_1 \\ c_2 l_2 - c_1 l_1 & c_2 l_2^2 + c_1 l_1^2 \end{bmatrix}$$

◆ Coeficientes de Influência – Aplicação 01

Finalmente, para a matriz M

$$\ddot{q}_1 = 1 \quad e \quad \ddot{q}_2 = 0$$

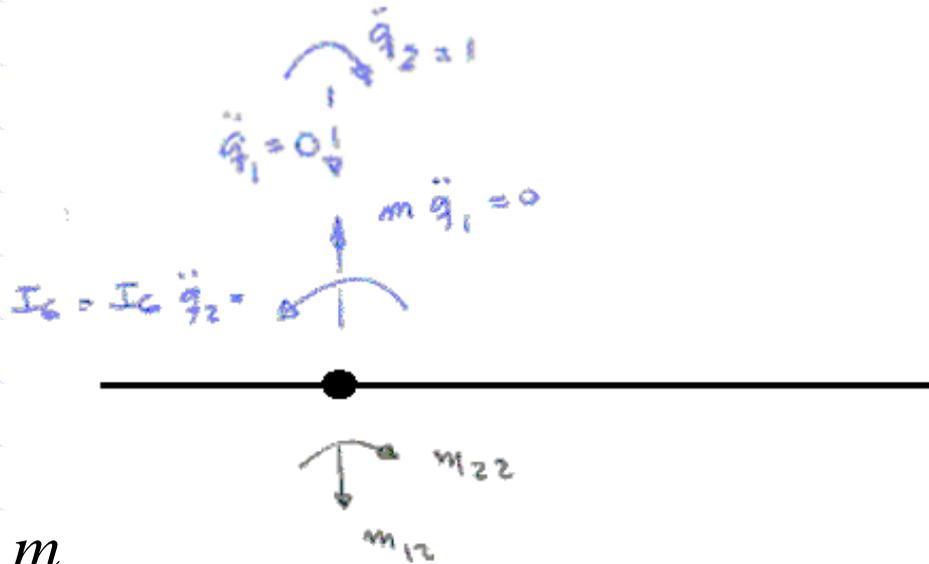


$$\sum F_v = m_{11} - m\ddot{q}_1 = 0 \Rightarrow m_{11} = m$$

$$\sum M_A = m_{21} = 0 \Rightarrow m_{21} = 0$$

◆ Coeficientes de Influência – Aplicação 01

$$\ddot{q}_2 = 1 \quad e \quad \ddot{q}_1 = 0$$



$$\sum F_v = m_{12} = 0 \Rightarrow m_{12} = m$$

$$\sum M_A = 0 \Rightarrow m_{22} - I_G \ddot{q}_2 = m_{22} - I_G = 0 \Rightarrow m_{22} = I_G$$

$$M = \begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & I_G \end{bmatrix}$$

◆ Coeficientes de Influência – Aplicação 01

Então, a equação de movimento, em notação matricial simplificada, é:

$$M \{\ddot{q}(t)\} + C \{\dot{q}(t)\} + K \{q(t)\} = f(t)$$

onde

$$M = \begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & I_G \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} c_1 + c_2 & c_2 l_2 - c_1 l_1 \\ c_2 l_2 - c_1 l_1 & c_2 l_2^2 + c_1 l_1^2 \end{bmatrix} \quad e \quad K = \begin{bmatrix} k_1 + k_2 & k_2 l_2 - k_1 l_1 \\ k_2 l_2 - k_1 l_1 & k_2 l_2^2 + k_1 l_1^2 \end{bmatrix}$$

◆ Coeficientes de Influência – Método da Flexibilidade

Em sistemas mecânicos, o cálculo da matriz de rigidez, K , via coeficientes de influência, necessita da formação de um sistema de equações.

Em geral. Isto gera altos custos computacionais. De outra forma, K pode ser calculada através da inversa da matriz flexibilidade, A .

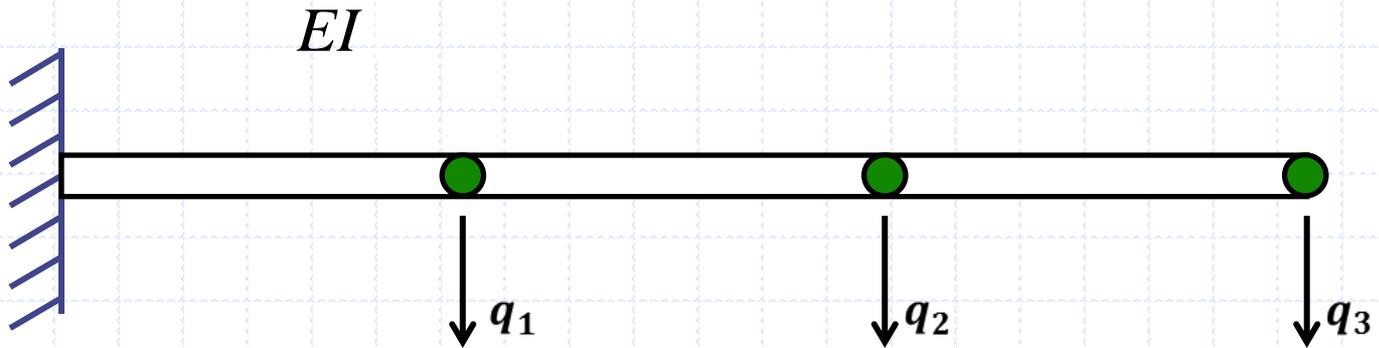
$$AF = AKq$$

$$AF = q$$

$$q_j = \sum_{i=1}^n a_{ji} f_i = \sum_{i=1}^n a_{ji} f_i$$

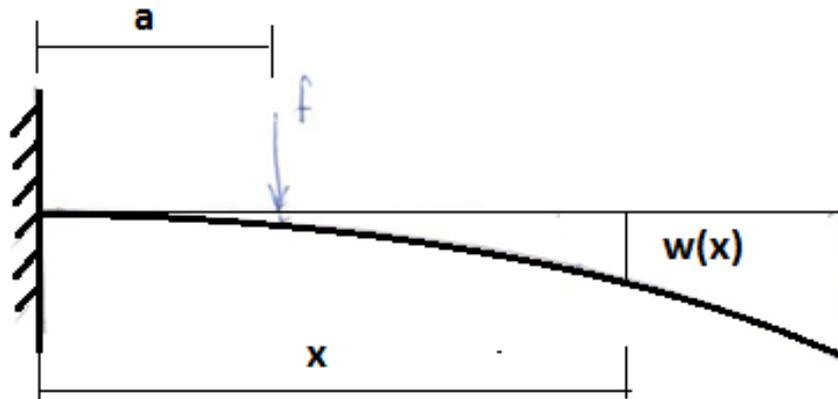
◆ Coeficientes de Influência – Método da Flexibilidade

Considerando o seguinte caso:



◆ Coeficientes de Influência – Método da Flexibilidade

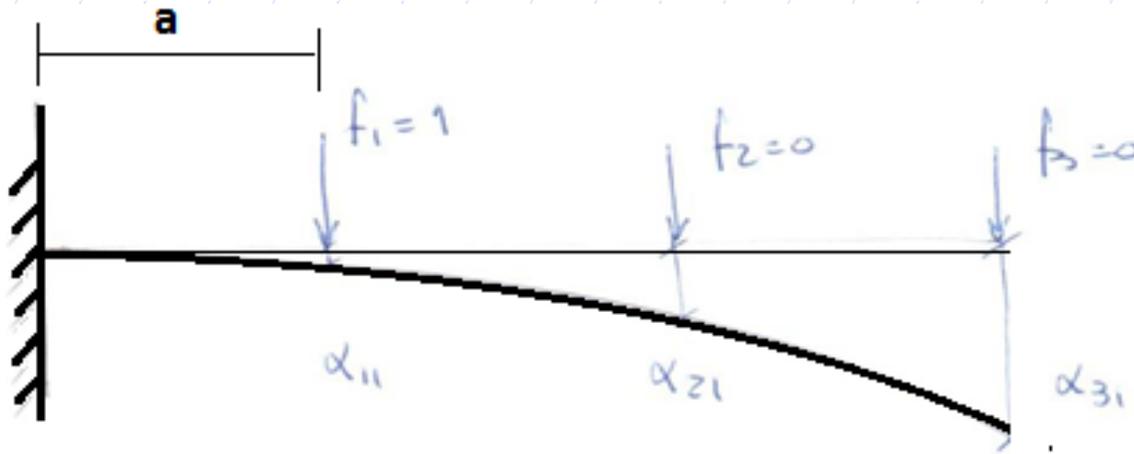
Como se sabe, a equação da elástica para estes casos é



$$y(x) = \frac{1}{EI} \left[\frac{1}{6} (x-a)^3 \mu(x-a) - \frac{x^3}{6} + a \frac{x^2}{2} \right]$$

◆ Coeficientes de Influência – Método da Flexibilidade

a) $F_1 = 1$ e $F_{j \neq s} = 0$



◆ Coeficientes de Influência – Método da Flexibilidade

A primeira coluna da matriz de flexibilidade pode ser obtida:

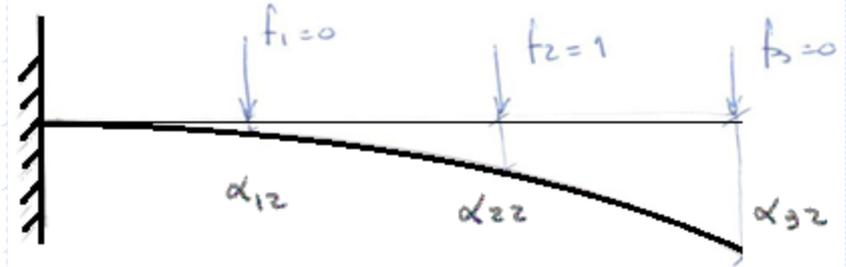
$$a_{11}\left(x = \frac{L}{3}\right) = \frac{1}{EI} \left[-\frac{\left(\frac{L}{3}\right)^3}{6} + \frac{L}{3} \frac{\left(\frac{L}{3}\right)^2}{2} \right] = \frac{1}{EI} \left(\frac{L^3}{81} \right)$$

$$a_{21}\left(x = \frac{2}{3}L\right) = \frac{1}{EI} \left[\frac{1}{6} \left(\frac{2L}{3} \right)^3 - \left(\frac{2L}{3} \right)^3 \frac{1}{6} + \frac{L}{3} \left(\frac{\left(\frac{2L}{3} \right)^2}{2} \right) \right] = \frac{L^3}{EI} \frac{5}{162}$$

$$a_{31}(x = L) = \frac{1}{EI} \left[\frac{1}{6} \left(\frac{2L}{3} \right)^3 - \frac{L^3}{6} + \frac{L}{3} \frac{L^2}{2} \right] = \frac{L^3}{EI} \frac{4}{81}$$

◆ Coeficientes de Influência – Método da Flexibilidade

b) $F_2 = 1$ e $F_{j \neq s} = 0$



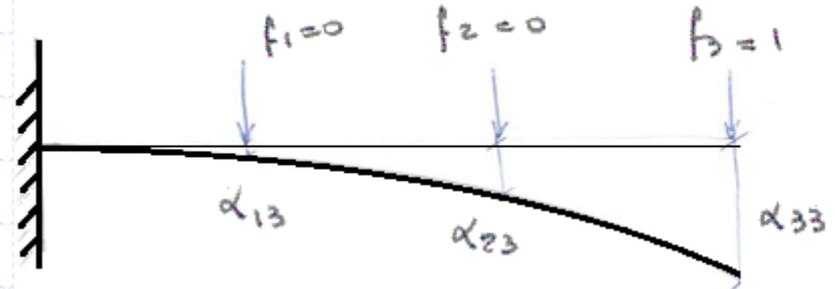
$$a_{12}\left(x = \frac{L}{3}\right) = \frac{1}{EI} \left[-\frac{\left(\frac{L}{3}\right)^3}{6} + \frac{2L}{3} \frac{\left(\frac{L}{3}\right)^2}{2} \right] = \frac{1}{EI} L^3 \frac{5}{162}$$

$$a_{22}\left(x = \frac{2}{3}L\right) = \frac{1}{EI} \left[-\frac{1}{6} \left(\frac{2L}{3}\right)^3 + \frac{2L}{3} \frac{\left(\frac{2L}{3}\right)^2}{2} \right] = \frac{1}{EI} L^3 \left(\frac{8}{81}\right)$$

$$a_{32}(x = L) = \frac{1}{EI} \left[\frac{1}{6} \left(\frac{L}{3}\right)^3 - \left(\frac{L}{3}\right)^3 + \frac{2L}{3} \frac{L^2}{2} \right] = \frac{1}{EI} L^3 \left(\frac{14}{81}\right)$$

◆ Coeficientes de Influência – Método da Flexibilidade

b) $F_3 = 1$ e $F_{j \neq 3} = 0$



$$a_{13}\left(x = \frac{L}{3}\right) = \frac{1}{EI} \left[-\frac{\left(\frac{L}{3}\right)^3}{6} + L \frac{\left(\frac{L}{3}\right)^2}{2} \right] = \frac{1}{EI} L^3 \frac{4}{81}$$

$$a_{23}\left(x = \frac{2}{3}L\right) = \frac{1}{EI} \left[-\frac{1}{6} \left(\frac{2L}{3}\right)^3 + L \frac{\left(\frac{2L}{3}\right)^2}{2} \right] = \frac{1}{EI} L^3 \left(\frac{14}{81}\right)$$

$$a_{33}(x = L) = \frac{1}{EI} \left[-\frac{L^3}{6} + L \frac{L^2}{2} \right] = \frac{1}{EI} L^3 \left(\frac{1}{3}\right)$$

◆ Coeficientes de Influência – Método da Flexibilidade

Assim, as matrizes M e K são

$$A = \frac{L^3}{EI} \begin{bmatrix} 1/81 & 5/162 & 4/81 \\ 5/162 & 8/81 & 14/81 \\ 4/81 & 14/81 & 1/3 \end{bmatrix}$$

$$M = \begin{bmatrix} m_e & 0 & 0 \\ 0 & m_e & 0 \\ 0 & 0 & m_e/2 \end{bmatrix}$$

$$K = A^{-1}$$

$$M_{3 \times 3} \ddot{q}(t)_{3 \times 1} + A_{3 \times 3}^{-1} q(t)_{3 \times 1} = f(t)_{3 \times 1}$$



1. TEORIA BÁSICA DE VIBRAÇÕES E SISTEMAS CONTÍNUOS

◆ Sistemas Contínuos

Sistemas relativos a corpos com massa e elasticidade distribuídas continuamente;

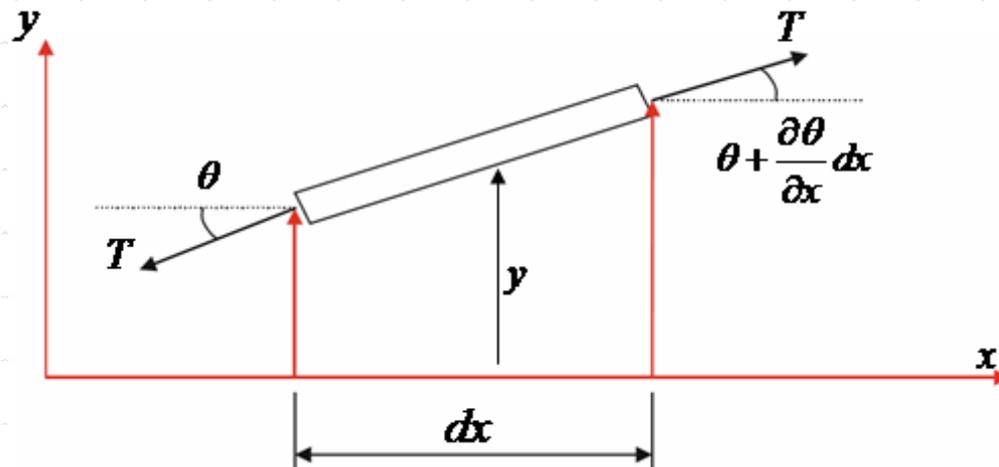
Corpos homogêneos e isotrópicos → Lei de Hooke;

Número infinito de graus de liberdade.

◆ Sistemas Contínuos – Corda Vibratória

Uma corda flexível de massa ρ por unidade de comprimento é estendida sob tensão T . Supondo que seja pequena a deflexão lateral y da corda, a mudança em tensão com deflexão é insignificante e pode ser ignorada. Assim,

$$T\left(\theta + \frac{\partial\theta}{\partial x} dx\right) - T\theta = \rho dx \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$$



◆ Sistemas Contínuos – Corda Vibratória

Supondo pequenas deflexões e inclinações, a eq. de movimento na direção y :

$$\frac{\partial \theta}{\partial x} = \frac{\rho}{T} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$$

Sabendo que a inclinação da corda é $\theta = \partial y / \partial x$ eq. acima se torna:

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$$

onde $c = \sqrt{T/\rho}$ é a velocidade de propagação da onda longo da corda.

◆ Sistemas Contínuos – Corda Vibratória

Um método de resolver equações diferenciais parciais é o da separação de variáveis. Neste método a solução é admitida na forma

$$y(x,t) = Y(x)G(t)$$

Assim, substituindo a solução proposta na equação diferencial, tem-se

$$\frac{1}{Y} \frac{d^2 Y}{dx^2} = \frac{1}{c^2} \frac{1}{G} \frac{d^2 G}{dt^2}$$

Considerando que o lado esquerdo desta equação é independente de t, e que o lado direito é independente de x, cada lado deve ser igual a uma constante.

◆ Sistemas Contínuos – Corda Vibratória

Considerando constante $(\omega/c)^2$, obtemos duas equações diferenciais ordinárias

$$\frac{d^2 Y}{d x^2} + \left(\frac{\omega}{c}\right)^2 Y = 0$$

$$\frac{d^2 G}{d t^2} + \omega^2 G = 0$$

Com as soluções gerais:

$$Y = A \sin \frac{\omega}{c} x + B \cos \frac{\omega}{c} x$$

$$G = C \sin \omega t + D \cos \omega t$$

As constantes arbitrárias A, B, C e D dependem das condições de contorno e iniciais, respectivamente.

◆ Sistemas Contínuos – Corda Vibratória

Por exemplo, se a corda é estendida entre dois pontos fixos distanciados de l , as condições de contorno são $y(0, t) = y(l, t) = 0$. A condição de $y(0, t) = 0$ vai exigir que $B = 0$, de modo que a solução aparecerá como

$$y(x, t) = (C \sin \omega t + D \cos \omega t) \sin \frac{\omega}{c} x$$

A condição $y(l, t) = 0$ conduz então à equação

$$\sin \frac{\omega l}{c} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\omega_n l}{c} = n\pi, \quad \text{com } n = 1, 2, 3, \dots$$

sendo $\lambda = c/f$ é o comprimento de onda e f é a frequência de oscilação.

◆ Sistemas Contínuos – Corda Vibratória

Cada n representa uma forma natural de vibrar com frequência natural determinada pela equação

$$f_n = \frac{n}{2l} c = \frac{n}{2l} \sqrt{\frac{T}{\rho}}, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

O forma característica de vibrar, autofunção, em cada frequência natural é dada por:

$$Y = \sin n \pi \frac{x}{l}$$

◆ Sistemas Contínuos – Corda Vibratória

No caso mais geral de vibração livre, iniciada através de alguma condição inicial qualquer, a solução pode ser obtida através de uma combinação lineal dos modos ou autofunções

$$y(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} (C_n \sin \omega_n t + D_n \cos \omega_n t) \sin \frac{n \pi x}{l}$$

$$\omega_n = \frac{n \pi c}{l}$$

O C_n e o D_n podem ser calculados adaptando-se esta equação às condições iniciais de

$$y(x,0) \quad e \quad \dot{y}(x,0)$$

◆ Sistemas Contínuos – Corda Vibratória – Exemplo

Uma corda uniforme de comprimento l é fixada nas extremidades e estendida sob a tensão T . Se a corda é deslocada para um perfil arbitrário $y(x,0)$ e solta, determinar C_n e D_n

$$y(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} (C_n \sin \omega_n t + D_n \cos \omega_n t) \sin \frac{n \pi x}{l}$$

condições iniciais

$$y(x,0) = y_0$$

$$\dot{y}(x,0) = 0$$

◆ Sistemas Contínuos – Corda Vibratória – Exemplo

SOLUÇÃO: Para $t = 0$, o deslocamento e velocidade são

$$y(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} D_n \sin \frac{n \pi x}{l} \qquad \dot{y}(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} \omega_n C_n \sin \frac{n \pi x}{l} = 0$$

Multiplicando cada equação por $\sin k\pi x / l$ e integrando de $x = 0$ a $x = l$ todos os termos do lado direito serão zero, exceto o termo $n = k$. Assim, chegamos ao resultado

$$D_k = \frac{2}{l} \int_0^l y(x,0) \sin \frac{k \pi x}{l} dx \qquad C_k = 0$$

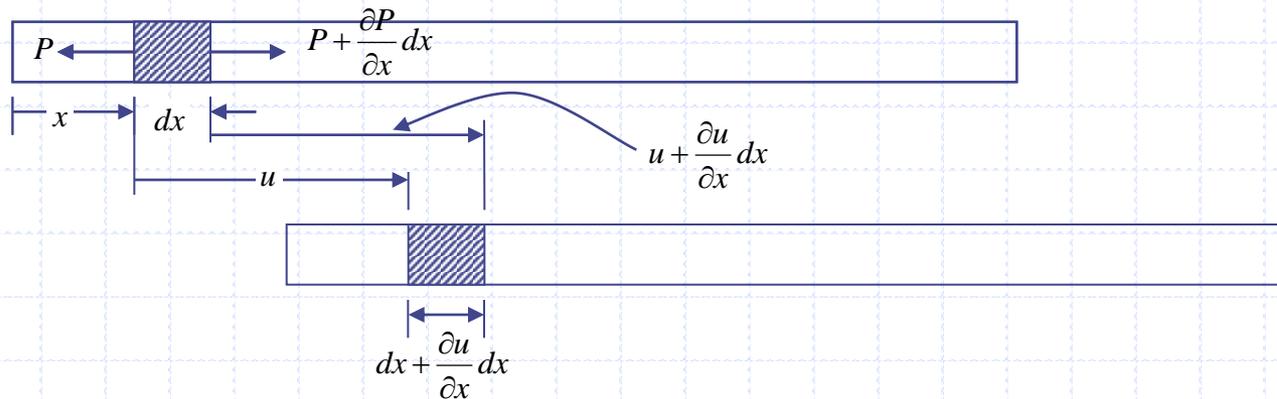
$$k = 1, 2, 3, \dots$$

◆ Sistemas Contínuos – Vibração Longitudinal de Barras

Supomos uma barra fina e uniforme ao longo do seu comprimento. Em razão de forças axiais haverá deslocamento.

$$u(x, t)$$

Consideremos um elemento diferencial da barra de comprimento dx



◆ Sistemas Contínuos – Vibração Longitudinal de Barras

Pela lei de Hooke, a relação entre a unidade de força e a unidade de alongamento é igual ao módulo de elasticidade E

$$E \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{P}{A}$$

onde A é a área da seção transversal da barra. Diferenciando em relação a x

Aplicamos a segunda lei de Newton

$$\frac{\partial P}{\partial x} dx = \rho A dx \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

onde ρ é a densidade da barra em libras por unidade de volume.

◆ Sistemas Contínuos – Vibração Longitudinal de Barras

Eliminando $\partial P/\partial x$, obtemos a equação diferencial parcial

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \left(\frac{E}{\rho} \right) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

Ou, de forma compacta

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

A velocidade de propagação do deslocamento ou onda de tensão na barra é igual,

$$c = \sqrt{E/\rho}$$

◆ Sistemas Contínuos – Vibração Longitudinal de Barras

Novamente, usando o método de separação de variáveis, a solução proposta será

$$u(x, t) = U(x) G(t)$$

Resultando em duas equações diferenciais ordinárias:

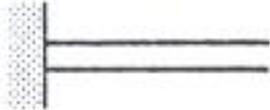
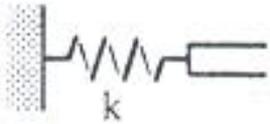
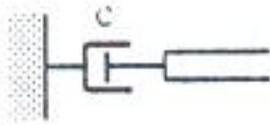
$$U(x) = A \sin \frac{\omega}{c} x + B \cos \frac{\omega}{c} x$$

e

$$G(t) = C \sin \omega t + D \cos \omega t$$

◆ Sistemas Contínuos – Vibração Longitudinal de Barras

Tabela com as condições de contorno de uma barra longitudinal

Case		Boundary condition left, $x = 0$	Boundary condition right, $x = l$
Free end		$\frac{\partial u}{\partial x} = 0$	$\frac{\partial u}{\partial x} = 0$
Fixed end		$u(0, t) = 0$	$u(l, t) = 0$
End spring		$AE \frac{\partial u}{\partial x} = ku$	$AE \frac{\partial u}{\partial x} = -ku$
End mass		$AE \frac{\partial u}{\partial x} = m \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$	$AE \frac{\partial u}{\partial x} = -m \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$
End damper		$AE \frac{\partial u}{\partial x} = c \frac{\partial u}{\partial t}$	$AE \frac{\partial u}{\partial x} = -c \frac{\partial u}{\partial t}$

◆ Sistemas Contínuos – Vibração Longitudinal de Barras – Exemplo

Calculo das frequências naturais e modos de vibrar de uma barra livre no espaço.

SOLUÇÃO: Numa barra livre-livre, as condições de contorno são

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 0, \text{ em } x=0, \text{ e } x=l$$

São portanto as seguintes as duas equações correspondentes às condições de contorno acima

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)_{x=0} = A \frac{\omega}{c} (C \sin \omega t + D \cos \omega t) = 0$$

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)_{x=l} = \frac{\omega}{c} \left(A \cos \frac{\omega l}{c} - B \sin \frac{\omega l}{c} \right) (C \sin \omega t + D \cos \omega t) = 0$$

◆ Sistemas Contínuos – Vibração Longitudinal de Barras – Exemplo

Considerando que essas equações devem valer para qualquer tempo t , A deve ser zero na primeira equação. Uma vez que B deve tomar qualquer valor, a segunda equação é satisfeita quando

$$\sin \frac{\omega l}{c} = 0 \quad \text{ou} \quad \frac{\omega_n l}{c} = \omega_n l \sqrt{\frac{\rho}{E}} = \pi, 2\pi, 3\pi, \dots, n\pi$$

Desta forma, a frequência de vibração é dada por

$$\omega_n = \frac{n\pi}{l} \sqrt{\frac{E}{\rho}}, \quad f_n = \frac{n}{2l} \sqrt{\frac{E}{\rho}}$$

onde n representa a ordem do modo.

◆ Sistemas Contínuos – Vibração Longitudinal de Barras – Exemplo

A forma característica de vibrar, modos naturais do sistema contínuo, é dada por:

$$U(x) = A \sin \frac{\omega_n}{c} x + B \cos \frac{\omega_n}{c} x$$

Pode-se então escrever a solução para vibração livre de uma barra livre nas extremidades

$$u(x,t) = u_o \cos \frac{n\pi}{l} x \left(C \sin \left[\left(\frac{n\pi}{l} \sqrt{\frac{E}{\rho}} \right) t \right] + D \cos \left[\left(\frac{n\pi}{l} \sqrt{\frac{E}{\rho}} \right) t \right] \right)$$

onde C e D são as constantes de integração que dependem das condições iniciais.

NOTA: as freqüências naturais de uma corda, assim como as freqüências naturais de uma barra longitudinal, são múltiplos inteiros uma da outra.

◆ Sistemas Contínuos – Vibração Torcional de Barras

A equação de movimento de uma barra em vibração torcional é semelhante àquela da vibração longitudinal de barras, discutida na seção anterior.

Fazendo-se a medida de x ao longo da barra, o ângulo de torção devido a um torque T , em qualquer comprimento dx da barra torcional, é

$$d\theta = \frac{T dx}{I_p G}$$

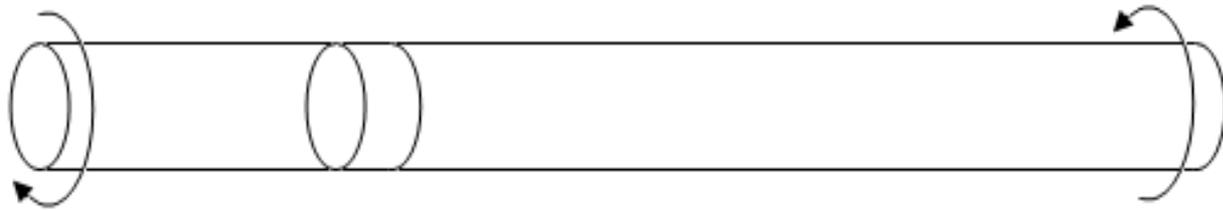
onde $I_p G$ é a rigidez torcional dada pelo produto do momento polar de segunda ordem I_p de área da seção transversal e o módulo de cisalhamento de elasticidade G .

Sendo T e $T + (\partial T / \partial x) dx$ o torque sobre as duas faces do elemento, o torque líquido torna-se

$$\frac{\partial T}{\partial x} dx = I_p G \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} dx$$

◆ Sistemas Contínuos – Vibração Torcional de Barras

$$\frac{\partial T}{\partial x} dx = I_p G \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} dx$$



$$T \left(\text{cylinder} \right) T + \frac{\partial T}{\partial x} dx$$

$\rightarrow dx \leftarrow$

Torque T aplicado no elemento dx

◆ Sistemas Contínuos – Vibração Torcional de Barras

Igualando este torque ao produto do momento de inércia da massa ($\rho I_p dx$) do elemento e a aceleração angular $\partial^2 \theta / \partial t^2$, onde ρ é a densidade da barra em libras por unidade de volume, a equação diferencial de movimento toma-se

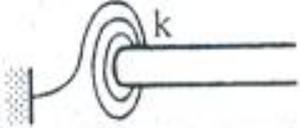
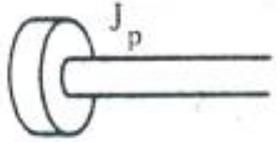
$$\rho I_p dx \frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} = I_p G \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} dx, \quad \frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} = \left(\frac{G}{\rho} \right) \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2}$$

Esta equação é da mesma forma que a vibração horizontal de barras onde θ e G/ρ substituem u e E/ρ , respectivamente. Resulta pois que por comparação

$$\theta = \left(A \sin \omega \sqrt{\frac{\rho}{G}} x + B \cos \omega \sqrt{\frac{\rho}{G}} x \right) (C \sin \omega t + D \cos \omega t)$$

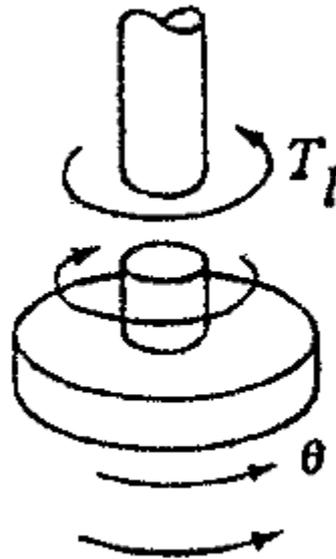
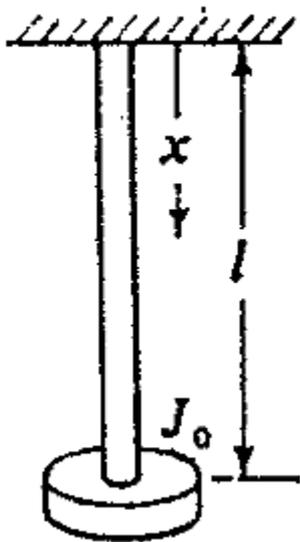
◆ Sistemas Contínuos – Vibração Torcional de Barras

Tabela com as condições de contorno de uma barra longitudinal

Case		Boundary condition left, $x = 0$	Boundary condition right, $x = l$
Fixed end		$\theta(0, t) = 0$	$\theta(l, t) = 0$
Free end		$\frac{\partial \theta}{\partial x} = 0$	$\frac{\partial \theta}{\partial x} = 0$
Torsional spring		$I_p G \frac{\partial \theta}{\partial x} = k \theta$	$I_p G \frac{\partial \theta}{\partial x} = -k \theta$
Inertia J_p		$I_p G \frac{\partial \theta}{\partial x} = J_p \frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2}$	$I_p G \frac{\partial \theta}{\partial x} = -J_p \frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2}$
Torsional damper		$I_p G \frac{\partial \theta}{\partial x} = c \frac{\partial \theta}{\partial t}$	$I_p G \frac{\partial \theta}{\partial x} = -c \frac{\partial \theta}{\partial t}$

◆ Sistemas Contínuos – Vibração Torcional de Barras – Exemplo

O tubo da sonda de um ponto de petróleo termina na sua extremidade inferior por uma barra contendo uma broca. Derivar a expressão para as freqüências naturais, supondo que o tubo da sonda seja uniforme e fixo na extremidade superior e que a barra e a broca sejam representadas por uma massa final com momento de inércia J_0 .



Torque de
Inércia

$$-J_0 \left(\frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} \right)_{x=l}$$

◆ Sistemas Contínuos – Vibração Torcional de Barras – Exemplo

SOLUÇÃO: A condição de contorno na extremidade superior é $x = 0, \theta = 0$, o que requer que B seja 0, conforme visto anteriormente.

Quanto à extremidade inferior, o torque sobre o eixo é devido ao torque de inércia do disco final, conforme representado pelo diagrama de corpo livre da Fig. 16.5. O torque de inércia do disco é $-J_o(\partial^2\theta/\partial t^2)_{x=l} = J_o\omega^2(\theta)_{x=l}$ ao passo que o torque do eixo é $T_l = GI_p(d\theta/dx)_{x=l}$. Igualando os dois, temos:

$$GI_p \left(\frac{d\theta}{dx} \right)_{x=l} = J_o \omega^2 (\theta)_{x=l}$$

$$GI_p \omega \sqrt{\frac{\rho}{G}} \cos \omega \sqrt{\frac{\rho}{G}} l = J_o \omega^2 \sin \omega \sqrt{\frac{\rho}{G}} l$$

◆ Sistemas Contínuos – Vibração Torcional de Barras – Exemplo

$$\operatorname{tg} \omega l \sqrt{\frac{\rho}{G}} = \frac{I_p}{\omega J_o} \sqrt{G \rho} = \frac{I_p \rho l}{g J_o \omega l} \sqrt{\frac{G}{\rho}}$$

$$\operatorname{tg} \omega l \sqrt{\frac{\rho}{G}} = \frac{J_{barra}}{J_o \omega l} \sqrt{\frac{G}{\rho}}$$

Esta equação é da forma

$$\beta \operatorname{tg} \beta = \frac{J_{barra}}{J_o}, \quad \beta = \omega l \sqrt{\frac{\rho}{G}}$$

que pode ser resolvida graficamente ou por meio de tabelas.

◆ Sistemas Contínuos – Vibração Torcional de Barras – Exemplo

Utilizando a equação de frequência desenvolvida, podemos determinar as duas primeiras frequências naturais de um tubo de sonda de um poço de petróleo. O tubo tem 500 pés de comprimento, sendo fixo na extremidade superior e em sua parte inferior existe um colar de perfuração com 120 pés de comprimento.

Valores médios do tubo e do colar \Rightarrow

Tubo da sonda:

Diâmetro externo = 4-1/2 pol

Diâmetro interno = 3,83 pol

$$I_p = 0,00094 \text{ pés}^4$$

$$l = 5000 \text{ pés}$$

Colar de perfuração:

Diâmetro externo = 7-5/8 pol

Diâmetro interno = 2,0 pol

$$J_o = 0,244 \times 120 \text{ pés} = 29,3 \text{ lb pés s}^2$$

$$J_{barra} = I_p \rho l = 0,00094 \times \frac{490}{32,2} \times 5000 = 71,4 \text{ pés lb s}^2$$

◆ Sistemas Contínuos – Vibração Torcional de Barras – Exemplo

SOLUÇÃO: A equação a ser resolvida é

$$\beta \operatorname{tg} \beta = \frac{J_{\text{barra}}}{J_o} = 2,44$$

As raízes do polinômio acima dá como resultado $\beta=1,135; 3,722\dots$

$$\beta = \omega l \sqrt{\frac{\rho}{Gg}} = 5000 \omega \sqrt{\frac{490}{12 \times 10^6 \times 122 \times 32,2}} = 0,470 \omega$$

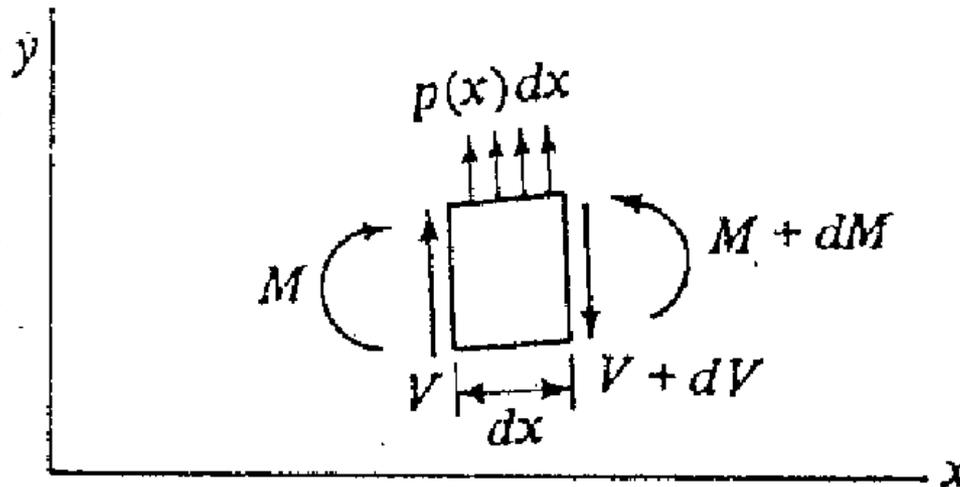
Resolvendo em relação a ω , encontram-se as 2 primeiras frequências naturais

$$\omega_1 = \frac{1,135}{0,470} = 2,41 \text{ rad/s} = 0,384 \text{ cps}$$

$$\omega_2 = \frac{3,722}{0,470} = 7,93 \text{ rad/s} = 1,26 \text{ cps}$$

◆ Sistemas Contínuos – Viga – Equação de Euler

Consideremos as forças e momentos atuando sobre um elemento da viga representada abaixo, a fim de determinar a equação diferencial para a vibração lateral de vigas.



Elemento de Viga de Euler-Bernoulli

◆ Sistemas Contínuos – Viga – Equação de Euler

V e M são os momentos de cisalhamento e flexão, respectivamente e $p(x)$ representa a carga por unidade de comprimento da viga. Somando as forças na direção y

$$dV - p(x) dx = 0$$

Somando os momentos em relação a qualquer ponto sobre a face direita do elemento

$$dM - V dx - \frac{1}{2} p(x)(dx)^2 = 0$$

No processo de limite essas equações resultam nas seguintes relações importantes

$$\frac{dV}{dx} = p(x), \quad \frac{dM}{dx} = V$$

◆ Sistemas Contínuos – Viga – Equação de Euler

A primeira parte da eq. anterior exprime que a taxa de variação do cisalhamento ao longo da viga é igual à carga por unidade de comprimento, e a segunda exprime que a taxa de variação do momento ao longo da viga é igual ao cisalhamento.

Assim obtemos:

$$\frac{d^2 M}{d x^2} = \frac{d V}{d x} = p(x)$$

O momento de flexão é relacionado à curvatura pela equação de flexão, portanto

$$-M = EI \frac{d^2 y}{dx^2}$$

Rearranjando as equações, obtemos

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(EI \frac{\partial^2 y(x, t)}{\partial x^2} \right) - p(x) = 0$$

◆ Sistemas Contínuos – Viga – Equação de Euler

Para uma viga vibrando, sob o seu próprio peso, em volta da sua posição de equilíbrio estático, a carga por unidade de comprimento é igual à carga de inércia devido à sua massa e aceleração. Considerando que a força de inércia é na mesma direção que $p(x)$, tem-se

$$p(x,t) = \rho A \frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial t^2}$$

onde ρ/A é a massa por unidade de comprimento da viga e A é a área de seco transversal.

Usando esta relação, a equação para a vibração lateral da viga se reduz a

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(EI \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \right) + \rho A \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = 0$$

◆ Sistemas Contínuos – Viga – Equação de Euler

No caso especial da rigidez de flexão EI ser uma constante, a equação anterior pode ser escrita na forma

$$EI \frac{\partial^4 y(x,t)}{\partial x^4} + \rho A \frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial t^2} = 0$$

ou

$$c^2 \frac{\partial^4 y(x,t)}{\partial x^4} + \frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial t^2} = 0$$

onde $c = \sqrt{EI/\rho A}$. Esta equação diferencial precisa de 4 condições de contorno e 2 condições iniciais.

◆ Sistemas Contínuos – Viga – Equação de Euler

Assumindo novamente a solução a variáveis separáveis:

$$y(x, t) = X(x) T(t)$$

e substituindo na equação da onda, obtêm-se:

$$c^2 \frac{X(x)''''}{X(x)} = -\frac{\ddot{T}(t)}{T(t)} = \lambda^2$$

Transformando em duas equações diferenciáveis da forma:

$$\ddot{T}(t) + \lambda^2 T(t) = 0 \qquad X(x)'''' - \left(\frac{\lambda}{c}\right)^2 X(x) = 0$$

A solução da equação diferencial temporal é dada por:

$$T(t) = C_1 \sin(\lambda t) + C_2 \cos(\lambda t)$$

onde C_1 e C_2 são determinados através das condições iniciais.

◆ Sistemas Contínuos – Viga – Equação de Euler

Da equação diferencial função da posição x , o problema de autovalores resulta no autovalor

$$\beta^4 = \frac{\lambda^2}{c^2} = \frac{\rho A \lambda^2}{EI}$$

E na autofunção associado (formas de vibrar características) definido por:

$$X(x) = A \cosh \beta x + B \sinh \beta x + C \cos \beta x + D \sin \beta x$$

onde A, B, C e D são obtidos através das condições de contorno do problema específico.

◆ Sistemas Contínuos – Viga – Equação de Euler – Exemplo

Achar as frequências naturais e os modos de vibrar de uma viga engastada – livre cujas condições de contorno são:

$$a) (X)_{x=0} = 0 \qquad c) \left(\frac{d^2 X}{dx^2} \right)_{x=L} = 0$$

$$b) \left(\frac{dX}{dx} \right)_{x=0} = 0 \qquad d) \left(\frac{d^3 X}{dx^3} \right)_{x=L} = 0$$

Considerando a função $X(x)$ na sua forma mais geral

$$X(x) = C_1 (\cos \beta x + \cosh \beta x) + C_2 (\cos \beta x - \cosh \beta x) + \\ C_3 (\sin \beta x + \sinh \beta x) + C_4 (\sin \beta x - \sinh \beta x)$$

◆ Sistemas Contínuos – Viga – Equação de Euler – Exemplo

Aplicando as condições de contorno obtemos as seguintes relações para as constantes de integração:

$$a) C_1 = 0 \quad b) C_3 = 0$$

e utilizando as relações c) e d)

$$0 = C_2 (\cos \beta L + \cosh \beta L) + C_4 (\sin \beta L + \sinh \beta L)$$

$$0 = C_2 (-\sin \beta L + \sinh \beta L) + C_4 (\cos \beta L + \cosh \beta L)$$

$$C_2 = \frac{-C_4 (\cos \beta L + \cosh \beta L)}{(-\sin \beta L + \sinh \beta L)}$$

$$\frac{-C_4 (\cos \beta L + \cosh \beta L)}{(-\sin \beta L + \sinh \beta L)} + C_4 (\sin \beta L + \sinh \beta L) = 0$$

$$C_4 \left[(\cos \beta L + \cosh \beta L)^2 + (\sin^2 \beta L - \sinh^2 \beta L) \right] = 0$$

◆ Sistemas Contínuos – Viga – Equação de Euler – Exemplo

Da última relação acima, para que esta seja satisfeita, deve-se cumprir que:

$$\cos \beta L \cosh \beta L = 0 \quad (\text{equação característica})$$

Na tabela abaixo encontram-se os primeiros valores que verificam a igualdade acima:

$\beta_1 L$	$\beta_2 L$	$\beta_3 L$	$\beta_4 L$	$\beta_5 L$	$\beta_6 L$
1,875	4,694	7,855	10,996	14,137	17,279

Considerando que

$$c^2 = \frac{EI}{\rho A} \qquad \beta^4 = \frac{\lambda^2}{c^2} = \frac{\rho A \lambda^2}{EI}$$

◆ Sistemas Contínuos – Viga – Equação de Euler – Exemplo

E as frequências naturais são obtidas através da relação:

$$\lambda_i = \omega_{n_i} = (\beta L)^2 \sqrt{\frac{EI}{\rho A L^4}} \quad [rad / s]$$

e a solução é dada por:

$$y(x, t) = \sum_{i=1}^{\infty} X_i(x) (A_i \operatorname{sen} \lambda_i t + B_i \operatorname{cos} \lambda_i t)$$

$$\text{com } X_i(x) = C_2 (\operatorname{cos} \beta x + \operatorname{cosh} \beta x) + C_4 (\operatorname{sin} \beta x - \operatorname{sinh} \beta x)$$

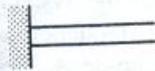
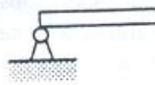
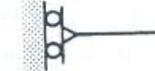
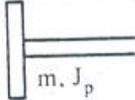
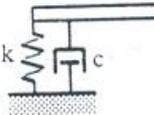
◆ Sistemas Contínuos – Viga – Equação de Euler – Exemplo

Valores numéricos de $(\beta l)^2$ para distintas condições de contorno

Posição da viga	$(\beta_1 l)^2$ Fundamental	$(\beta_2 l)^2$ Segundo modo	$(\beta_3 l)^2$ Terceiro modo
Apoiada simplesmente	9,87	39,5	88,9
Cantilever ou em balanço	3,52	22,4	61,7
Duplamente livre	22,4	61,7	121,0
Duplamente engastada	22,4	61,7	121,0
Engastada-articulada	15,4	50,0	104,0
Articulada-livre	0	15,4	50,0

◆ Sistemas Contínuos – Viga – Equação de Euler – Exemplo

Condições de contorno para vibração lateral

Case		Boundary condition left, $x = 0$	Boundary condition right, $x = l$
Clamped (deflection, slope = 0)		$y(0, t) = 0$ $\frac{\partial y}{\partial x} = 0$	$y(l, t) = 0$ $\frac{\partial y}{\partial x} = 0$
Pinned (deflection, moment = 0)		$y(0, t) = 0$ $\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = 0$	$y(l, t) = 0$ $\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = 0$
Sliding (slope, shear = 0)		$\frac{\partial y}{\partial x} = 0$ $\frac{\partial^3 y}{\partial x^3} = 0$	$\frac{\partial y}{\partial x} = 0$ $\frac{\partial^3 y}{\partial x^3} = 0$
Free (moment, shear = 0)		$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = 0$ $\frac{\partial^3 y}{\partial x^3} = 0$	$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = 0$ $\frac{\partial^3 y}{\partial x^3} = 0$
Mass m and moment of inertia J_p		$EI \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = -J_p \frac{\partial^3 y}{\partial x \partial t^2}$ $EI \frac{\partial^3 y}{\partial x^3} = -m \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$	$EI \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = J_p \frac{\partial^3 y}{\partial x \partial t^2}$ $EI \frac{\partial^3 y}{\partial x^3} = m \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$
Damper c and spring k		$EI \frac{\partial^3 y}{\partial x^3} = -ky - c \frac{\partial y}{\partial t}$ $\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = 0$	$EI \frac{\partial^3 y}{\partial x^3} = ky + c \frac{\partial y}{\partial t}$ $\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = 0$

◆ Sistemas Contínuos - Problema de Autovalores

- Examinando o problema derivado na equação da viga, a equação diferencial de quarta ordem em função do deslocamento:

$$X_i''''(x) + \beta_i^4 X_i(x) = 0$$

e definindo:

$$\gamma_i = \beta_i^4$$

- Este problema é caracterizado como um problema de autovalores de forma tal que a derivada quarta da autofunção $X_i(x)$ é igual à mesma autofunção multiplicada por um escalar γ_i (autovalor).

◆ Sistemas Contínuos – Ortogonalidade

- Considerando as seguintes autofunções i e j :

$$X_i''''(x) = \gamma_i X_i(x)$$

$$X_j''''(x) = \gamma_j X_j(x)$$

- Multiplicando X_j na primeira equação, X_i na segunda equação e integrando sobre a longitude da viga:

$$\int_0^L X_i''''(x) X_j(x) dx = \gamma_i \int_0^L X_i(x) X_j(x) dx$$

$$\int_0^L X_j''''(x) X_i(x) dx = \gamma_j \int_0^L X_j(x) X_i(x) dx$$

◆ Sistemas Contínuos – Ortogonalidade

- Integrando por partes o lado esquerdo da igualdade da equação anterior

$$\begin{aligned} & \left[X_i'''(x) X_j(x) \right]_0^L - \left[X_i''(x) X_j'(x) \right]_0^L + \int_0^L X_i''(x) X_j''(x) dx = \gamma_i \int_0^L X_i(x) X_j(x) dx \\ & \left[X_j'''(x) X_i(x) \right]_0^L - \left[X_j''(x) X_i'(x) \right]_0^L + \int_0^L X_j''(x) X_i''(x) dx = \gamma_j \int_0^L X_j(x) X_i(x) dx \end{aligned}$$

- Em geral por condição de contorno:

$$\textit{livre} \quad \Rightarrow \quad X'' = 0 \quad X''' = 0$$

$$\textit{engastado} \quad \Rightarrow \quad X = 0 \quad X' = 0$$

$$\textit{simplesmente apoiado} \quad \Rightarrow \quad X = 0 \quad X'' = 0$$

◆ Sistemas Contínuos – Ortogonalidade

- O que leva a conclusão que o primeiro e o segundo termo são nulos. Assim, obtemos:

$$(\gamma_i - \gamma_j) \int_0^L X_i X_j dx = 0$$

- Então, chega-se à conclusão que se $i \neq j$, então $\gamma_i \neq \gamma_j$ e:

$$\int_0^L X_i X_j dx = 0, \quad \int_0^L X_i'' X_j'' dx = 0 \quad \text{e} \quad \int_0^L X_i''' X_j''' dx = 0$$

As equações acima representam a relação de ortogonalidade de vibração transversal em vigas.

◆ Sistemas Contínuos – Ortogonalidade

Quando $i = j$, a primeira integral das equações dará um escalar α_i :

$$\int_0^L X_i^2 dx = \alpha_i$$

- A segunda e a terceira equações tomam a forma:

$$\int_0^L X_i''' X_i dx = \int_0^L (X_i'')^2 dx = \gamma_i \alpha_i = \beta_i^4 \alpha_i = \left(\frac{\lambda_i}{c}\right)^2 \alpha_i$$

◆ Sistemas Contínuos – Ortogonalidade – Exemplo

- Com o propósito de realizar uma transformação, assim como será feito no caso discreto, para resolver o problema, tomemos a equação de movimento:

$$\rho A \frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial t^2} dx + EI \frac{\partial^4 y(x,t)}{\partial x^4} dx = 0$$

e para uma viga de seção constante:

$$A(x) = A \quad I(x) = I$$

e chamando de $\rho A = m$ (massa por unidade de longitude) e $EI = r$ (rigidez flexional), a equação de movimento pode ser escrita:

$$m \frac{\partial^2 (y(x,t))}{\partial t^2} dx + r \frac{\partial^4 (y(x,t))}{\partial x^4} dx = 0$$

◆ Sistemas Contínuos – Ortogonalidade – Exemplo

- Pelo Teorema de Expansão, podemos escrever a solução do problema da forma:

$$y(x,t) = \sum_{i=1}^{\infty} p_i(t) X_i(x)$$

com $i=1, 2, 3, \dots$ e definindo $p_i(t)$ como coordenadas generalizadas principais.

Substituindo $y(x,t)$ na equação de movimento:

$$\sum_{i=1}^{\infty} (m \ddot{p}_i X_i + r p_i X_i''') dx = 0$$

Premultiplicando por X_j (a j -ésima autofunção) e integrando em L , obtemos:

$$\sum_{i=1}^{\infty} \left(m \ddot{p}_i \int_0^L X_i X_j dx + r p_i \int_0^L X_i''' X_j dx \right) dx = 0$$

◆ Sistemas Contínuos – Ortogonalidade – Exemplo

- Devido à ortogonalidade das funções de forma, a equação anterior só toma valores distintos de zero quando $i = j$. Assim, a equação de movimento em função das coordenadas principais $p_i(t)$ será:

$$m_{p_i} \ddot{p}_i(t) + r_{p_i} p_i(t) = 0 \quad , \text{com } i = 1, 2, 3, \dots$$

$p_i(t) \rightarrow$ Coordenadas principais generaliza das

$$m_{p_i} = m \int_0^L X_i^2 dx = m \alpha_i \rightarrow \text{massa modal ou massa em coord. principais}$$

$$r_{p_i} = r \int_0^L X_i'' X_i'' dx = \int_0^L (X_i'')^2 dx = m \lambda_i^2 \alpha_i \rightarrow \text{rigidez modal ou rigidez em coordenadas principais}$$

◆ Sistemas Contínuos – Ortogonalidade

- Se as autofunções são ortonormalizadas através de $\sqrt{m\alpha_i}$, isto é, cada autofunção é dividida por este valor escalar, as seguintes relações são obtidas:

$$\int_0^L (X_i)^2 dx = 1$$

$$\int_0^L X_i''' X_i''' dx = \int_0^L (X_i''')^2 dx = \beta_i^4 = \left(\frac{\lambda_i}{c}\right)^2$$

A equação diferencial em coordenadas principais, considerando autofunções ortonormalizadas:

$$\ddot{p}_i(t) + \lambda_i^2 p_i(t) = 0 \quad , \text{com } i = 1, 2, 3, \dots$$

$$\lambda_i = \omega_i$$

◆ Sistemas Contínuos – Ortogonalidade

A equação diferencial em coordenadas principais, considerando autofunções ortonormalizadas e vibração forçada:

$$\ddot{p}_i(t) + \lambda_i^2 p_i(t) = f(t) \int_0^l X_i dx = g_i(t), \quad \text{com } i = 1, 2, 3, \dots$$

Equação de movimento de um sistema equivalente de um grau de liberdade. No domínio da frequência:

$$\left(-\Omega^2 + \lambda_i^2\right) P_i(\Omega) = G_i(\Omega), \quad \text{com } i = 1, 2, 3, \dots$$

$$P_i(\Omega) = \frac{G_i(\Omega)}{\left(-\Omega^2 + \lambda_i^2\right)}$$

$$y(x, t) = \sum_{i=1}^{\infty} p_i(t) X_i(x)$$



1. TEORIA BÁSICA DE VIBRAÇÕES

F) Equações de Lagrange

◆ Equação de movimento

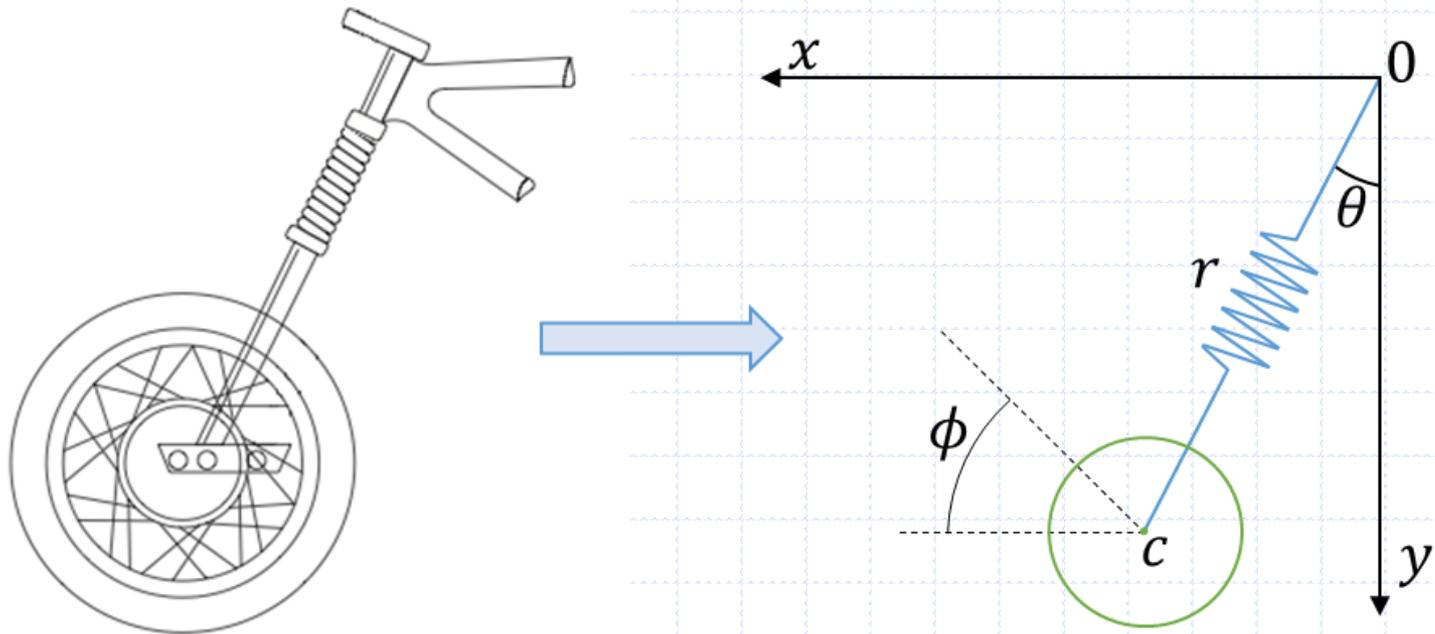
- A medida que o sistema vá tomando formas cada vez mais complexas, geometricamente complexas, torna-se progressivamente mais difícil o estabelecimento de relações vetoriais requeridas pelas Leis de Newton.
- Lagrange desenvolveu um tratado geral de sistemas dinâmicos formulado por meio das quantidades escalares de energia cinética T , energia potencial U e do trabalho W das forças externas.

◆ Coordenadas Generalizadas

- As equações de movimento de um sistema podem ser formuladas por meio de diversos sistemas de coordenadas. Entretanto, para realizar uma descrição completa do sistema, é necessário que o número de coordenadas independentes seja o número de graus de liberdade.
- Tais coordenadas independentes são chamadas coordenadas generalizadas q_i .

◆ Coordenadas Generalizadas

Exemplo clássico de coordenadas generalizadas:



Sistema de três graus de liberdade

◆ Coordenadas Generalizadas

- A configuração espacial do sistema pode ser representada, em todo momento, por três coordenadas independentes. Exemplo:

$$r, \phi, \theta$$

$$x, y, \theta$$

- Na realidade existem uma infinidade de “3” coordenadas que são capazes de descrever o comportamento dinâmico do sistema.
- Qualquer transformação linear, realizada através de uma matriz não singular, nos leva a um novo conjunto de variáveis capaz de descrever o comportamento dinâmico do sistema ou estrutura.
- Muitas vezes este novo conjunto de variáveis não possui significado físico algum. Após isto, realizando uma transformação inversa é possível recuperar as variáveis físicas originais.

◆ Coordenadas Generalizadas

- Por que três coordenadas?

- Uma rápida visualização mostra que uma ou duas coordenadas não são suficientes para descrever a configuração do sistema.
- Entretanto, poderíamos descrever a configuração do sistema por mais de três coordenadas.

Exemplo: x, y, ϕ, θ

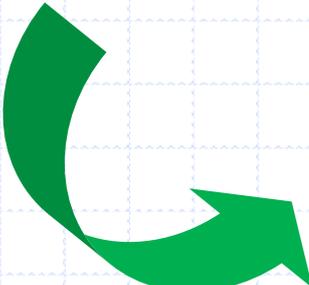
- Porém, isso levará a relações de vínculos entre algumas das coordenadas e então elas não serão mais independentes. Neste caso:

$$\rightarrow x = y \tan \theta$$

- Uma vez que x, y, ϕ, θ são Linearmente Dependentes $\rightarrow y, \theta, \phi$ são suficientes para descrever o comportamento dinâmico do sistema, já que x é definida perfeitamente a partir de y e θ .

◆ Coordenadas Generalizadas

- Em geral, se o número de coordenadas generalizadas capazes de descrever o movimento do sistema é “ n ” e se elegem $p > n$ coordenadas → existirão $p - n$ **relações de vínculo**.


$$\begin{aligned} f_1(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_p) &= c \\ &\vdots \\ f_{n-p}(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_p) &= c \end{aligned}$$

- Onde α_i são coordenadas escolhidas. Estas relações se podem eliminar (pelos menos teoricamente) $p-n$ coordenadas.
- A eleição dessas coordenadas independentes (coordenadas generalizadas) são arbitrárias, em geral, ditadas pela convenção.

◆ Coordenadas Generalizadas

NOTAS 1:

- O número de coordenadas generalizadas e o número de graus de liberdade é exatamente o mesmo.
- As coordenadas generalizadas representam a quantidade de coordenadas físicas, ou não, necessárias para descrever o comportamento dinâmico do sistema.
- Um conjunto de coordenadas generalizadas obtidas através de um outro conjunto de coordenadas físicas através de uma transformação linear (com uma matriz não singular que possa formar uma base no espaço n dimensional) também será capaz de descrever o comportamento dinâmico do sistema.

◆ Coordenadas Generalizadas

NOTAS 2:

- Conhecido o sistema de equações diferenciais é comum, para resolvê-lo, utilizar coordenadas generalizadas sem qualquer significado físico, através de transformações lineares das coordenadas físicas.
- Solucionado o problema nestas coordenadas generalizadas, através de uma transformação inversa, recuperamos as coordenadas físicas.
- Definido o modelo analítico, podemos montar o sistema de equações diferenciais através do uso de conceito do coeficiente de influencia.
- Outra técnica, com algumas limitações, é conhecida como modos assumidos.
- A mais utilizada é a técnica conhecida por elementos finitos.

◆ Principio dos Trabalhos Virtuais

- O principio de trabalho virtual é essencialmente um tratado de equilíbrio estático de um sistema.
- Este principio serve para realizar uma transição entre o mecanismo Newtoniano e Lagrangeano.
- Considerando um sistema de N partículas e com R_i ($i=1, N$) como a força resultante da partícula i , para que exista equilíbrio deve cumprir-se:

$$R_i = 0$$

◆ Obtenção da Equação de Movimento – PTV

DESLOCAMENTO VIRTUAL:

- São pequenos;
- São arbitrários porém compatíveis com os vínculos externos e internos;
- São deslocamentos de alguma posição verdadeira (equilíbrio);
- São diferenciáveis, satisfazem as regras de diferenciação;
- Não são deslocamentos verdadeiros, são virtuais. Não existem variações de tempo associado a este deslocamento.

O trabalho virtual da partícula i , devido a R_i e um deslocamento virtual, é:

$$R_i \cdot \delta r_i = 0$$

◆ Obtenção da Equação de Movimento – PTV

O trabalho virtual para o sistema total:

$$\delta\bar{W} = \sum_{i=1}^N R_i \cdot \delta r_i = 0$$

Considerando todas as forças sobre o sistema, incluindo as forças de restrições (forças de vínculos ou internas).

$$R_i = F_i + f'_i$$

$$i = 1, 2, \dots, N$$

F_i = forças aplicadas na partícula i

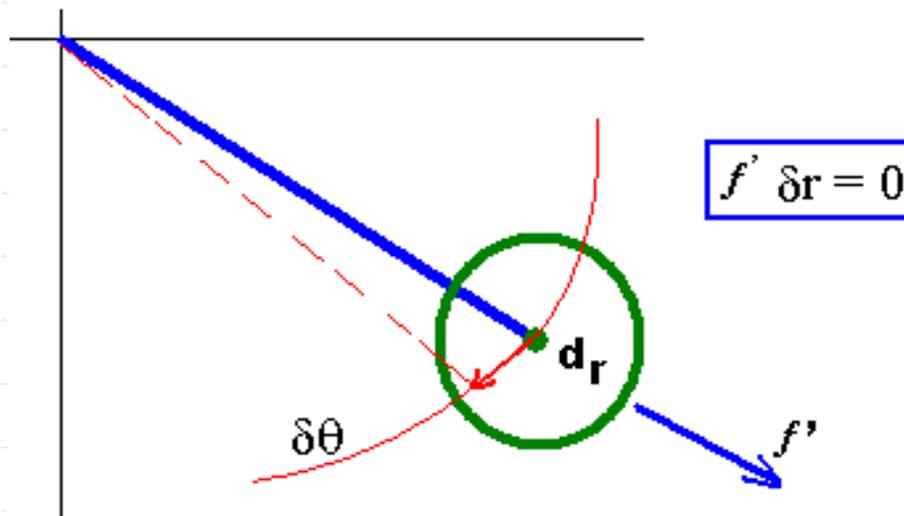
f'_i = forças de restrições

◆ Obtenção da Equação de Movimento – PTV

Assim, o trabalho virtual será:

$$\delta\bar{W} = \sum_{i=1}^N F_i \cdot \delta r_i + \sum_{i=1}^N f_i' \cdot \delta r_i = 0$$

Forças de vínculo não produzem trabalho virtual porque não existe componentes destas forças na direção dos deslocamentos virtuais.



◆ Obtenção da Equação de Movimento – PTV

Devido a que as forças de restrição não realizam trabalho

$$\delta \bar{W} = \sum_{i=1}^N F_i \cdot \delta r_i = 0$$

A expressão acima é conhecida como **princípio de trabalho virtuais** aplicado a um sistema de partículas. Se diz que se o sistema de forças está em equilíbrio, o trabalho virtual é nulo.

◆ Obtenção da Equação de Movimento – PTV

Se as coordenadas generalizadas descrevem a configuração do sistema, pode-se escrever:

$$r_i = r_i (q_1, q_2, \dots, q_n) \quad i = 1, 2, \dots, N$$

Consequentemente:

$$\delta r_i = \sum_j \frac{\partial r_i}{\partial q_j} \delta q_j$$

Então

$$S\overline{W} = \sum_{i=1}^N F_i \cdot \delta r_i = 0 \quad \longrightarrow \quad \sum_{i=1}^N F_i \sum_{j=1}^n \frac{\partial r_i}{\partial q_j} \delta q_j = 0$$

◆ Obtenção da Equação de Movimento – PTV

$$\sum_{j=1}^n \left(\sum_{i=1}^N F_i \frac{\partial r_i}{\partial q_j} \right) \delta q_j = 0$$

$$\sum_{j=1}^n f_j \delta q_j = 0$$

f_j , com $j=1$ a n , são as forças generalizadas

◆ Obtenção da Equação de Movimento – PTV

Para um sistema de n graus de liberdade se tem n forças generalizadas.

Como as variações $\delta q_i, j = 1, 2, \dots, N$, são arbitrárias, a expressão anterior fica:

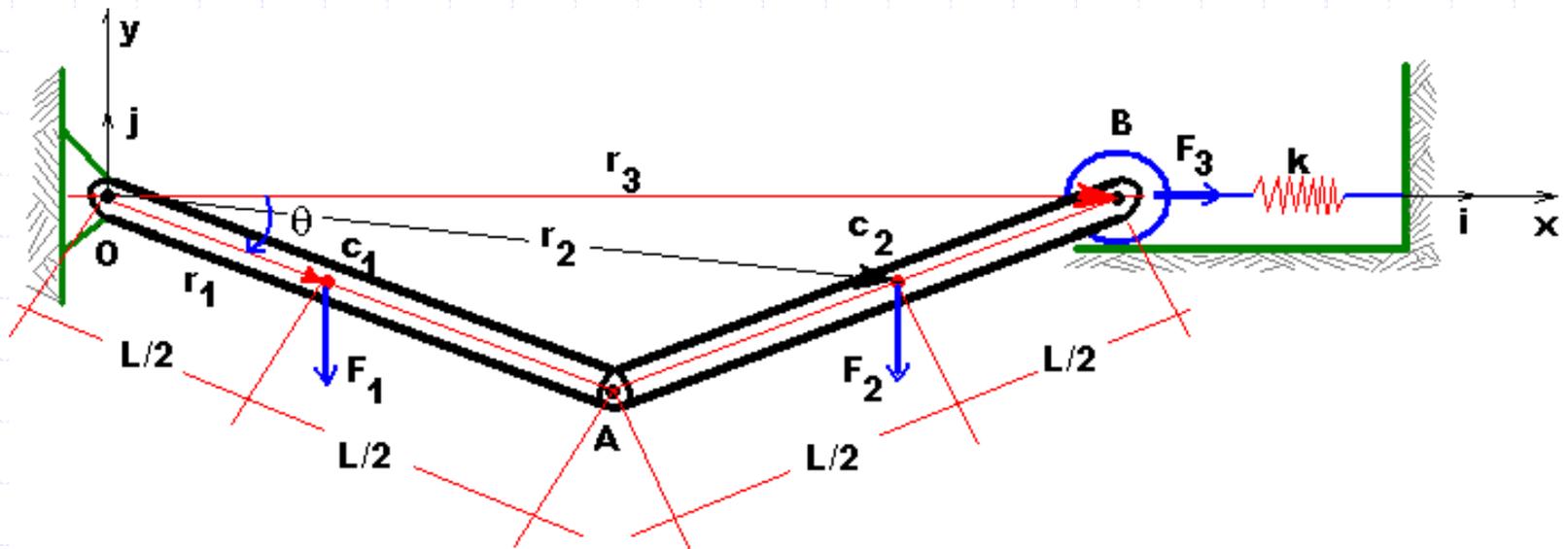
$$\sum_{i=1}^N F_i \frac{\partial r_i}{\partial q_j} = f_j = 0 \quad j = 1, 2, \dots, N$$

As equações acima representam um sistema de N equações, uma vez que resolvidas, obtemos a relação entre as coordenadas generalizadas e as forças aplicadas.

◆ Obtenção da Equação de Movimento – PTV

Exemplo:

Determine a posição de equilíbrio utilizando o princípio de trabalho virtual do sistema abaixo.



◆ Obtenção da Equação de Movimento – PTV

- Forças devido a gravidade:

$$F_1 = F_2 = -m g j$$

- Forças devido a deformação de mola:

$$F_3 = 2k L(1 - \cos \theta) i$$

Onde $2 L (1 - \cos \theta)$ é a deformação da mola.

◆ Obtenção da Equação de Movimento – PTV

O VETOR POSIÇÃO

$$r_1 = \frac{L}{2}(\cos \theta i - \text{sen } \theta j)$$

$$r_2 = \frac{L}{2}(3\cos \theta i - \text{sen } \theta j)$$

$$r_3 = 2L\cos \theta i$$

$$r = r_i(q_1, q_2, \dots, q_n)$$

Como pode ser observado, o sistema possui apenas um grau de liberdade pois ele pode ser descrito apenas por uma variável θ que pode ser considerado uma coordenada generalizada.

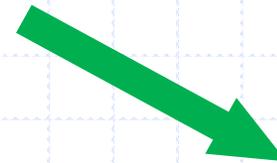
◆ Obtenção da Equação de Movimento – PTV

- Os deslocamentos virtuais serão:

$$\delta r_1 = -\frac{L}{2} (\text{sen}\theta i + \cos\theta j) \delta\theta$$

$$\delta r_2 = -\frac{L}{2} (3\text{sen}\theta i + \cos\theta j) \delta\theta$$

$$\delta r_3 = -2L\text{sen}\theta i \delta\theta$$



$$\frac{\partial r_i}{\partial q_j}$$

◆ Obtenção da Equação de Movimento – PTV

- Para $N=3$ partículas:

$$\begin{aligned}\delta\bar{W} &= \sum_{i=1}^3 F_i \delta r_i = -m g j \left[-\frac{L}{2} (\text{sen } \theta i + \cos \theta j) \right] \delta \theta \\ &\quad - m g j \left[-\frac{L}{2} (3 \text{sen } \theta i + \cos \theta j) \right] \delta \theta \\ &\quad + 2k L (1 - \cos \theta) (-2L \text{sen } \theta j) \delta \theta\end{aligned}$$

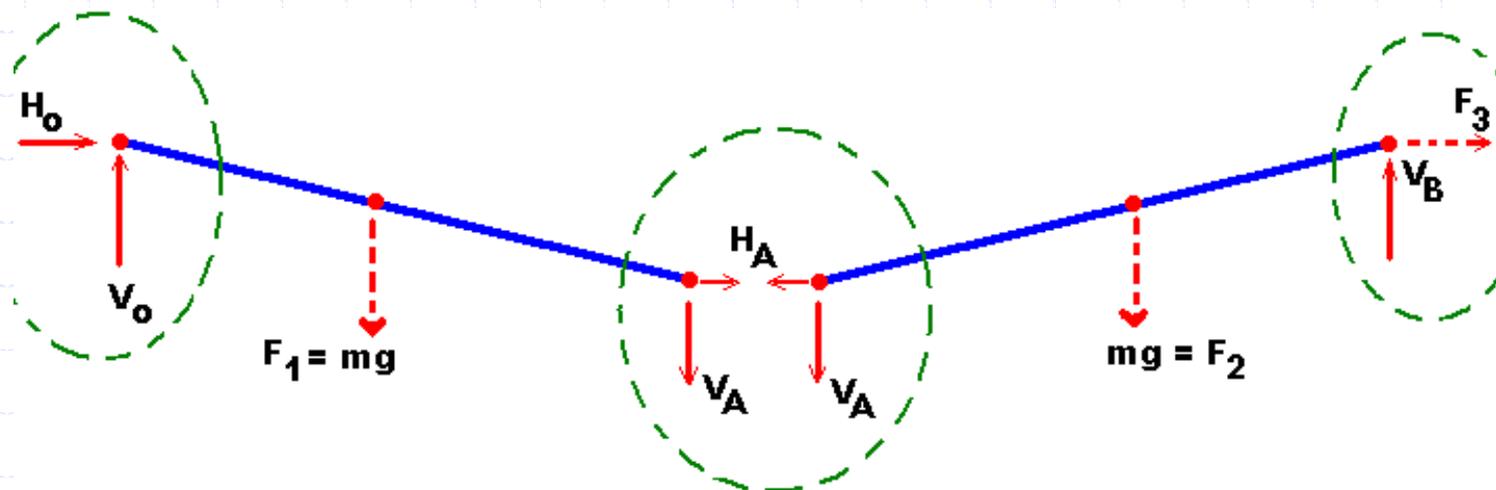
$$\delta\bar{W} = \left[m g L \cos \theta - 4k L^2 (1 - \cos \theta) \text{sen } \theta \right] \delta \theta$$

◆ Obtenção da Equação de Movimento – PTV

- Devido a que os deslocamentos virtuais, $\delta\theta$, são arbitrários, a equação anterior será satisfeita se:

$$m g L \cos \theta - 4 k L^2 (1 - \cos \theta) \sin \theta = 0$$

- Vejamos quais são as forças de vínculo que não aparecem no equacionamento



◆ Obtenção da Equação de Movimento – PTV

PRINCÍPIO DE D'ALEMBERT

- O princípio dos trabalhos virtuais parte do equilíbrio estático de um sistema.
- Podemos, através do princípio de **D'Alembert**, estender o princípio dos trabalhos virtuais para o equilíbrio dinâmico.
- Este princípio pode ser utilizado para determinar a equação de movimento, entretanto, aqui será apresentado para realizar a transição da metodologia Newtoniana (vetorial) para outra forma mais ampla (escalar - energética) conhecida como Equações de Lagrange.
- Partindo da **segunda Lei de Newton** para uma partícula de massa m_i :

$$F_i + f_i' - m_i \ddot{r} = 0$$

$$i = 1, 2, \dots, N$$

◆ Obtenção da Equação de Movimento – PTV

Utilizando o princípio dos Trabalhos Virtuais

$$\left(F_i + f_i' - m_i \ddot{r}_i \right) \delta r_i = 0$$

Para o sistema de partículas, sabendo que

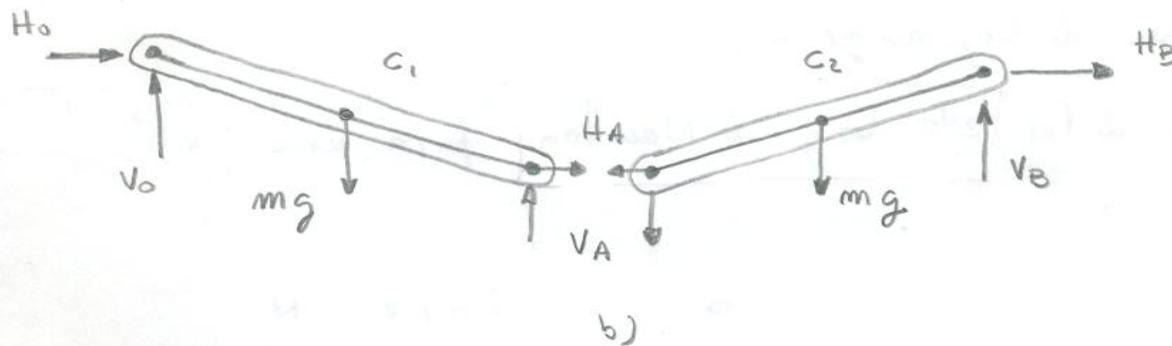
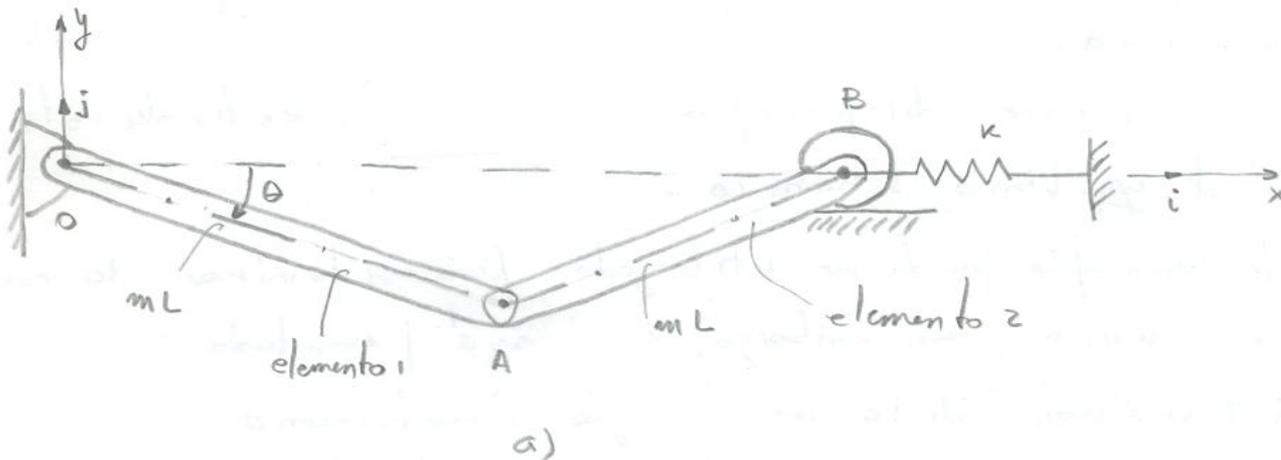
$$\sum f_i' \delta r_i = 0$$

$$\sum_{i=1}^N \left(F_i - m_i \ddot{r}_i \right) \delta r_i = 0$$

Trabalhos Virtuais utilizando o princípio de **D'Alembert**

◆ Obtenção da Equação de Movimento – PTV

Antes de aplicar o princípio de D'Alembert para T.V., resolvamos o exemplo anterior utilizado a segunda Lei de Newton.



◆ Obtenção da Equação de Movimento – PTV

- Emento 1 e 2 rígidos de massa m e longitude L .
- Mola com rigidez k .
- Quando os elementos estão horizontais a mola não está deformada.
- Coordenada generalizada = $\theta(t)$

Componente do vetor deslocamento em relação ao eixo de coordenada (x, y)

$$r_{c_1} = \frac{L}{2}(\cos \theta i - \text{sen } \theta j)$$

$$r_{c_2} = \frac{L}{2}(3\cos \theta i - \text{sen } \theta j)$$

◆ Obtenção da Equação de Movimento – PTV

As velocidades:

$$V_{c_1} = \dot{r}_{c_1} = -\frac{L}{2} (\dot{\theta} \operatorname{sen} \theta i + \dot{\theta} \cos \theta j)$$

$$V_{c_2} = \dot{r}_{c_2} = -\frac{L}{2} (3\dot{\theta} \operatorname{sen} \theta i + \dot{\theta} \cos \theta j)$$

Aceleração:

$$a_{c_1} = \ddot{r}_{c_1} = -\frac{L}{2} \left[(\ddot{\theta} \operatorname{sen} \theta + \dot{\theta}^2 \cos \theta) i + (\ddot{\theta} \cos \theta - \dot{\theta}^2 \operatorname{sen} \theta) j \right]$$

$$a_{c_2} = \ddot{r}_{c_2} = -\frac{L}{2} \left[3(\ddot{\theta} \operatorname{sen} \theta + \dot{\theta}^2 \cos \theta) i + (\ddot{\theta} \cos \theta - \dot{\theta}^2 \operatorname{sen} \theta) j \right]$$

◆ Obtenção da Equação de Movimento – PTV

Considerando o diagrama de corpo e a aceleração, a eq.de equilíbrio será:

$$F_{1x} = m_1 \ddot{r}_{c1x} \Rightarrow H_o + H_A = m \left[-\frac{L}{2} (\ddot{\theta} \cos \theta + \dot{\theta}^2 \sin \theta) \right]$$

$$F_{1y} = m_1 \ddot{r}_{c1y} \Rightarrow V_o + V_A - m g = m \left[-\frac{L}{2} (\ddot{\theta} \sin \theta - \dot{\theta}^2 \cos \theta) \right]$$

$$M_{c1} = I_{c1} \dot{\omega}_1 \Rightarrow (V_A - V_o) \frac{L}{2} \cos \theta + (H_A - H_o) \frac{L}{2} \sin \theta = -\frac{m L^2}{12} \ddot{\theta}$$

$$F_{2x} = m_2 \ddot{r}_{c2x} \Rightarrow -H_A + H_B = m \left[-\frac{3L}{2} (\ddot{\theta} \cos \theta - \dot{\theta}^2 \sin \theta) \right]$$

$$F_{2y} = m_2 \ddot{r}_{c2y} \Rightarrow -V_A + V_B - m g = m \left[-\frac{L}{2} (\ddot{\theta} \sin \theta - \dot{\theta}^2 \cos \theta) \right]$$

$$M_{c2} = I_{c2} \dot{\omega}_2 \Rightarrow (V_A + V_B) \frac{L}{2} \cos \theta - (H_A + H_B) \frac{L}{2} \sin \theta = \frac{m L^2}{12} \ddot{\theta}$$

◆ Obtenção da Equação de Movimento – PTV

Tomando

$$m_1 = m_2 = m$$

$$I_{c1} = I_{c2} = \frac{mL^2}{12}$$

$$\omega_1 = -\omega_2 = -\dot{\theta}$$

Sabendo que $H_B = 2 k L (1 - \cos\theta) \rightarrow$ teremos cinco incógnitas, além de $\theta(t)$, a saber: H_O , H_A , V_O , V_A e V_B que podem ser encontrados por meio da manipulação algébrica das equações.

Encontrando H_O , H_A , V_O , V_A e V_B  Obtêm-se as equações de movimento

◆ Obtenção da Equação de Movimento – PTV

Assim, a equação do movimento será:

$$mL^2 \ddot{\theta} \left(\frac{2}{3} + 2 \sin \theta \right) + 2mL^2 \dot{\theta}^2 \sin \theta \cos \theta - mgL \cos \theta + 4kL^2 (1 - \cos \theta) \sin \theta = 0$$

Utilização do Princípio de D'Alembert

Vamos mostrar o rol das forças de vínculo, ao comparar as duas formas de cálculo a saber: princípio de D'Alembert e segunda Lei de Newton.

O princípio de D'Alembert foi definido para um sistema de partículas. No presente problema temos corpos rígidos.

◆ Obtenção da Equação de Movimento – PTV

Sendo assim, temos que adaptar estas equações da seguinte forma:

$$\sum_{i=1}^2 \int_{\text{elemento } i} (d F_i - \ddot{r}_i dm_i) \delta r_i + F_3 \delta r_3 = 0$$

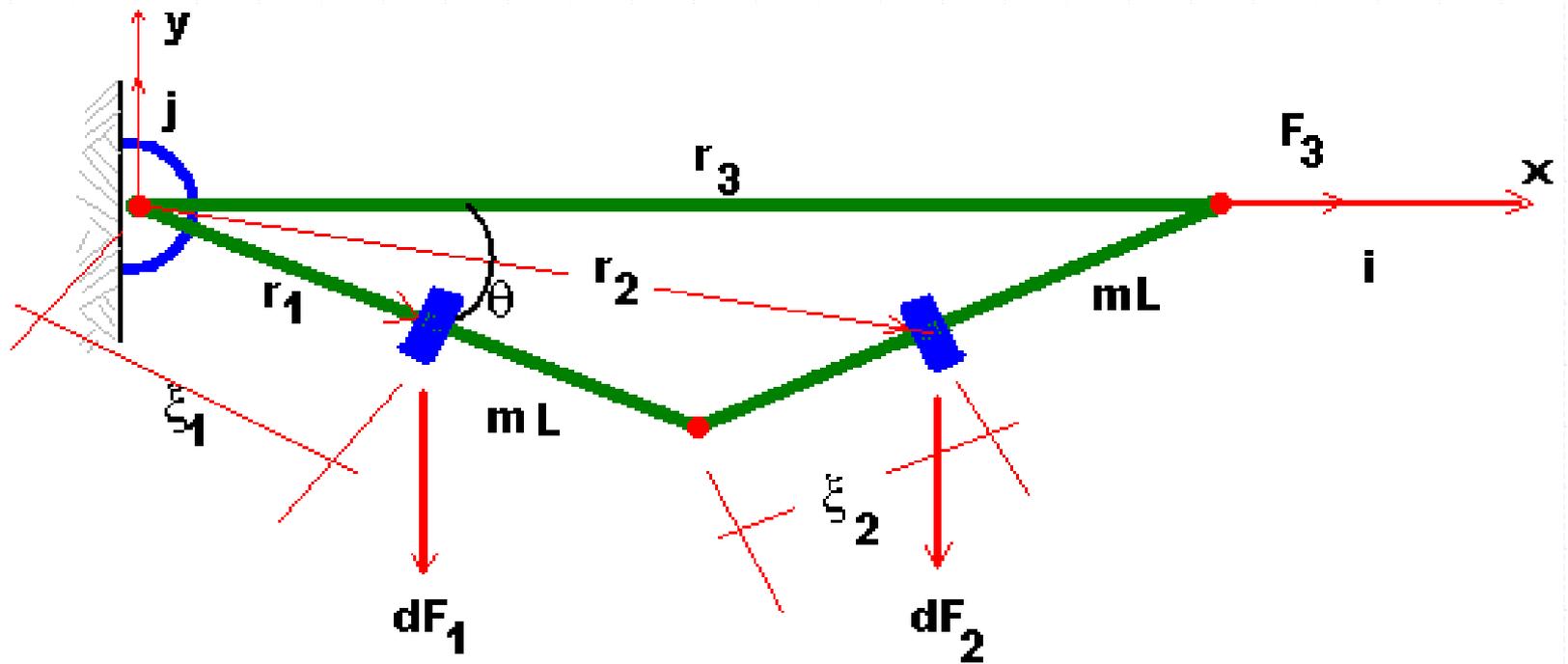
$$d F_i = -g dm \hat{j} \quad i = 1, 2, \dots, N$$

$$F_3 = 2k L(1 - \cos \theta) \hat{i}$$

$$dm_i = \frac{m}{L} d\xi_i$$

◆ Obtenção da Equação de Movimento – PTV

Mecanismo estudado:



◆ Obtenção da Equação de Movimento – PTV

O vetor posição está composto por:

$$r_1 = \xi_1 (\cos\theta i - \sin\theta j)$$

$$r_2 = (L + \xi_2) \cos\theta i - (L - \xi_2) \sin\theta j$$

$$r_3 = 2L \cos\theta i$$

E o deslocamento virtual será:

$$\delta r_1 = -\xi_1 (\sin\theta i + \cos\theta j) \delta\theta$$

$$\delta r_2 = -[(L + \xi_2) \sin\theta i + (L - \xi_2) \cos\theta j] \delta\theta$$

$$\delta r_3 = -2L \sin\theta \delta\theta i$$

◆ Obtenção da Equação de Movimento – PTV

O vetor aceleração será:

$$\ddot{r}_1 = -\xi_1 \left[\left(\ddot{\theta} \sin \theta + \dot{\theta}^2 \cos \theta \right) i + \left(\ddot{\theta} \cos \theta - \dot{\theta}^2 \sin \theta \right) j \right]$$

$$\ddot{r}_2 = - \left[\left(L + \xi_2 \right) \left(\ddot{\theta} \sin \theta + \dot{\theta}^2 \cos \theta \right) i + \left(L - \xi_2 \right) \left(\ddot{\theta} \cos \theta - \dot{\theta}^2 \sin \theta \right) j \right]$$

Na coordenada r_3 não existe massa associada. Substituindo esta equação assim como as equações das forças na equação do trabalho virtual

◆ Obtenção da Equação de Movimento – PTV

$$\begin{aligned}
 & \int_0^L \left\{ -\frac{m}{L} g j + \frac{m}{L} \xi_1 \left[(\ddot{\theta} \operatorname{sen} \theta + \dot{\theta}^2 \cos \theta) i + (\ddot{\theta} \cos \theta - \dot{\theta}^2 \operatorname{sen} \theta) j \right] \right\} \\
 & \left[-\xi_1 (\operatorname{sen} \theta i + \cos \theta j) \delta \theta \right] d \xi_1 + \int_0^L \left\{ -\frac{m}{L} g j + \right. \\
 & \left. + \frac{m}{L} \left[(L + \xi_2) (\ddot{\theta} \operatorname{sen} \theta + \dot{\theta}^2 \cos \theta) i + (L - \xi_2) (\ddot{\theta} \cos \theta - \dot{\theta}^2 \operatorname{sen} \theta) j \right] \right\} \\
 & \left\{ - \left[(L + \xi_2) \operatorname{sen} \theta i + (L - \xi_2) \cos \theta j \right] \delta \theta \right\} d \xi_2 - \\
 & -4k L^2 (1 - \cos \theta) \operatorname{sen} \theta \delta \theta
 \end{aligned}$$

◆ Obtenção da Equação de Movimento – PTV

Agrupando e separando em $\delta\theta$, a equação (26) quando:

$$\begin{aligned} &= \left[\left\{ \frac{m}{L} \int_0^L -\xi_1^2 (\ddot{\theta} \operatorname{sen} \theta + \dot{\theta}^2 \cos \theta) \operatorname{sen} \theta + \left[g - \xi_1 (\ddot{\theta} \cos \theta - \dot{\theta}^2 \operatorname{sen} \theta) \right] \right. \right. \\ &\quad \left. \left. \xi_1 \cos \theta \right\} d \xi_1 + \frac{m}{L} \int_0^L \left\{ -(L + \xi_2)^2 (\ddot{\theta} \operatorname{sen} \theta + \dot{\theta}^2 \cos \theta) \operatorname{sen} \theta + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \left[g - (L - \xi_2) (\ddot{\theta} \cos \theta - \dot{\theta}^2 \operatorname{sen} \theta) \right] (L - \xi_2) \cos \theta \right\} d \xi_2 - \right. \\ &\quad \left. - 4k L^2 (1 - \cos \theta) \operatorname{sen} \theta \right] \delta\theta = 0 \end{aligned}$$

◆ Obtenção da Equação de Movimento – PTV

Resolvendo as integrais em função de ξ_1 e ξ_2 , chega-se à seguinte equação:

$$m g L \cos \theta - \frac{2}{3} m L^2 \left[\ddot{\theta} (1 + 3 \sin^2 \theta) + 3 \dot{\theta}^2 \sin \theta \cos \theta \right] - 4 k L^2 (1 - \cos \theta) \sin \theta = 0$$

- Idêntica a equação aquela obtida utilizamos a segunda Lei de Newton.
- Quando aplicamos a segunda Lei de Newton as forças de vínculo aparecem explicitamente no sistema de equações e a solução de movimento surge ao resolver ou eliminar estas condições de vínculo, o que pode ser extremamente trabalhoso.
- Aqui, as forças de vínculo não interferem na derivação e a equação surge diretamente.

Princípio de Hamilton

Para derivar as equações de Lagrange, primeiramente vamos definir o princípio de Hamilton.

Após a definição deste princípio, as equações de Lagrange surgirão naturalmente.

◆ Obtenção da Equação de Movimento – Princípio de Hamilton

O trabalho virtual realizado pelas forças aplicadas é:

$$\delta \bar{W} = \sum_{i=1}^N F_i \delta r_i = \sum_{i=1}^N m_i \ddot{r}_i \delta r_i$$

Ao contrário do caso estático, o trabalho virtual não é zero no caso dinâmico.

Consideremos

$$\frac{d}{dt} (\dot{r}_i \delta r_i) = \ddot{r}_i \delta r_i + \dot{r}_i \delta \dot{r}_i = \ddot{r}_i \delta r_i + \delta \left(\frac{1}{2} \dot{r}_i \dot{r}_i \right)$$

$$\ddot{r}_i \delta r_i = \frac{d}{dt} (\dot{r}_i \delta r_i) - \delta \left(\frac{1}{2} \dot{r}_i \dot{r}_i \right)$$

◆ Equação de Movimento – Princípio de Hamilton

Multiplicando a equação anterior por “ m_i ” e considerando o sistema de partículas

$$\sum_{i=1}^N m_i \ddot{r}_i \delta r_i = \sum_{i=1}^N m_i \frac{d}{dt} (\dot{r}_i \delta r_i) - \delta T$$

T = energia cinética do sistema, temos:

$$\delta T + \delta \bar{W} = \sum_{i=1}^N m_i \frac{d}{dt} (\dot{r}_i \delta r_i)$$

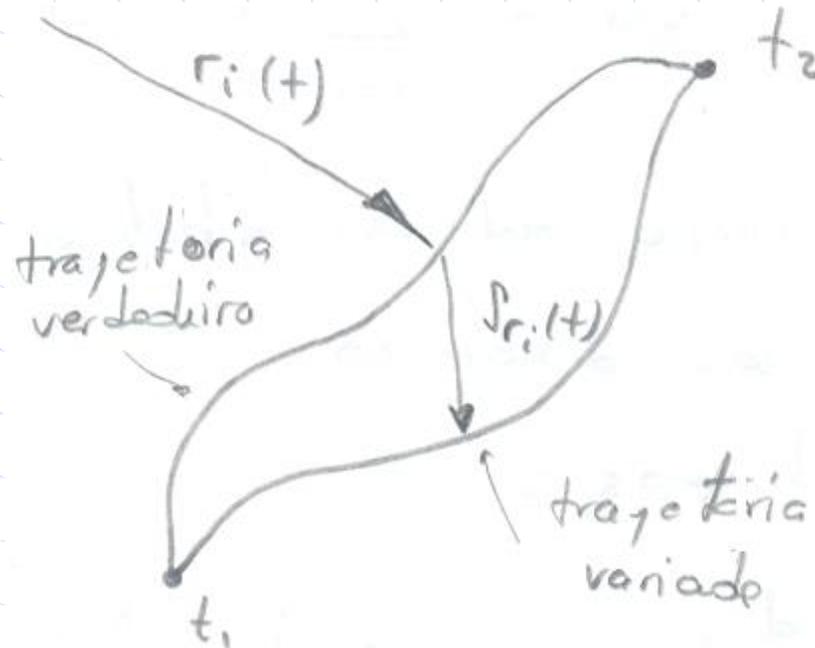
A solução $r_i = r_i(t)$ com $(i = 1, 2, \dots, N)$ no espaço de configuração é conhecida como caminho verdadeiro ou trajetória verdadeira.

Para visualizar δr_i , imaginamos que o sistema se movimenta ao longo de uma trajetória variada $r_i(t) + \delta r_i(t)$

◆ Equação de Movimento – Princípio de Hamilton

Escolhendo uma trajetória variada que coincida com a verdadeira em t_1 e t_2 ($t = t_{1,2}$), que implica $\delta r_i(t_1) = \delta r_i(t_2) = 0$

Multiplicando por dt e integrando de t_1 a t_2 , temos:



◆ Equação de Movimento – Princípio de Hamilton

$$\begin{aligned} \int_{t_1}^{t_2} (\delta T + \delta \bar{W}) dt &= \int_{t_1}^{t_2} \sum_{i=1}^N m_i \frac{d}{dt} (\dot{r}_i \delta r_i) dt = \\ &= \sum_{i=1}^N m_i \dot{r}_i \delta r_i \Big|_{t_1}^{t_2} \quad i = 1, 2, \dots, N \end{aligned}$$

Devido a natureza do caminho escolhido =>

$$\int_{t_1}^{t_2} (\delta T + \delta \bar{W}) dt = 0$$

$$\delta r_i(t_1) = \delta r_i(t_2) = 0$$

◆ Equação de Movimento – Princípio de Hamilton

O princípio de Hamilton pode escrever uma forma mais conveniente. Para isto, dividimos o trabalho virtual em duas partes

$$\overline{\delta W} = \overline{\delta W}_c + \overline{\delta W}_{nc}$$

W_c = trabalho das forças conservativas

W_{nc} = trabalho produzido por forças não conservativas

Por outro lado se sabe que : $\overline{\delta W}_c = -\delta V$

onde V é a energia potencial.

◆ Equação de Movimento – Princípio de Hamilton

Definindo o Lagrangeano $L \triangleq T - V$ e considerando as equações acima, o princípio de Hamilton será:

$$\int_{t_1}^{t_2} (\delta L + \overline{\delta W}_{nc}) dt = 0$$

$$\delta r_i(t_1) = \delta r_i(t_2) = 0$$

$$i = 1, 2, \dots, N$$

Para sistema conservatório $\delta W_{nc} = 0$, resultando em

$$\delta I = \delta \int_{t_1}^{t_2} L dt = 0$$

$$\delta r_i(t_1) = \delta r_i(t_2) = 0$$

$$i = 1, 2, \dots, N$$

◆ Equação de Movimento – Princípio de Hamilton

Resumindo: a trajetória real no espaço de configurações é representada pelos valores da integral definida

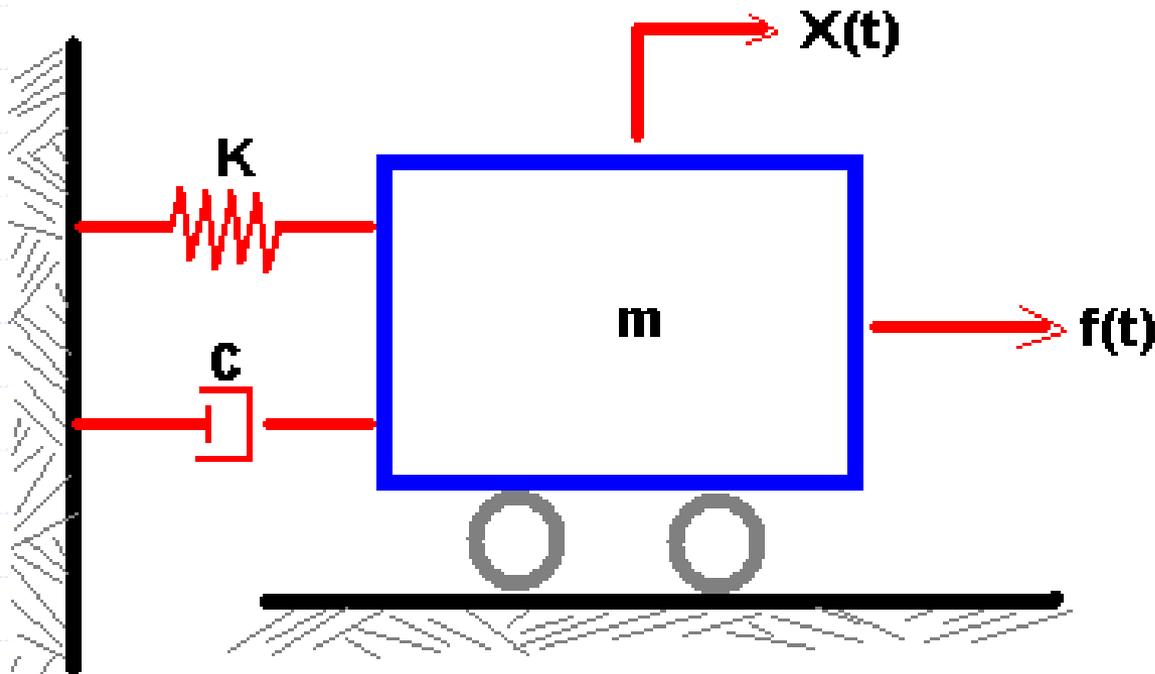
$$I = \int_{t_1}^{t_2} L dt$$

estacionária com relação a todas as variações arbitrárias das trajetórias entre t_1 e t_2 , considerando variações nulas para $t = t_1$ e $t = t_2$

◆ Equação de Movimento – Princípio de Hamilton

Exemplo:

Derivar a equação do movimento para o seguinte sistema de 1 GL



◆ Equação de Movimento – Princípio de Hamilton

Partindo da equação do princípio de Hamilton geral e calculando as T , V , W_{nc} tem-se

$$L = T - V = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 - \frac{1}{2} k x^2$$

$$\delta L = \delta \left(\frac{1}{2} m \dot{x}^2 - \frac{1}{2} k x^2 \right) = m \dot{x} \delta \dot{x} - k x \delta x$$

O trabalho virtual das forças não conservativas

$$\overline{\delta W}_{nc} = (F - c\dot{x}) \delta x$$

◆ Equação de Movimento – Princípio de Hamilton

$$\int_{t_1}^{t_2} \left[m \dot{x} \delta \dot{x} - k x \delta x + (F - c \dot{x}) \delta x \right] dt = 0$$

$$\delta x(t_1) = \delta x(t_2) = 0$$

Para resolver a equação anterior é preciso eliminar $\delta \dot{x}$

$$\int_{t_1}^{t_2} m \dot{x} \delta \dot{x} dt = \int_{t_1}^{t_2} m \dot{x} \frac{d}{dt} \delta x dt \quad \text{Integrando por partes}$$

$$= m \dot{x} \delta x \Big|_{t_1}^{t_2} - \int_{t_1}^{t_2} \frac{d}{dt} (m \dot{x}) \delta x dt$$

$$= - \int_{t_1}^{t_2} m \ddot{x} \delta x dt$$

◆ Equação de Movimento – Princípio de Hamilton

$$\int_{t_1}^{t_2} (-m \ddot{x} - kx + F - c \dot{x}) \delta x dt = 0$$

Como os deslocamentos virtuais são arbitrários, por tanto $\neq 0$, a equação de movimento é dada por:

$$m\ddot{x}(t) + c\dot{x}(t) + kx(t) = F(t)$$

◆ Equação de Movimento – Equações de Lagrange

Utilizaremos para encontrar estas equações o princípio de Hamilton.
Considerando um sistema de N partículas e escrevendo a energia cinética por

$$T = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i \dot{r}_i \dot{r}_i$$

Onde

m_i = massa de cada partícula

\dot{r}_i = velocidade de cada partícula

◆ Equação de Movimento – Equações de Lagrange

Assumiremos que o vetor posição r_i é função das coordenadas generalizadas q_1, q_2, \dots, q_n e de t

$$r_i = r_i(q_1, q_2, \dots, q_n, t) \quad i = 1, 2, \dots, N$$

Diferenciando a equação:

$$\delta r_i = \sum_j \frac{\partial r_i}{\partial q_j} \delta q_j \quad \Rightarrow \quad \dot{r}_i = \sum_{k=1}^n \frac{\partial r_i}{\partial q_k} \dot{q}_k + \frac{\partial r_i}{\partial t} \quad i = 1, 2, \dots, N$$

$$T = T(q_1, q_2, \dots, q_n, \dot{q}_1, \dot{q}_2, \dots, \dot{q}_n, t)$$

◆ Equação de Movimento – Equações de Lagrange

Assumindo que o sistema está sujeito a forças conservativas (derivada da energia potencial) e a forças não conservativas

$$\overline{\delta W} = \overline{\delta W}_c + \overline{\delta W}_{nc} = -\delta V + \overline{\delta W}_{nc}$$

Onde

$V = V(q_1, q_2, \dots, q_n)$ energia potência

$\overline{\delta W}_{nc}$ = trabalho virtual de forças não conservativas

Se F_i ($i = 1, 2, \dots, N$) são as forças não conservativas

$$\overline{\delta W}_{nc} = \sum_{i=1}^N F_i \delta r_i$$

◆ Equação de Movimento – Equações de Lagrange

Onde

$$\delta r_i = \sum_{k=1}^n \frac{\partial r_i}{\partial q_k} \delta q_k$$

$$\overline{\delta W}_{nc} = \sum_{k=1}^n Q_k \delta q_k$$

Onde Q_k são as forças generalizadas não conservativas

$$Q_k = \sum_{i=1}^N F_i \frac{\partial r_i}{\partial q_k}$$

$k = 1, 2, \dots, n$

◆ Equação de Movimento – Equações de Lagrange

Substituindo no princípio de Hamilton

$$\int_{t_1}^{t_2} \left(\delta L + \sum_{k=1}^n Q_k \delta q_k \right) dt = 0$$

$$\delta q_k(t_1) = \delta q_k(t_2) = 0$$

$$k = 1, 2, \dots, n$$

Onde

$$L = L(q_1, q_2, \dots, q_n, \dot{q}_1, \dot{q}_2, \dots, \dot{q}_n, t)$$

é o Lagrangeano.

◆ Equação de Movimento – Equações de Lagrange

A equação acima é utilizada para encontrar as equações de Lagrange em função das coordenadas generalizadas q_1, q_2, \dots, q_n .

Como o Lagrangiano é função de várias variáveis, podemos escrever:

$$\delta L = \sum_{k=1}^n \left(\frac{\partial L}{\partial q_k} \delta q_k + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \delta \dot{q}_k \right)$$

Substituindo na equação

$$\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \right) \delta q_k \Big|_{t_1}^{t_2} = 0 \quad k = 1, 2, \dots, n$$

◆ Equação de Movimento – Equações de Lagrange

$$\int_{t_1}^{t_2} \left(\delta L + \sum_{k=1}^n Q_k \delta q_k \right) dt = - \int_{t_1}^{t_2} \sum_{k=1}^n \left[\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_k} - Q_k \right] \delta q_k dt = 0$$

Como os deslocamentos virtuais são arbitrários, os coeficientes que os multiplicam devem ser nulos

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_k} = Q_k$$

Denominadas “equações de Lagrange”, permitem derivar as equações que governam o movimento do sistema.

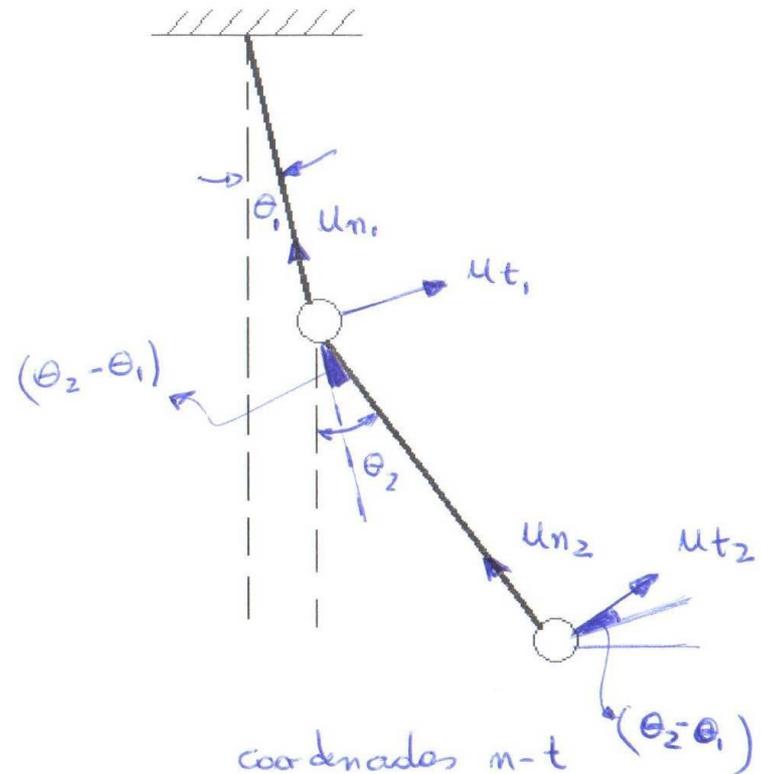
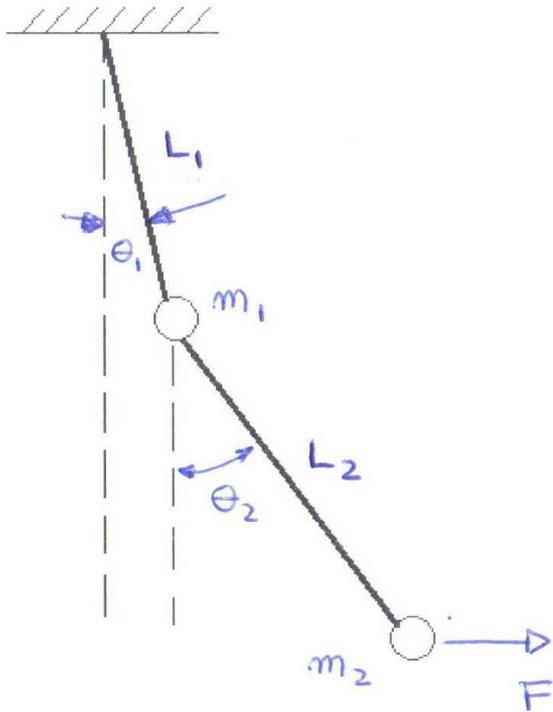
$$k = 1, 2, \dots, n$$

◆ Equações de Lagrange - Exemplo

Exemplo:

Derivar a equação de movimento de Lagrange para o pêndulo duplo.

Cálculo de L:



◆ Equações de Lagrange - Exemplo

As velocidades são

$$v_1 = L_1 \dot{\theta}_1 \mu_{t_1}$$

$$v_2 = L_1 \dot{\theta}_1 \mu_{t_1} + L_2 \dot{\theta}_2 \mu_{t_2}$$

$$= [L_1 \dot{\theta}_1 \cos(\theta_2 - \theta_1) + L_2 \dot{\theta}_2] \mu_{t_2} - L_1 \dot{\theta}_1 \sin(\theta_2 - \theta_1) \mu_{n_2}$$

$$\mu_{n_1} = \sin(\theta_2 - \theta_1) \mu_{t_2} + \cos(\theta_2 - \theta_1) \mu_{n_2}$$

$$\mu_{t_1} = \cos(\theta_2 - \theta_1) \mu_{t_2} - \sin(\theta_2 - \theta_1) \mu_{n_2}$$

$$\mu_{n_2} = -\sin(\theta_2 - \theta_1) \mu_{t_1} + \cos(\theta_2 - \theta_1) \mu_{n_1}$$

$$\mu_{t_2} = \cos(\theta_2 - \theta_1) \mu_{t_1} + \sin(\theta_2 - \theta_1) \mu_{n_1}$$

$$\begin{aligned} \mu_{t_1}^2 &= \cos(\theta_2 - \theta_1)^2 \mu_{t_2} \mu_{t_2} - \cos(\theta_2 - \theta_1) \sin(\theta_2 - \theta_1) \mu_{t_2} \mu_{n_2} - \\ &\quad - \sin(\theta_2 - \theta_1) \cos(\theta_2 - \theta_1) \mu_{t_2} \mu_{n_2} + \sin(\theta_2 - \theta_1)^2 \mu_{n_2} \mu_{n_2} \\ &= \cos^2 + \sin^2 = 1 \end{aligned}$$

◆ Equações de Lagrange - Exemplo

A energia cinética será:

$$T = \frac{1}{2} m_1 v_1 v_1 + \frac{1}{2} m_2 v_2 v_2$$

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2} m_1 (L_1 \dot{\theta}_1)^2 + \frac{1}{2} m_2 \left\{ \left[L_1 \dot{\theta}_1 \cos(\theta_2 - \theta_1) + L_2 \dot{\theta}_2 \right]^2 + \right. \\ &\quad \left. + \left[L_1 \dot{\theta}_1 \sin(\theta_2 - \theta_1) \right]^2 \right\} = \\ &= \frac{1}{2} (m_1 + m_2) L_1^2 \dot{\theta}_1^2 + m_2 L_1 L_2 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \cos(\theta_2 - \theta_1) + \frac{1}{2} m_2 L_2^2 \dot{\theta}_2^2 \end{aligned}$$

◆ Equações de Lagrange - Exemplo

A energia potencial será:

$$\begin{aligned} V &= m_1 g L_1 (1 - \cos \theta_1) + m_2 g [L_1 (1 - \cos \theta_1) + L_2 (1 - \cos \theta_2)] \\ &= (m_1 + m_2) g L_1 (1 - \cos \theta_1) + m_2 g L_2 (1 - \cos \theta_2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} L = T - V &= \frac{1}{2} (m_1 + m_2) L_1^2 \dot{\theta}_1^2 + m_2 L_1 L_2 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \cos(\theta_2 - \theta_1) + \\ &+ \frac{1}{2} m_2 L_2^2 \dot{\theta}_2^2 - (m_1 + m_2) g L_1 (1 - \cos \theta_1) - \\ &- m_2 g L_2 (1 - \cos \theta_2) \end{aligned}$$

◆ Equações de Lagrange - Exemplo

$$\begin{aligned}\delta L = \delta T - \delta V = & \left[(m_1 + m_2) L_1^2 \dot{\theta}_1 + m_2 L_1 L_2 \dot{\theta}_2 \cos(\theta_2 - \theta_1) \right] \delta \dot{\theta}_1 \\ & + m_2 L_2 \left[L_1 \dot{\theta}_1 \cos(\theta_2 - \theta_1) + L_2 \dot{\theta}_2 \right] \delta \dot{\theta}_2 + \\ & + \left[m_2 L_1 L_2 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \sin(\theta_2 - \theta_1) + (m_1 + m_2) g L_1 \sin \theta_1 \right] \delta \theta_1 \\ & - \left[m_2 L_1 L_2 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \sin(\theta_2 - \theta_1) + m_2 g L_2 \sin \theta_2 \right] \delta \theta_2\end{aligned}$$

◆ Equações de Lagrange - Exemplo

Para calcular o trabalho virtual realizado por F , devemos determinar a posição de m_2 sobre a direção de F . ($L_1 \text{ sen } \theta_1 + L_2 \text{ sen } \theta_2$)

$$\begin{aligned}\overline{\delta W}_{nc} &= F \delta(L_1 \text{ sen } \theta_1 + L_2 \text{ sen } \theta_2) = \\ &= F(L_1 \text{ cos } \theta_1 \delta \theta_1 + L_2 \text{ cos } \theta_2 \delta \theta_2)\end{aligned}$$

◆ Equações de Lagrange - Exemplo

O trabalho virtual devido as forças conservativas F , considerando $\theta_1 = q_1$ e $\theta_2 = q_2$, será:

$$\overline{\delta W}_{nc} = \Theta_1 \delta \theta_1 + \Theta_2 \delta \theta_2$$

Onde

$$\Theta_1 = F L_1 \cos \theta_1 \quad \text{e} \quad \Theta_2 = F L_2 \cos \theta_2$$

São as forças não conservativas generalizadas Q_1 e Q_2 , respectivamente

◆ Equações de Lagrange - Exemplo

Escrevendo as seguintes relações:

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_1} = (m_1 + m_2) L_1^2 \dot{\theta}_1 + m_2 L_1 L_2 \dot{\theta}_2 \cos(\theta_2 - \theta_1)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_2} = m_2 L_1 L_2 \dot{\theta}_1 \cos(\theta_2 - \theta_1) + m_2 L_2^2 \dot{\theta}_2$$

$$\frac{\partial L}{\partial \theta_1} = m_2 L_1 L_2 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \sin(\theta_2 - \theta_1) - (m_1 + m_2) g L_1 \sin \theta_1$$

$$\frac{\partial L}{\partial \theta_2} = -m_2 L_1 L_2 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \sin(\theta_2 - \theta_1) - m_2 g L_2 \sin \theta_2$$

◆ Equações de Lagrange - Exemplo

As equações de Lagrange são:

$$\frac{d}{dt} \left[(m_1 + m_2) L_1^2 \dot{\theta}_1 + m_2 L_1 L_2 \dot{\theta}_2 \cos(\theta_2 - \theta_1) \right] - m_2 L_1 L_2 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \sin(\theta_2 - \theta_1) + (m_1 + m_2) g L_1 \sin \theta_1 = F L_1 \cos \theta_1$$

$$\frac{d}{dt} \left[m_2 L_1 L_2 \dot{\theta}_1 \cos(\theta_2 - \theta_1) + m_2 L_2^2 \dot{\theta}_2 \right] + m_2 L_1 L_2 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \sin(\theta_2 - \theta_1) + m_2 g L_2 \sin \theta_2 = F L_2 \cos \theta_2$$

Aplicando a derivada temporal se chega a equação de movimento (equação diferencial) do sistema de pêndulo duplo, igual à obtida pelo princípio de Hamilton

◆ Equações de Lagrange - Exemplo

Assim, a equação de movimento é dada por:

$$\begin{aligned} & (m_1 + m_2) L_1^2 \ddot{\theta}_1 + m_2 L_2 \ddot{\theta}_2 \cos(\theta_2 - \theta_1) - m_2 L_1 L_2 \dot{\theta}_2^2 \sin(\theta_2 - \theta_1) + \\ & + (m_1 + m_2) g \sin \theta_1 = F \cos \theta_1 \\ & m_2 L_2 L_1 \ddot{\theta}_1 \cos(\theta_2 - \theta_1) + m_2 L_1 L_2 \dot{\theta}_1^2 \sin(\theta_2 - \theta_1) + m_2 L_2^2 \ddot{\theta}_2 + \\ & m_2 g \sin \theta_2 = F \cos \theta_2 \end{aligned}$$

◆ Equações de Lagrange – Coordenadas Generalizadas

No caso mais geral o vetor de posição “ r ” será função de

$$r_i = r_i(q_1, q_2, \dots, q_n, t)$$

E a sua derivada será:

$$\dot{r}_i = \frac{dr_i}{dt} = \sum_{r=1}^n \frac{\partial r_i}{\partial q_r} \dot{q}_r + \frac{\partial r_i}{\partial t}$$

A energia cinética, tomando a sua forma mais geral, será: $T = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i \dot{r}_i \dot{r}_i$

$$T = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i \left[\sum_{r=1}^n \sum_{s=1}^n \frac{\partial r_i}{\partial q_r} \frac{\partial r_i}{\partial q_s} \dot{q}_r \dot{q}_s + 2 \frac{\partial r_i}{\partial t} \sum_{r=1}^n \frac{\partial r_i}{\partial q_r} \dot{q}_r + \frac{\partial r_i}{\partial t} \frac{\partial r_i}{\partial t} \right]$$

◆ Equações de Lagrange

Podemos dividir esta energia em três partes

onde

$$T = T_2 + T_1 + T_o$$

$$T_2 = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n m_{ij} \dot{q}_i \dot{q}_j$$

$$m_{ij} = \sum_{s=1}^N m_s \frac{\partial r_s}{\partial q_i} \frac{\partial r_s}{\partial q_j}$$

• Coeficiente de inércia em função das coordenadas escolhidas

$$i, j = 1, n$$

$$m_{rs} = m_{rs}(q_1, q_2, \dots, q_n, t)$$

$$r, s = 1, n$$

◆ Equações de Lagrange

$$T_1 = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n f_j \dot{q}_j$$

- Função linear da velocidade generalizada

$$f_s = \sum_{i=1}^N m_i \frac{\partial r_i}{\partial t} \frac{\partial r_i}{\partial q_s}$$

Também aqui os coeficientes f_s ($s = 1, n$) são dependentes das coordenadas generalizadas e do tempo assim como m_{rs}

$$f_s = f_s(q_1, q_2, \dots, q_n, t)$$

$s = 1, n$

◆ Equações de Lagrange

O último termo

$$T_0 = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i \frac{\partial r_i}{\partial t} \frac{\partial r_i}{\partial t}$$

Em geral, T_0 é função da coordenada generalizada e não da velocidade das coordenadas generalizadas. É uma enrijecimento (flexibilização) estrutural devido a campos longitudinais de esforços (forças centrífugas em corpos girante)

◆ Equações de Lagrange

Desta forma o Lagrangeano será:

$$L = T - V = T_2 + T_1 - U$$

Potencial dinâmico $U = V - T_0$

Esta inclusão de T_0 em U é devido a que a mesma é função das coordenadas generalizadas, de forma similar a V .

◆ Equações de Lagrange - Linearização

PONTO DE EQUILÍBRIO DO SISTEMA

As coordenadas generalizadas $q_j(t)$, $j = 1, n$ formam um vetor

$$q(t) = [q_1(t), q_2(t), \dots, q_n(t)]^T$$

A medida que “t” varia, $q(t)$ varia formando uma trajetória conhecida como trajetória dinâmica.

Para que o estado do sistema seja completamente determinado (o estado de uma partícula descrevendo uma trajetória dada), devemos conhecer além de $q_j(t)$, $j = 1, n$, a informação da sua velocidade

$$\dot{q}_j(t) \quad j = 1, n$$

◆ Equações de Lagrange - Linearização

Assim, podemos supor que $q_j(t)$ e $\dot{q}_j(t)$ são subvetores de outro maior (2n dimensões) conhecido como **vetor de estado**

$$\left[q(t) \dot{q}(t) \right]^T$$

Um ponto de equilíbrio do sistema, o do espaço de estado, é caracterizado por:

$$q_i(t) = q_{ie} = cte$$

$$\dot{q}_i(t) = 0$$

Para todo tempo e para todas as partículas

Se $q_{ie} \neq 0$ para algum $i = 1, n \rightarrow$ o ponto de equilíbrio se diz não trivial

◆ Equações de Lagrange - Linearização

Tal ponto pode ser representado por

$$e = [q_e \quad 0]^T$$

Se $q_{ie} = 0$ para todo $i = 1, n$, o ponto de equilíbrio é trivial

Para que exista este ponto de equilíbrio é necessário que todas as forças dinâmicas que atuam no sistema sejam nulas ou constantes no tempo.

Se o ponto de equilíbrio é $e = [q_e \quad 0]$ e tomando

$$Q_{k,nc} = 0, \quad k = 1, n$$

estas forças não ocorrem em função do movimento

com $q_e = [q_{1e}, q_{2e}, \dots, q_{ne}]^T$ e $0 = [0, \dots, 0]^T$

◆ Equações de Lagrange - Linearização

Como as velocidades generalizadas são nulas $T_2 = T_1 = 0$

$$L = -U$$

Como U não é função das velocidades generalizadas

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} = 0 \quad k = 1, n$$

Concluindo \rightarrow que q_{ie} deve satisfazer, no equilíbrio

$$\frac{\partial U}{\partial q_k} = 0 \quad k = 1, 2, \dots, n$$

PRINCIPIO DE MÍNIMO

POTENCIAL DINÂMICO

n equações com n incógnitas $\rightarrow q_{ie}, i = 1, n$

◆ Equações de Lagrange - Linearização

PEQUENOS DESLOCAMENTOS

Consideremos o importante caso em que as variações temporais das coordenadas $q_j, j = 1, n$ são pequenas em torno de um ponto de equilíbrio e que m_{rs} são constantes.

A mesma hipótese leva a que $f_r = cte$ e T_1 é uma forma linear da velocidade.

$T_1 \Rightarrow$ está associado as variações do sistema de referencia local e ocorre em sistema giratórios onde está presente o efeito giroscópico.

$T_0 \Rightarrow$ esta associado a rotação do sistema e o aumento de sua rigidez pela força centrífuga (rotor de helicópteros).

◆ Equações de Lagrange - Linearização

Estudemos cada parcela da equação de Lagrange e o resultado após implementar estas considerações.

$$T_2 = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n m_{ij} \dot{q}_i \dot{q}_j$$

Função quadrática das velocidades generalizadas

◆ Equações de Lagrange - Linearização

Desenvolvendo “ f_r ” em série de Taylor e desprezando os termos de ordem superior, com :

$$T_1 = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n f_j \dot{q}_j$$

$$f_r = f_r(e) + \sum_{j=1}^n \frac{\partial f_r}{\partial q_j} q_j + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 f_r}{\partial q_i \partial q_j} q_i q_j + \dots$$

ponto de EQUILÍBRIO

Termos de ordem superior

◆ Equações de Lagrange - Linearização

$$f_r = \sum_{j=1}^N m_j \frac{\partial r_j}{\partial t} \frac{\partial r_j}{\partial q_r} \cong \sum_{j=1}^n \frac{\partial f_r}{\partial q_j} q_j$$

$$f_{rj} \triangleq \frac{\partial f_r}{\partial q_j}$$

Assim:

$$f_r = \sum_{j=1}^n f_{rj} q_j, \quad r = 1, n$$

Sendo T_1 função das velocidades e coordenadas generalizadas:

$$T_1 = \frac{1}{2} \sum_{r=1}^n \sum_{j=1}^n f_{jr} q_r \dot{q}_j$$

◆ Equações de Lagrange - Linearização

Fazendo uma análise similar com U (energia potencial dinâmica)

$$U = U(e) + \sum_{j=1}^n \frac{\partial U}{\partial q_j} q_j + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2 U}{\partial q_i \partial q_j} q_i q_j + \dots$$

Ponto de referência em geral considerado nulo,
igual a uma constante,
não influencia nas eqs. Lagrange

$$k_{ij}$$

$$U = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n k_{ij} q_i q_j$$

◆ Equações de Lagrange - Linearização

As forças externas generalizadas são definidas como Q_k e as forças não conservativas, em forma ampla, são as forças de amortecimento viscoso e as forças circulatorias (função de Rayleigh).

$$\mathcal{F} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n c_{ij} \dot{q}_i \dot{q}_j + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n h_{ij} \dot{q}_i q_j$$

pode observa-se na prática que a matriz formada por h_{ij} é anti-simétrica.

$$h_{ij} = -h_{ji}$$

produzida pelas circulação do ar sobre a hélice do helicóptero, por exemplo

◆ Equações de Lagrange - Linearização

Nota: Tomemos T_1 como uma parte de Lagrangeano e façamos

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right) - \frac{\partial L}{\partial q}$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T_1}{\partial \dot{q}_k} \right) = \frac{d}{dt} \left(\sum_{j=1}^n f^*_{kj} q_j \right)$$

$$= \sum_{j=1}^n f^*_{kj} \dot{q}_j$$

$$\frac{\partial T_1}{\partial q_k} = \sum_{j=1}^n f_{jk} \dot{q}_j$$

◆ Equações de Lagrange - Linearização

Quando aplicamos as equações de Lagrange:

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T_1}{\partial \dot{q}_k} \right) - \frac{\partial T_1}{\partial q_k} &= \sum_{j=1}^n (f_{kj}^* - f_{jk}) \dot{q}_j \\ &= \sum_{j=1}^n g_{kj} \dot{q}_j\end{aligned}$$

$$g_{kj} = -g_{jk}$$

matriz giroscópica é antisimétrica

obs:

$$f_{kj}^* \neq f_{jk}$$

$$f_{kj}^* - f_{jk} = -\left(f_{jk} - f_{kj}^* \right)$$

$$k \neq j$$

◆ Equações de Lagrange - Linearização

Tomando:

$$L = T_2 + T_1 - U$$

$$U = V - T_o$$

Q_i , $i = 1, n$ forças externas generalizadas e \mathcal{F} como a função dissipação .

Aplicamos as equações de Lagrange

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} + \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \dot{q}_i} = Q_i$$

◆ Equações de Lagrange - Linearização

$$m_{ij} = \frac{\partial^2 T}{\partial \dot{q}_i \partial \dot{q}_j}$$

$$k_{ij} = \frac{\partial^2 U}{\partial q_i \partial q_j}$$

$$c_{ij} = \frac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial \dot{q}_i \partial \dot{q}_j}$$

$$g_{ij} = f_{ij} - f_{ji} = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T_1}{\partial \dot{q}_k} \right) - \frac{\partial T_1}{\partial q_k}$$

$$h_{ij} = \frac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial q_j \partial \dot{q}_i} \quad h_{ji} = \frac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial \dot{q}_i \partial q_j}$$

◆ Equações de Lagrange - Linearização

$$\sum_{j=1}^n \left[m_{ij} \ddot{q}_j + (c_{ij} + g_{ij}) \dot{q}_j + (k_{ij} + h_{ij}) q_j \right] = Q_j$$

Na sua forma completa e matricial:

$$\mathbf{M} \ddot{\mathbf{q}} + (\mathbf{C} + \mathbf{G}) \dot{\mathbf{q}} + (\mathbf{K} + \mathbf{H}) \mathbf{q} = \mathbf{Q}$$

onde: $\mathbf{C} = [C_{ij}]$ é a matriz de amortecimento viscoso (simétrica).

$\mathbf{G} = [g_{ij}]$ é a matriz giroscópica (anti-simétrica).

$\mathbf{H} = [h_{ij}]$ é a matriz de circulação (anti-simétrica).

\mathbf{Q} = vetor de excitação do sistema em coordenadas generalizadas.

$\mathbf{M} = [m_{ij}]$ matriz de inércia (simétrica).

$\mathbf{K} = [k_{ij}]$ matriz de rigidez (simétrica).