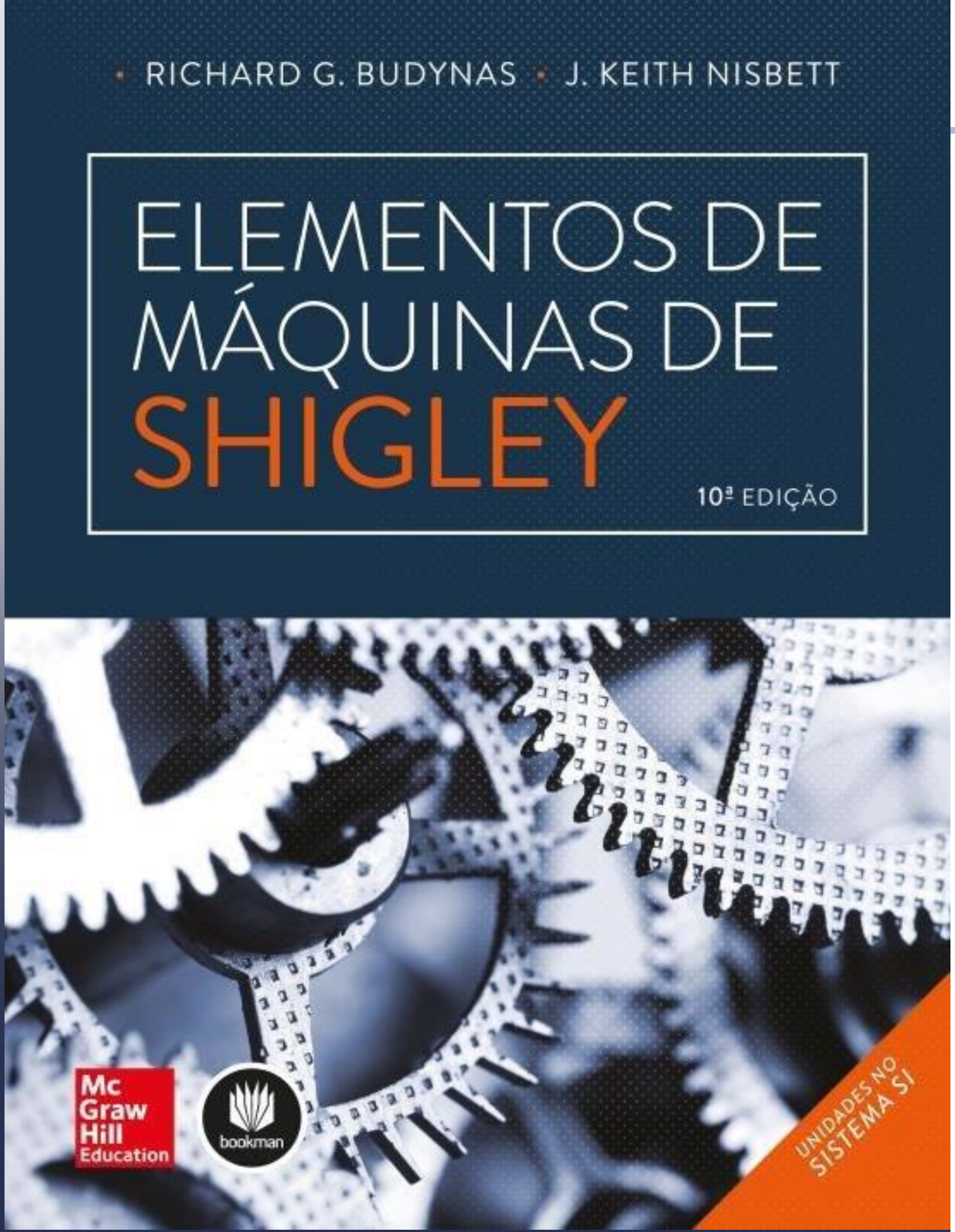
Slides das Aulas

Capítulo 13

Trens de Engrenagens

Prof. Jorge Luiz Erthal
jorgeerthal@gmail.com

Atualizado em 09/08/2018



Trens de Engrenagens

Símbolos (1)

Símbolo*	Nome	Encontrado em
C_e	Fator de correção do alinhamento de engrenamento	Equação (14–35)
$C_f(Z_R)$	Fator de condição da superfície	Equação (14–16)
$C_H(Z_W)$	Fator de razão de dureza	Equação (14–18)
C_{ma}	Fator de alinhamento de engrenamento	Equação (14–34)
C_{mc}	Fator de correção de carga	Equação (14–31)
C_{mf}	Fator de distribuição de carga de face	Equação (14–30)
$C_p(Z_E)$	Coeficiente elástico	Equação (14–13)
C_{pf}	Fator de proporção do pinhão	Equação (14–32)
C_{pm}	Modificador da proporção do pinhão	Equação (14–33)
d	Diâmetro primitivo	Exemplo 14–1
d_p	Diâmetro primitivo, pinhão	Equação (14–22)
d_G	Diâmetro primitivo, engrenagem (coroa)	Equação (14–22)
$F(b)$	Largura de face líquida do membro mais estreito	Equação (14–15)
f_P	Acabamento superficial do pinhão	Figura 14–13
H	Potência	Figura 14–17

Símbolos (2)

Símbolo*	Nome	Encontrado em
H_B	Dureza Brinell	Exemplo 14–3
H_{BG}	Dureza Brinell da engrenagem (coroa)	Seção 14–12
H_{BP}	Dureza Brinell do pinhão	Seção 14–12
hp	Potência em hp	Exemplo 14–1
h_t	Profundidade completa do dente da coroa	Seção 14–16
$I\ (Z_I)$	Fator geométrico da resistência de crateramento	Equação (14–16)
$J\ (Y_J)$	Fator geométrico da resistência à flexão	Equação (14–15)
K_B	Fator de espessura de aro (borda)	Equação (14–40)
K_f	Fator de concentração de tensão para fadiga	Equação (14–9)
$K_m\ (K_H)$	Fator de distribuição de carga	Equação (14–30)
K_o	Fator de sobrecarga	Equação (14–15)
$K_R\ (Y_Z)$	Fator de confiabilidade	Equação (14–17)
K_s	Fator de tamanho	Seção 14–10
$K_T\ (Y_\theta)$	Fator de temperatura	Equação (14–17)
K_v	Fator dinâmico	Equação (14–27)

Símbolos (3)

Símbolo*	Nome	Encontrado em
m	Módulo	Equação (14–15)
m_B	Razão de reforço	Equação (14–39)
m_F	Razão de contato da face	Equação (14–19)
m_G	Razão de engrenamento (nunca menor que 1)	Equação (14–22)
m_N	Razão de compartilhamento de carga	Equação (14–21)
m_t	Módulo transversal	Equação (14–15)
N	Número de ciclos de tensão	Figura 14–14
N_G	Número de dentes na coroa	Equação (14–22)
N_P	Número de dentes do pinhão	Equação (14–22)
n	Velocidade em rev/min	Equação (13–34)
n_p	Velocidade do pinhão em rev/min	Exemplo 14–4
P	Passo diametral	Equação (14–2)
P_d	Passo diametral transversal	Equação (14–15)
p_N	Passo normal de base	Equação (14–24)
p_n	Passo circular normal	Equação (14–24)

Símbolos (4)

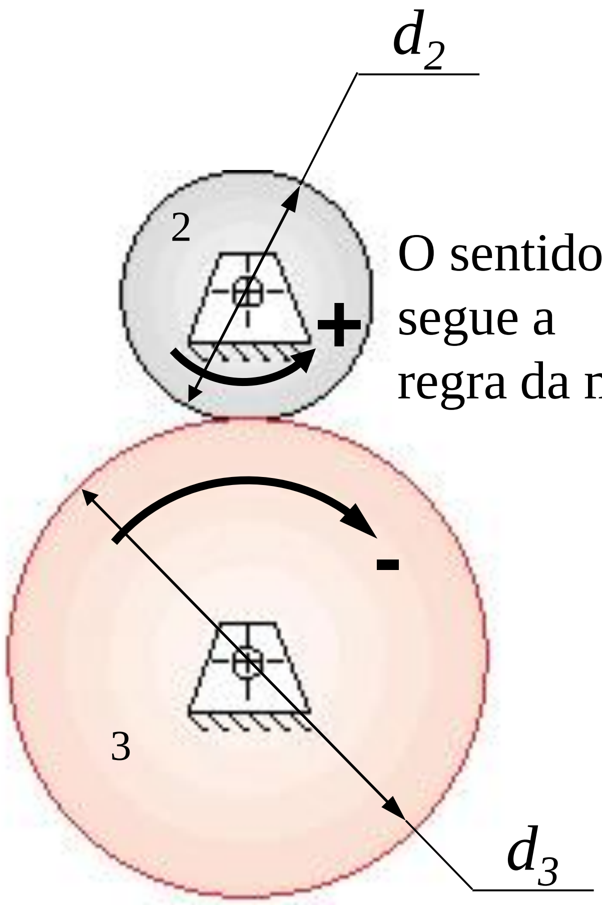
Símbolo*	Nome	Encontrado em
p_x	Passo axial	Equação (14–19)
Q_v	Número de qualidade	Equação (14–29)
R	Confiabilidade	Equação (14–38)
R_a	Raiz da média dos quadrados da rugosidade	Figura 14–13
r_f	Raio do adoçamento de dente	Figura 14–1
r_G	Raio do círculo primitivo, coroa	no padrão
r_P	Raio do círculo primitivo, pinhão	no padrão
r_{bp}	Raio do círculo de base do pinhão	Equação (14–25)
r_{bG}	Raio do círculo de base da coroa	Equação (14–25)
S_C	Resistência de endurança superficial de Buckingham	Exemplo 14–3
S_c	Resistência de endurança superficial AGMA	Equação (14–18)
S_t	Resistência à flexão da AGMA	Equação (14–17)
S	Vão entre mancais	Figura 14–10
S_1	Distância do pinhão ao centro do vão	Figura 14–10
S_F	Fator de segurança – flexão	Equação (14–41)

Símbolos (5)

Símbolo*	Nome	Encontrado em
S_H	Fator de segurança – crateramento	Equação (14–42)
W^t ou W_t	Carga transmitida	Figura 14–1
Y_N	Fator de ciclagem de tensão para a resistência à flexão	Figura 14–14
Z_N	Fator de ciclagem de tensão para a resistência de crateramento	Figura 14–15
β	Expoente	Equação (14–44)
σ	Tensão de flexão, AGMA	Equação (14–15)
σ_C	Tensão de contato das relações de Hertz	Equação (14–14)
σ_c	Tensão de contato das relações da AGMA	Equação (14–16)
σ_{adm}	Tensão de flexão admissível, AGMA	Equação (14–17)
$\sigma_{c,\text{adm}}$	Tensão de contato admissível, AGMA	Equação (14–18)
ϕ	Ângulo de pressão	Equação (14–12)
ϕ_n	Ângulo de pressão normal	Equação (14–24)
ϕ_t	Ângulo de pressão transversal	Equação (14–23)
ψ	Ângulo de hélice	Exemplo 14–5

Relação de Transmissão - Transmissão Simples

- Para um pinhão 2 acionando uma coroa 3, a velocidade tangencial no contato vale:



O sentido de rotação segue a regra da mão direita

$$v = \omega_2 . r_2 = -\omega_3 . r_3$$

sendo: $\omega_2 = \dfrac{2.\pi.n_2}{60}$ e $\omega_3 = \dfrac{2.\pi.n_3}{60}$

$$\frac{2.\pi.n_2}{60}.r_2 = -\frac{2.\pi.n_3}{60}.r_3$$

$$n_2.r_2 = -n_3.r_3$$

$$\boxed{e = -\frac{n_2}{n_3} = \frac{r_3}{r_2} = -\frac{\omega_2}{\omega_3}}$$

e **- Relação de transmissão (ou razão de engrenamento)**

ou ainda:

$$\boxed{e = \frac{N_3}{N_2} = \frac{d_3}{d_2}}$$

sendo

n = velocidade ou rotação
N = número de dentes
d = diâmetro primitivo

Relação de Transmissão - Transmissão Simples

$$\omega_1 . r_1 = -\omega_2 . r_2$$

$$\omega_2 . r_2 = -\omega_3 . r_3$$

$$\omega_3 . r_3 = -\omega_4 . r_4$$

$$\omega_1 = \left(-\frac{r_4}{r_3}\right)\left(-\frac{r_3}{r_2}\right)\left(-\frac{r_2}{r_1}\right)\omega_4$$

$$\boxed{\frac{\omega_1}{\omega_4} = -\frac{r_4}{r_1}}$$ ou $$\boxed{\frac{n_1}{n_4} = -\frac{r_4}{r_1}}$$

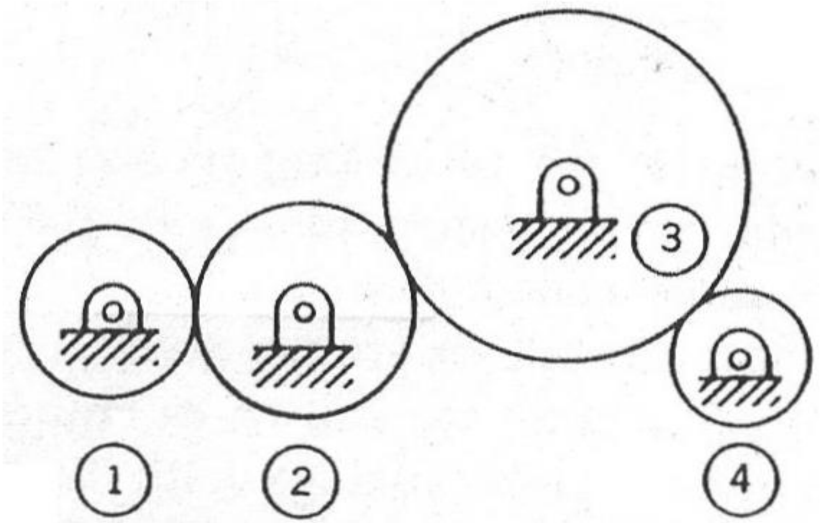


FIGURE 5.13 Simple Gear Train

- Todas as engrenagens possuem o mesmo módulo.
- Somente as engrenagens de entrada e de saída são importantes.
- As engrenagens intermediárias servem apenas para preencher o espaço e controlar o sentido de rotação:
  - número par de estágios => mesmo sentido;
  - número ímpar de estágios =>inversão de rotação.
- Mais de uma engrenagem intermediária é desaconselhável => substituir por corrente ou correia.

Trem composto de engrenagens

- Limite prático da relação de transmissão para um par de engrenagens: 10:1.
- Para obter maiores valores, combiner duas engrenagens no mesmo eixo.

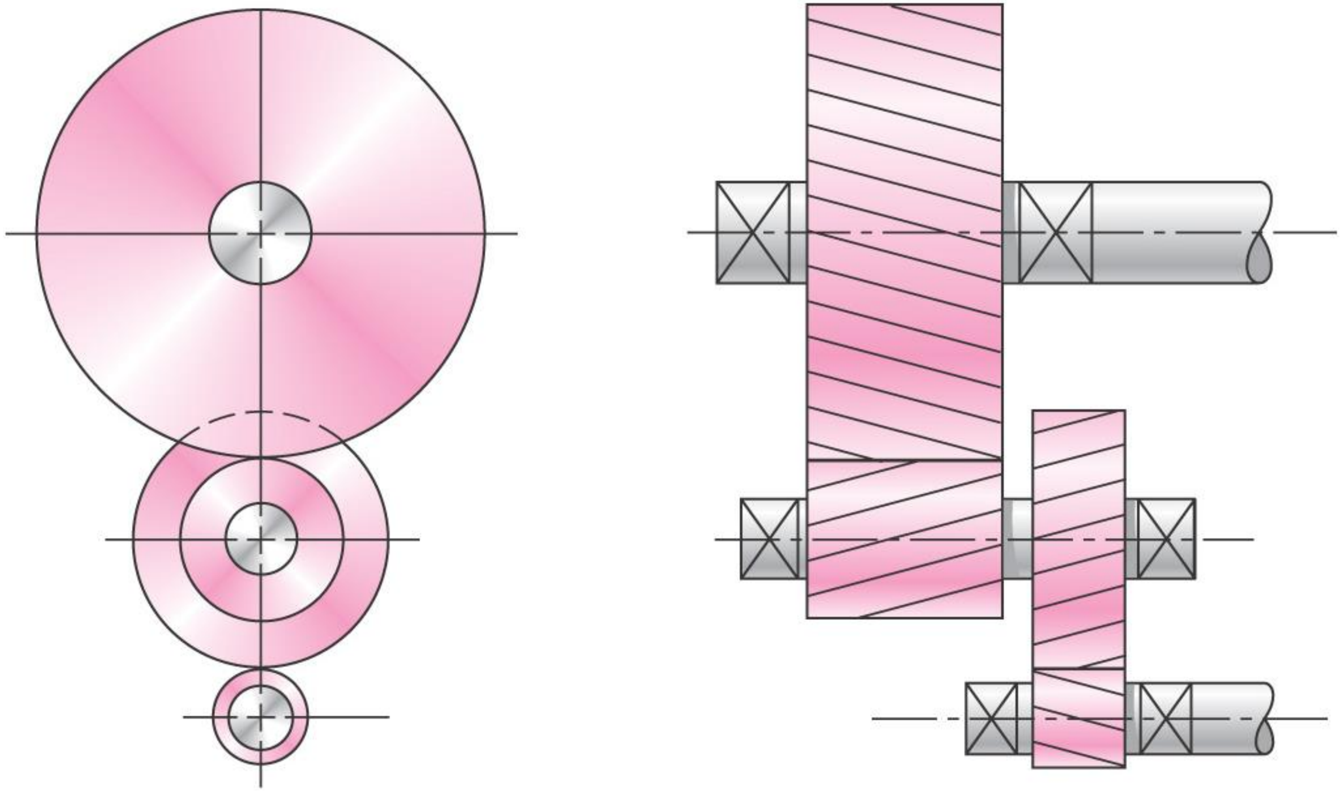


Fig. 13–28

Relação de Transmissão - Transmissão Composta

$$\omega_1 . r_1 = -\omega_2 . r_2$$

$$\omega_3 . r_3 = -\omega_4 . r_4$$

$$\omega_5 . r_5 = -\omega_6 . r_6$$

mas: $\omega_2 = \omega_3$ e $\omega_4 = \omega_5$

$$\omega_1 = \left(-\frac{r_6}{r_5}\right)\left(-\frac{r_4}{r_3}\right)\left(-\frac{r_2}{r_1}\right)\omega_6$$

$$\boxed{\frac{\omega_1}{\omega_6} = \left(-\frac{r_6}{r_5}\right)\left(-\frac{r_4}{r_3}\right)\left(-\frac{r_2}{r_1}\right)}$$

ou

$$\boxed{\frac{\omega_1}{\omega_6} = \left(-\frac{N_6}{N_5}\right)\left(-\frac{N_4}{N_3}\right)\left(-\frac{N_2}{N_1}\right)}$$

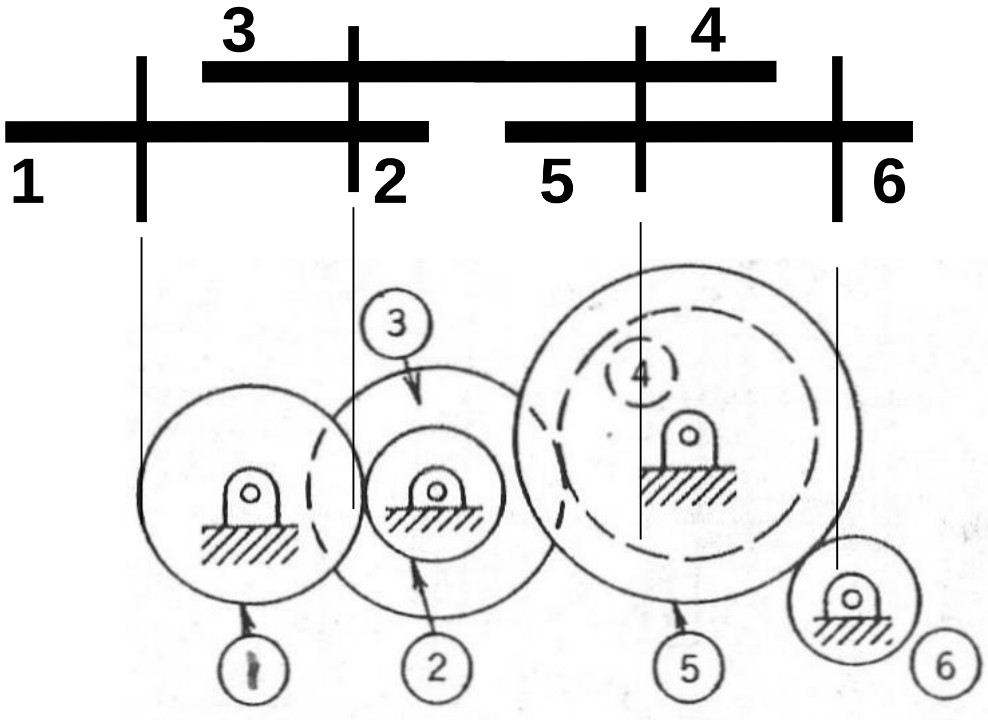


FIGURE 5.14 Compound Gear Train

- Relações maiores do que 10:1.
- Redução ocorre em estágios.
- Cada estágio possui seu próprio módulo.
- Sentido de rotação:
  - núm. par de estágios=>mesmo sentido;
  - núm. ímpar de estágios=>inversão.

Exemplo

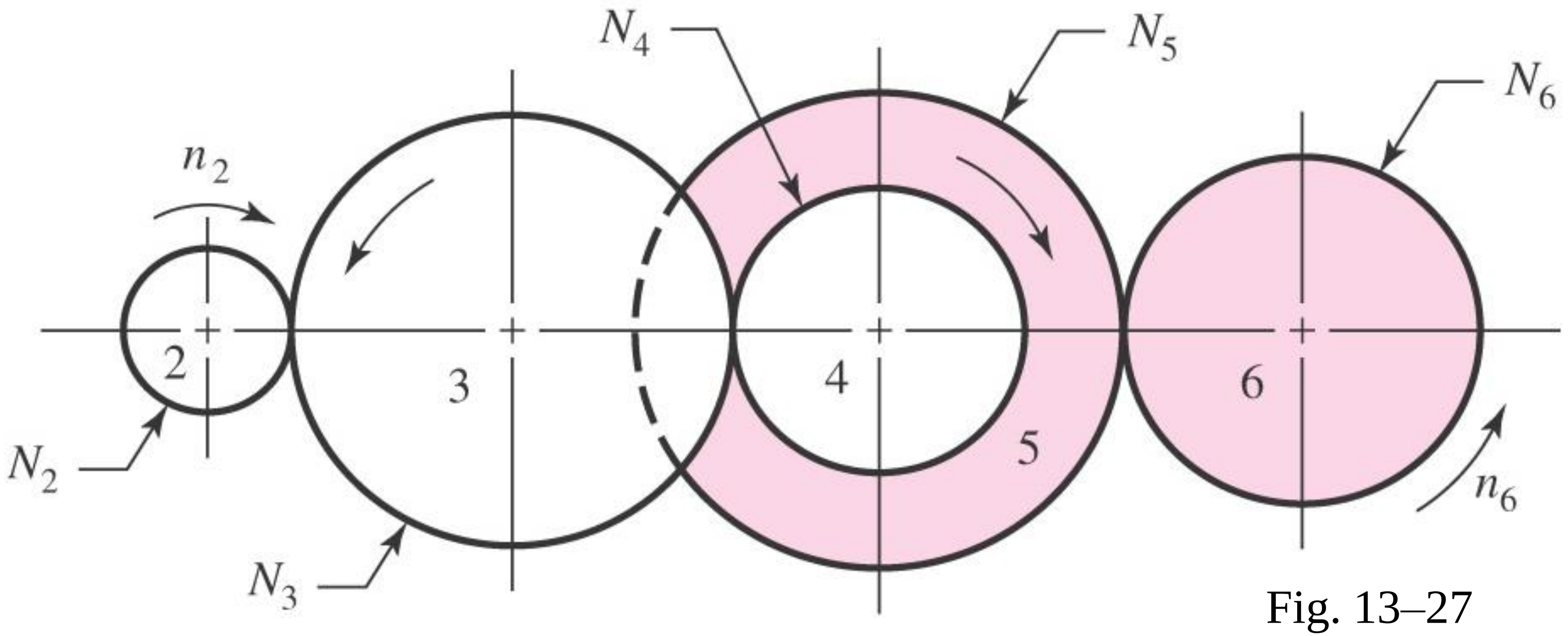


Fig. 13–27

$N_2 = 20$

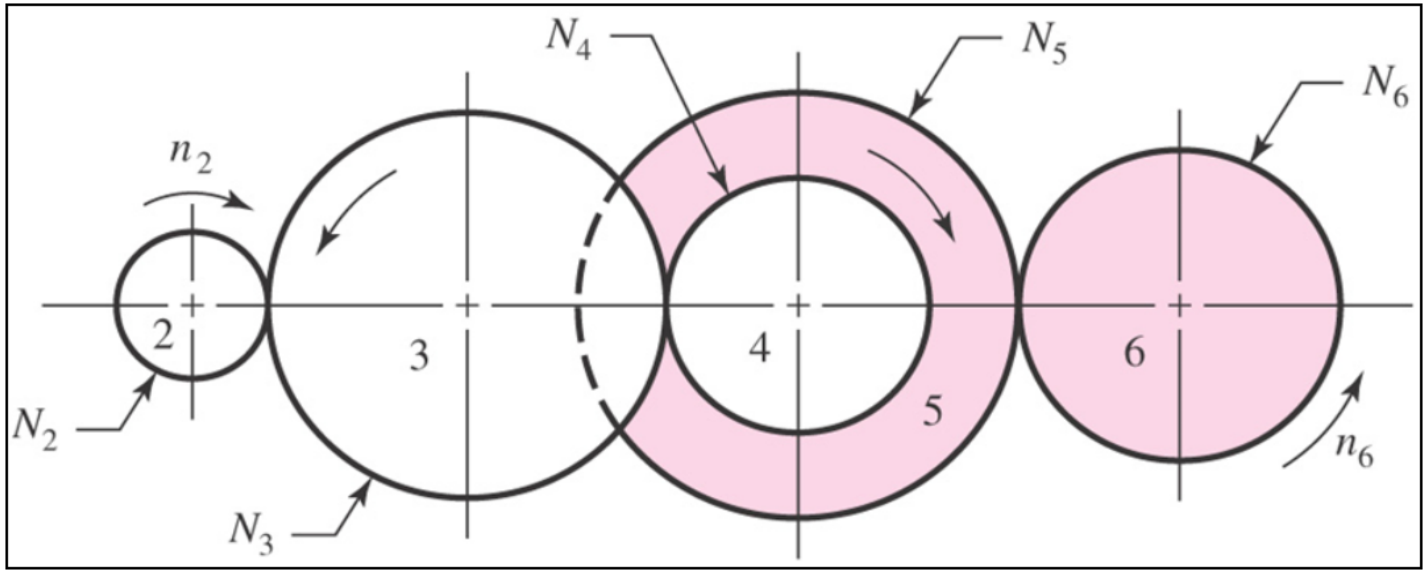
$N_3 = 60$

$N_4 = 40$ $\quad\quad N_2 = 300$ rpm $\quad\quad \boxed{n_6 = ?}$

$N_5 = 70$

$N_6 = 50$

Exemplo



$N_2 := 20 \quad n_2 := 300\ \text{rpm}$

$N_3 := 60$

$N_4 := 40$

$N_5 := 70$

$N_6 := 50$

$$\boxed{\frac{n_2}{n_3} = -\frac{N_3}{N_2}} \qquad n_3 = \left(-\frac{N_2}{N_3}\right) \cdot n_2 \qquad n_6 = \left(-\frac{N_5}{N_6}\right) \cdot n_5$$

$$\boxed{\frac{n_3}{n_4} = -\frac{N_4}{N_3}} \qquad n_4 = \left(-\frac{N_3}{N_4}\right) \cdot n_3$$

$$n_6 = \left(-\frac{N_5}{N_6}\right) \cdot n_4 \qquad n_6 = \left(-\frac{N_5}{N_6}\right) \cdot \left(-\frac{N_3}{N_4}\right) \cdot n_3$$

$$\boxed{n_4 = n_5}$$

$$n_6 := \left(-\frac{N_5}{N_6}\right) \cdot \left(-\frac{N_3}{N_4}\right) \cdot \left(-\frac{N_2}{N_3}\right) \cdot n_2$$

$$\boxed{\frac{n_5}{n_6} = -\frac{N_6}{N_5}}$$

$$\boxed{n_6 = -210\ \text{rpm}} \qquad \boxed{e := \frac{n_2}{n_6} = -1,429}$$

Comentários

- Para um redutor de velocidades simples, a relação de transmissão sempre será maior do que 1, e será calculada por:

$$e = \frac{n_{motora}}{n_{movida}} = \frac{N_{movida}}{N_{motora}}$$

- Para um redutor de velocidades composto, a relação de transmissão será:

$$e = \frac{produto\ do\ número\ de\ dentes\ das\ engrenagens\ movidas}{produto\ do\ número\ de\ dentes\ das\ engrenagens\ motoras}$$

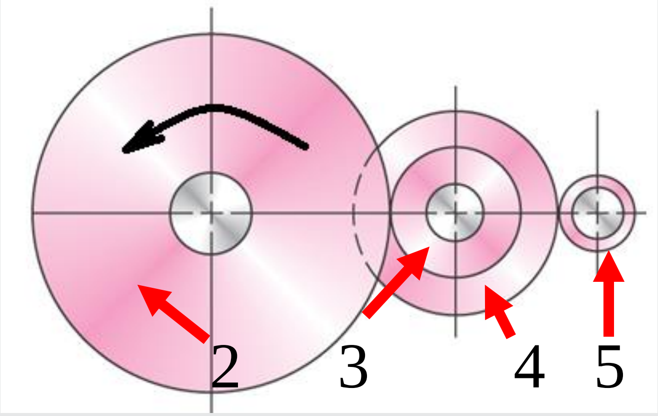
- Isto vale também para trens mistos, conforme exemplo anterior.
- O sentido de rotação deverá ser avaliado separadamente.
- No Capítulo 14, a relação de transmissão é representada por m_G

Exemplo 13–3

É necessária uma caixa de engrenagens que proporcione um aumento de velocidade de 30:1 ($\pm 1\%$), com minimização simultânea de tamanho geral de caixa. Especifique números de dentes apropriados.

Uma vez que a razão é maior que 10:1, porém menor que 100:1, um trem de engrenagens composto de dois estágios, como aquele da Figura 13-28, é necessário. A porção a ser alcançada em cada estágio é $\sqrt{30} = 5{,}4772$. Para essa razão, assumindo um ângulo de pressão típico de 20°, o número mínimo de dentes para evitar interferência é 16, de acordo com a Equação (13–11). O número de dentes necessário para as engrenagens par é:

$$16\sqrt{30} = 87{,}64 \approx 88$$



Da Equação (13–30), o valor completo de trem é

$$e = (88/16)(88/16) = 30{,}25$$

Esse valor está dentro da tolerância de 1%. Se desejar uma tolerância menor, aumente o tamanho do pinhão para o próximo valor inteiro e tente novamente.

Exemplo 13–4

É necessária uma caixa de engrenagens que proporcione um aumento exato de 30:1 em velocidade, com minimização simultânea do tamanho geral de caixa. Especifique números de dentes apropriados.

O exemplo prévio demonstrou a dificuldade de se encontrar números inteiros de dentes para prover uma razão exata. A fim de determinar inteiros, fatorize a razão global em dois estágios inteiros:

$$e = 30 = (6)(5)$$

$$N_2/N_3 = 6 \qquad \text{e} \qquad N_4/N_5 = 5$$

Com duas equações e quatro números de dentes desconhecidos, duas escolhas livres são disponíveis. Escolha N_3 e N_5 tão pequenos quanto possível, sem interferência. Assumindo um ângulo de pressão de 20°, a Equação (13–11) nos dá o mínimo de 16.

Assim,

$$N_2 = 6\,N_3 = 6\,(16) = 96$$

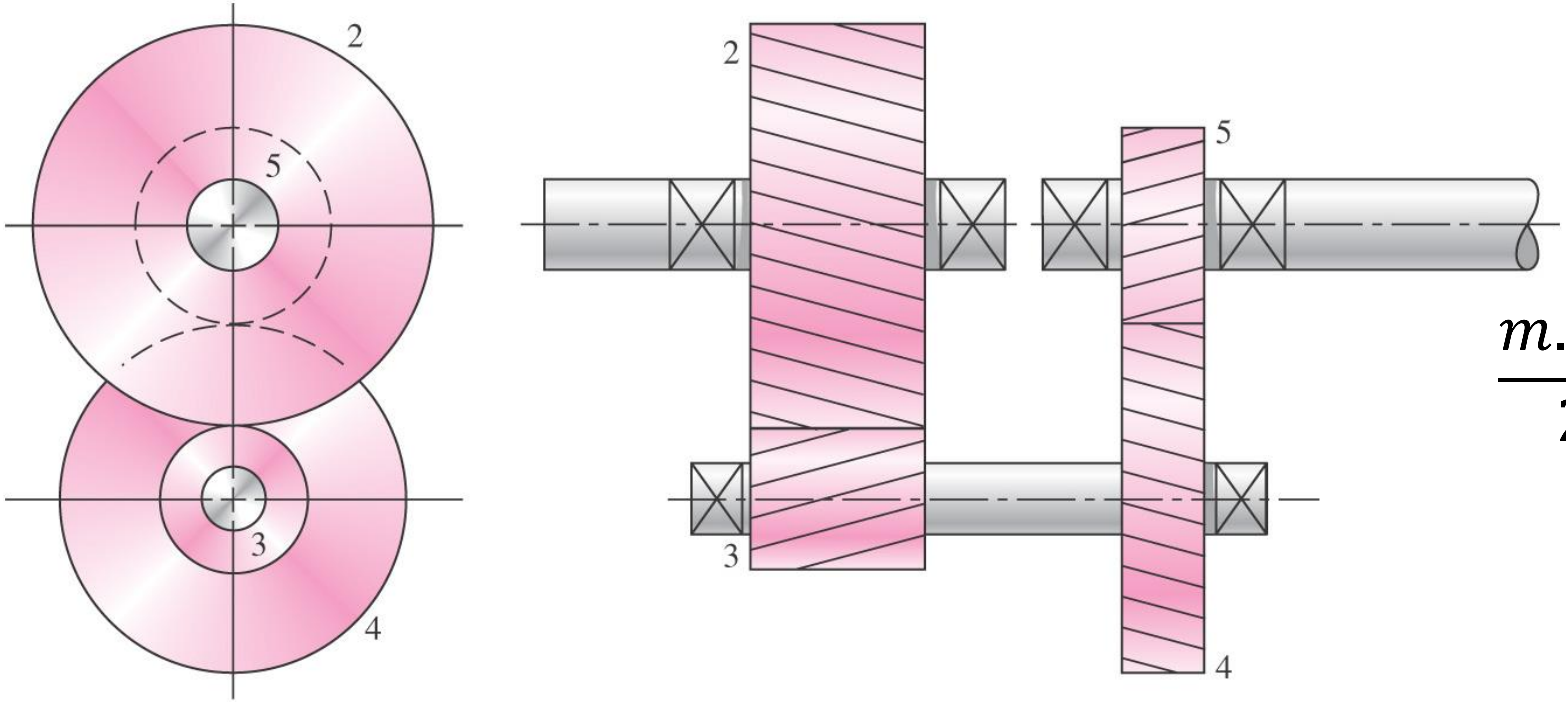
$$N_4 = 5\,N_5 = 5\,(16) = 80$$

O valor global de trem é, portanto, exato.

$$e = (96/16)(80/16) = (6)(5) = 30$$

Trem Composto Reverso

- Trem composto em que os eixos de entrada e de saída são alinhados.
- Condição geométrica a ser satisfeita: mesma distância entre centros



$$\frac{d_2}{2} + \frac{d_3}{2} = \frac{d_4}{2} + \frac{d_5}{2}$$

$$d = m.N$$

$$\frac{m.N_2}{2} + \frac{m.N_3}{2} = \frac{m.N_4}{2} + \frac{m.N_5}{2}$$

$$\boxed{N_2 + N_3 = N_4 + N_5}$$

Fig. 13–29

Exemplo 13–5

Uma caixa de engrenagens capaz de prover um aumento exato de velocidade de 30:1 se faz necessária. Os eixos de entrada e saída devem estar em linha. Especifique números apropriados de dentes.

As equações governantes são

$$N_2/N_3 = 6$$

$$N_4/N_5 = 5$$

$$N_2 + N_3 = N_4 + N_5$$

Com três equações e quatro números de dentes desconhecidos, apenas uma escolha livre é possível. Das duas engrenagens menores, N_3 e N_5, a escolha livre deve ser usada para minimizar N_3 uma vez que uma razão de engrenamento maior deve ser alcançada neste estágio. A fim de evitar interferência, o mínimo para N_3 é 16.

Exemplo 13–5

Aplicando as equações governantes resulta

$$N_2 = 6N_3 = 6(16) = 96$$

$$N_2 + N_3 = 96 + 16 = 112 = N_4 + N_5$$

Substituindo $N_4 = 5N_5$, temos

$$112 = 5N_5 + N_5 = 6N_5$$

$$N_5 = 112/6 = 18{,}67$$

Exemplo 13–5

Se o valor de trem precisa apenas ser aproximado, então esse valor pode ser aproximado do valor inteiro mais próximo. Porém, para uma solução exata, é necessário tomar a escolha livre inicial para N_3 de modo que a solução para o restante do número de dentes resulte exatamente em inteiros. Isso pode ser feito por tentativa e erro, tomando $N_3 = 17$, depois 18 etc., até que funcione. Ou o problema pode ser normalizado para rapidamente determinar a escolha mínima livre. Começando novamente, assuma a escolha livre $N_3 = 1$. Aplicando as equações governantes dá

$$N_2 = 6N_3 = 6(1) = 6$$

$$N_2 + N_3 = 6 + 1 = 7 = N_4 + N_5$$

Substituindo $N_4 = 5N_5$, encontramos

$$7 = 5N_5 + N_5 = 6N_5$$

$$N_5 = 7/6$$

Essa fração poderia ser eliminada se fosse multiplicada por um múltiplo de 6. A escolha livre para a menor engrenagem N_3 deve ser selecionada como um múltiplo de 6, que seja maior que o mínimo permitido para evitar interferência. Isso deve indicar que $N_3 = 18$.

Exemplo 13–5

Repetindo a aplicação das equações governantes para o tempo final, resulta

$$N_2 = 6N_3 = 6(18) = 108$$

$$N_2 + N_3 = 108 + 18 = 126 = N_4 + N_5$$

$$126 = 5N_5 + N_5 = 6N_5$$

$$N_5 = 126, 6 = 21$$

$$N_4 = 5N_5 = 5(21) = 105$$

Assim,

$$N_2 = 108 \qquad N_4 = 105$$

$$N_3 = 18 \qquad N_5 = 21$$

Para verificação, calculemos $e = (108/18)(105/21) = (6)(5) = 30$.

E, verificando a restrição geométrica para o requerimento de em-linha, calculamos

$$N_2 + N_3 = N_4 + N_5$$

$$108 + 18 = 105 + 21$$

$$126 = 126$$

Trem Planetário

- Trens de engrenagens *Planetárias* ou *epicíclicas* permitem que os eixos que transferem o movimento permaneçam alinhados.
- *Engrenagem Sol* possui centro fixo
- *Engrenagem planeta* possui eixo móvel.
- *Transportador do planeta* ou *braço* conduz o eixo do planeta relativamente ao eixo do Sol.
- Possui dois graus de Liberdade (i.e. duas entradas)

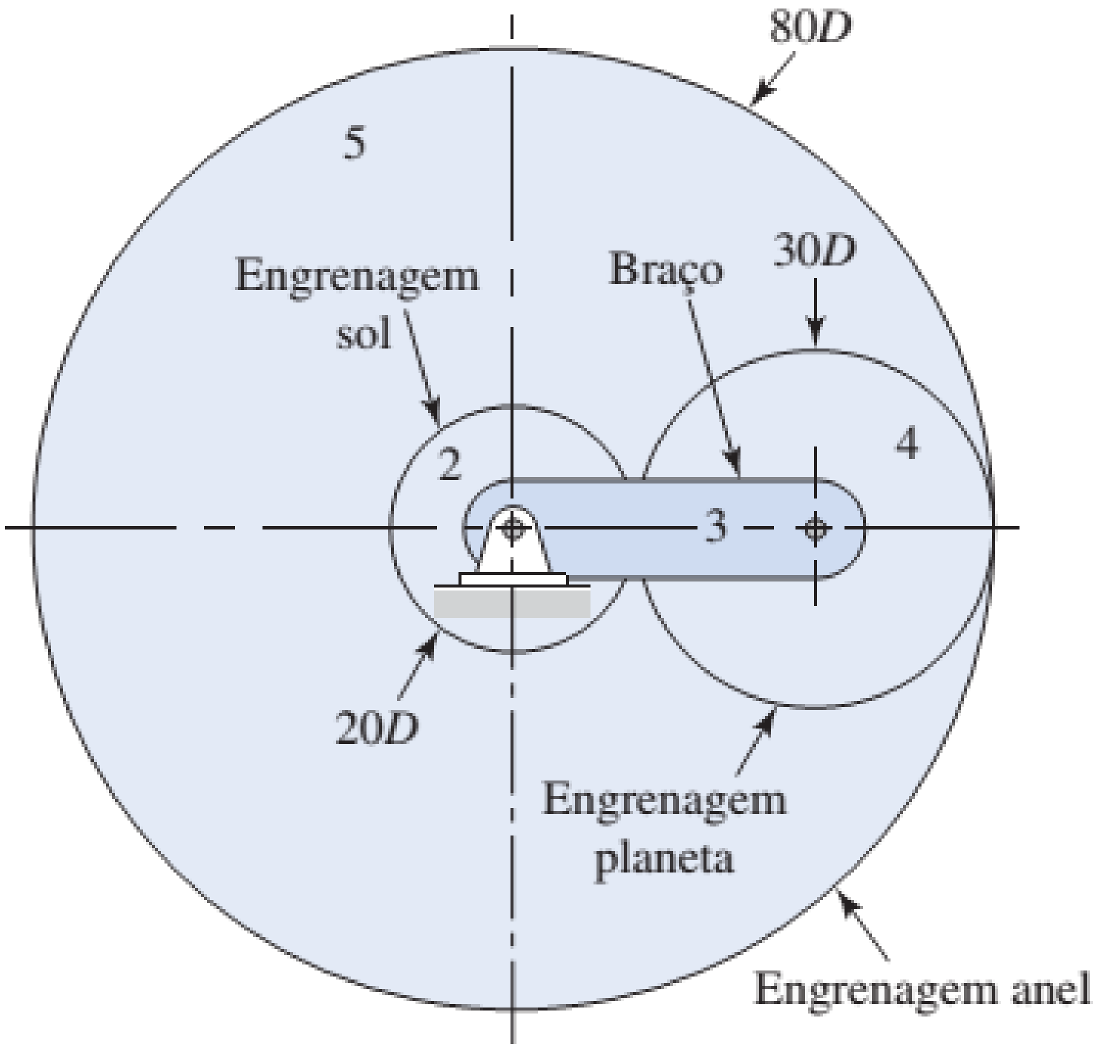


Fig. 13–30

Trem Planetário

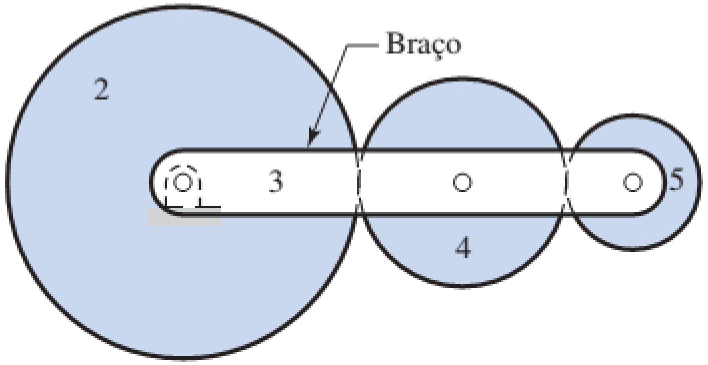


Fig. 13–31

2 - sol
3 - braço
4 e 5 - planetas

A velocidade angular da engrenagem 2 relativa ao braço em rev/min é

$$n_{23} = n_2 - n_3 \qquad (b)$$

Também, a velocidade da engrenagem 5 relativa ao braço é

$$n_{53} = n_5 - n_3 \qquad (c)$$

Dividindo a Equação (*c*) pela Equação (*b*) dá

$$\frac{n_{53}}{n_{23}} = \frac{n_5 - n_3}{n_2 - n_3} \qquad (d)$$

A Equação (*d*) expressa a razão da engrenagem 5 com relação à engrenagem 2, e ambas as velocidades são tomadas relativamente ao braço. Agora, este número é o mesmo e é proporcional ao número de dentes, quer esteja o braço rodando ou não. É o valor do trem. Portanto, podemos escrever

Trem Planetário

A Equação (*d*) expressa a razão da engrenagem 5 com relação à engrenagem 2, e ambas as velocidades são tomadas relativamente ao braço. Agora, este número é o mesmo e é proporcional ao número de dentes, quer esteja o braço rodando ou não. É o valor do trem. Portanto, podemos escrever

$$e = \frac{n_5 - n_3}{n_2 - n_3} \tag{e}$$

Essa equação pode ser utilizada para resolução em termos do movimento de saída de qualquer trem planetário. É mais convenientemente escrita como

$$e = \frac{n_L - n_A}{n_F - n_A} \tag{13–32}$$

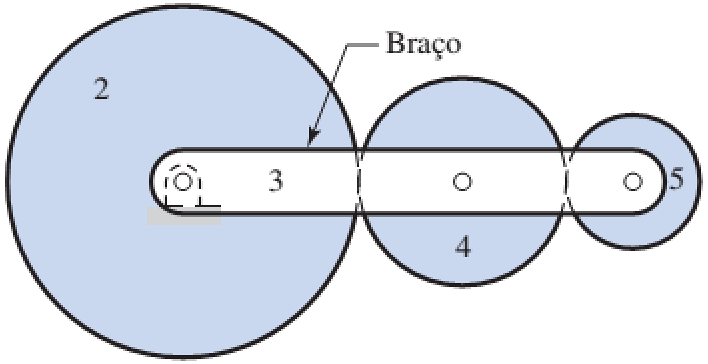


Fig. 13–31

Trem Planetário

- A relação de transmissão é obtida em relação ao braço.

$$e = \frac{n_L - n_A}{n_F - n_A} \qquad (13\text{–}32)$$

em que n_F = rev/min da primeira engrenagem no trem planetário

n_L = rev/min da última engrenagem no trem planetário

n_A = rev/min do braço

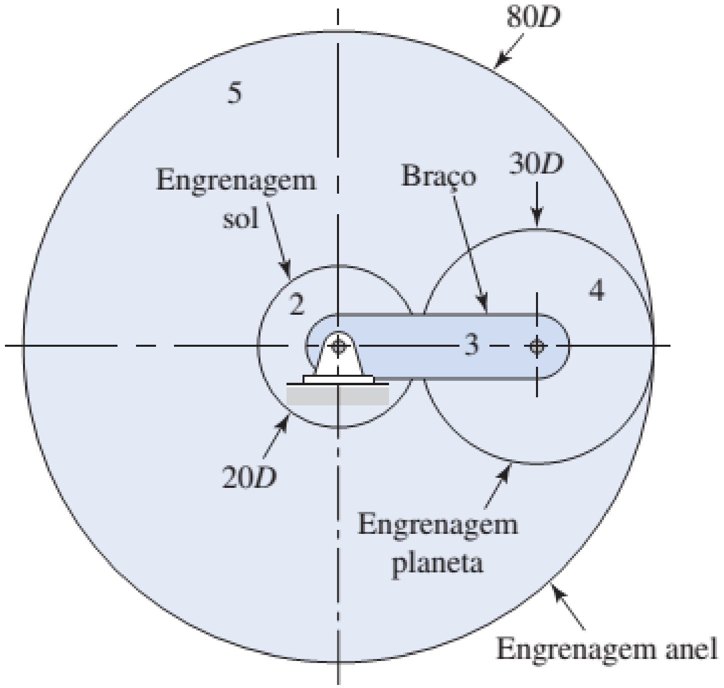


Fig. 13–30

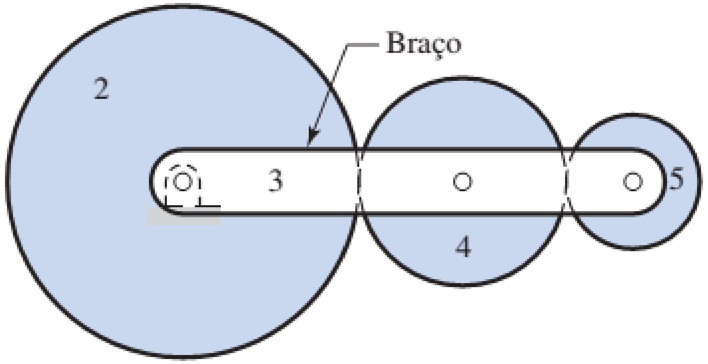


Fig. 13–31

Example 13–6

Na Figura 13–30 a engrenagem sol é a engrenagem de entrada, sendo movida no sentido horário a 100 rev/min. A engrenagem anel é mantida estacionária fixando-se à estrutura. Encontre a velocidade em rev/min, bem como a direção de rotação do braço e da engrenagem 4.

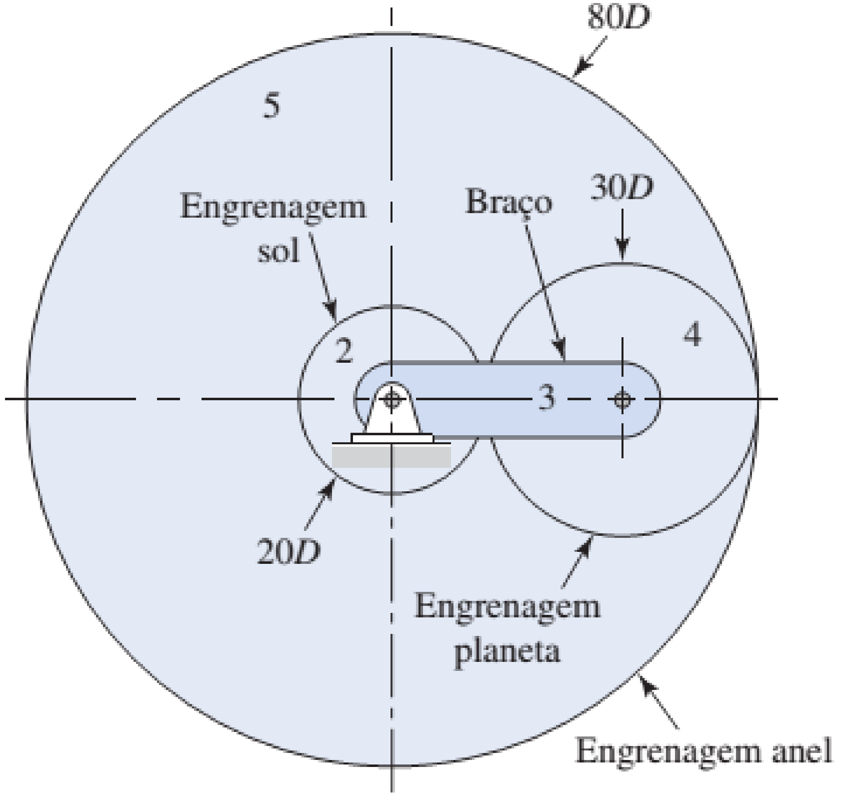
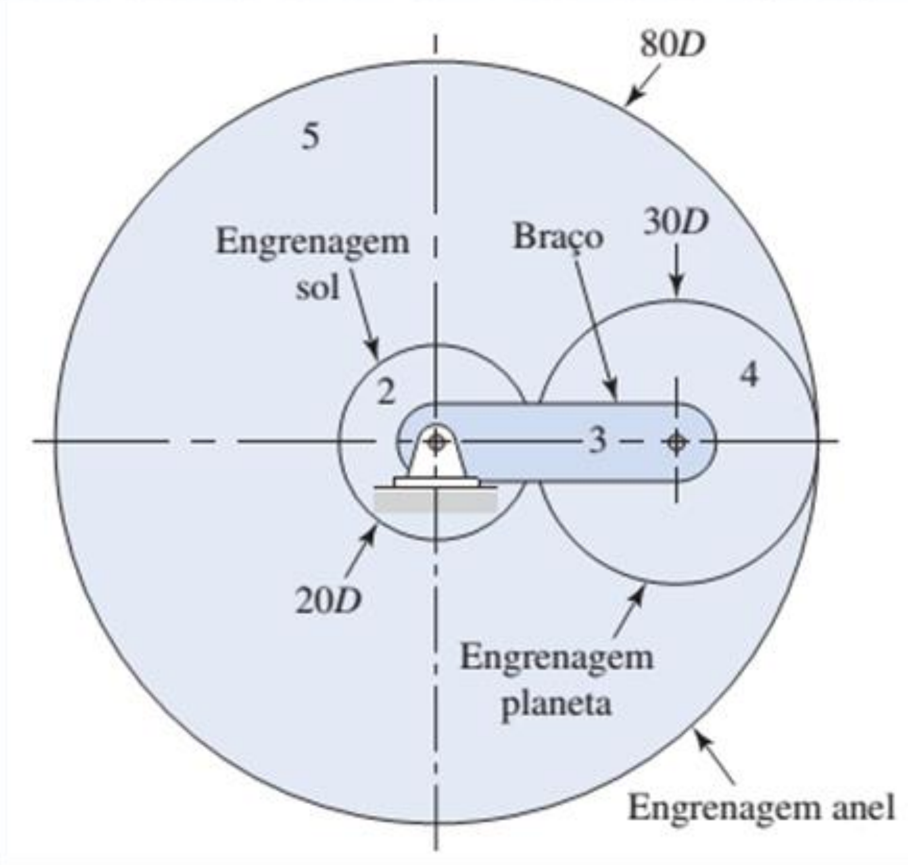


Fig. 13–30

Exemplo 13–6

Seja $n_F = n_2 = -100$ rev/min e $n_L = n_5 = 0$. Para e, destrave a engrenagem 5 e fixe o braço. Então, a engrenagem planetária 4 e a engrenagem anel 5 rotacionam na mesma direção, em oposição à engrenagem sol 2. Assim, e é negativo e



$$e = -\left(\frac{N_2}{N_4}\right)\left(\frac{N_4}{N_5}\right) = -\left(\frac{20}{30}\right)\left(\frac{30}{80}\right) = -0{,}25$$

Substituindo esse valor na Equação (13–32) nos dá

$$-0{,}25 = \frac{0 - n_A}{(-100) - n_A}$$

ou

$$n_A = -20 \text{ rev/min} = 20 \text{ rev/min no sentido horário}$$

Exemplo 13–6

Para obtermos a velocidade da engrenagem 4, seguimos o procedimento estabelecido com as Equações (b), (c) e (d). Assim

$$n_{43} = n_4 - n_3 \qquad n_{23} = n_2 - n_3$$

de modo que

$$\frac{n_{43}}{n_{23}} = \frac{n_4 - n_3}{n_2 - n_3} \tag{1}$$

porém

$$\frac{n_{43}}{n_{23}} = -\frac{20}{30} = -\frac{2}{3} \tag{2}$$

Ao substituirmos os valores conhecidos na Equação (1), obtemos

$$-\frac{2}{3} = \frac{n_4 - (-20)}{(-100) - (-20)}$$

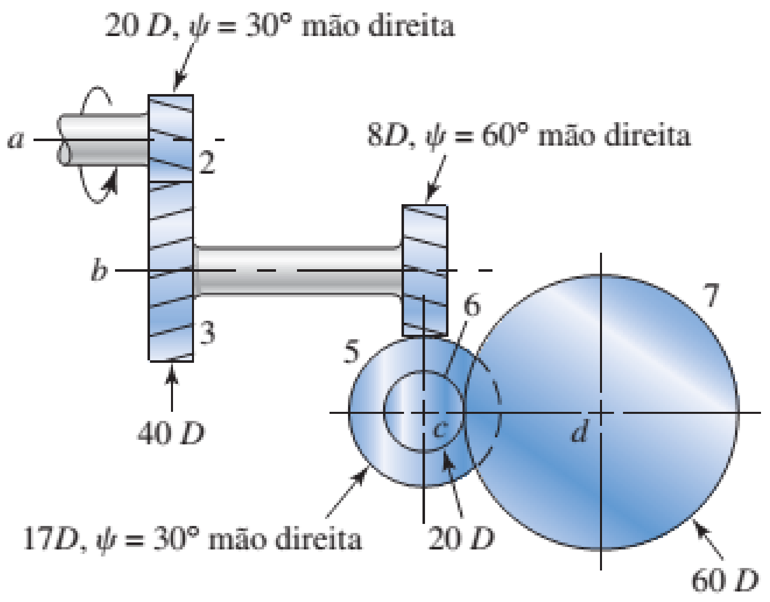
cuja solução produz

$$n_4 = 33\tfrac{1}{3} \text{ rev/min} = 33\tfrac{1}{3} \text{ rev/min no sentido anti-horário}$$

Exercícios Propostos

13–17 O eixo *a* na figura roda a 600 rev/min na direção mostrada. Encontre a celeridade e direção da rotação do eixo *d*.

Problema 13–17



13–24 Uma caixa de engrenagens deve ser projetada com um trem de engrenagens composto reverso que transmite 25 hp com uma velocidade de entrada de 2.500 rev/min. A saída deve fornecer potência a uma velocidade de rotação no intervalo entre 280 e 300 rev/min. Deve-se utilizar engrenagens cilíndricas de dentes retos com ângulo de pressão de 20°. Determine o número de dentes adequado a cada engrenagem para minimizar as dimensões da caixa de engrenagens e prover uma velocidade de saída dentro do intervalo especificado. Assegure-se de eliminar o problema de interferência nos dentes.

Exercícios Propostos

13–29 Os números de dentes das engrenagens do trem mostrado na figura são: $N_2 = 12$, $N_3 = 16$ e $N_4 = 12$. Quantos dentes deve ter a engrenagem interna 5? Suponha que a engrenagem 5 seja fixa. Qual é a velocidade do braço se o eixo *a* rodar no sentido anti-horário a 320 rev/min, como se observa na parte esquerda da figura?

Problema 13–29