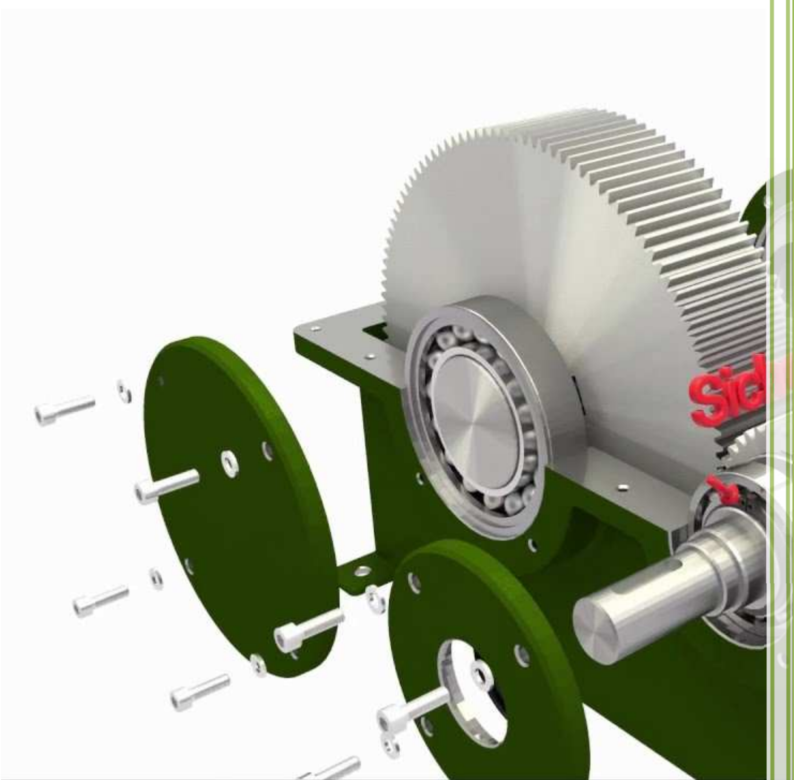
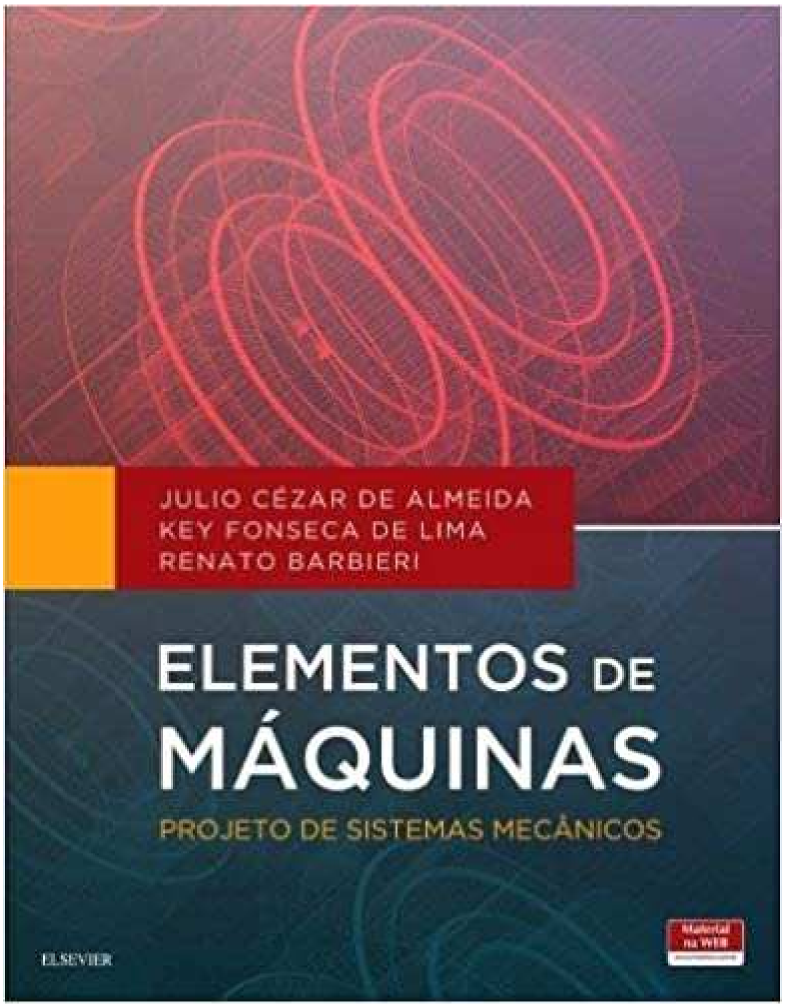
2020

Engrenagens Retas
Problemas Resolvidos



Prof. Dr. Eng. Julio Almeida

Soluções baseadas na teoria, equações e tabelas do Livro – Elementos de Máquinas – Projeto de Sistemas Mecânicos dos autores: Julio Almeida, Key Fonseca e Renato Barbieri – Editora ELSEVIER.



Exemplo 1.1 - Um pinhão com 22 dentes e módulo 6.5mm, gira a 1200 rpm e aciona uma engrenagem que gira a 660 rpm. Determinar o número de dentes da coroa, o passo frontal e a distância entre eixos.

Solução:

Número de dentes da coroa:

$$\frac{n_1}{n_2} = \frac{z_2}{z_1} \Longrightarrow \frac{1200}{660} = \frac{z_2}{22}$$

$$z_2 = 40\ dentes$$

Passo frontal:

$$p_n = m\pi = 6.5(\pi) = 20.42\ mm$$

Distância entre eixos:

$$a = m\left(\frac{z_1 + z_2}{2}\right) = 6.5\left(\frac{22 + 40}{2}\right) = 201.5mm$$

Exemplo 1.2 – *Um par de engrenagens retas tem uma razão de velocidades de 3.20. A engrenagem motora tem 20 dentes e passo frontal de 75.4mm. Determinar o número de dentes da engrenagem movida, os diâmetros primitivos, os diâmetros de base e a distância entre eixos.*

Solução:

Módulo das engrenagens:

$p_n = m\pi \Longrightarrow 75.4 = m\pi \Longrightarrow m = 24\, mm$

Número de dentes da engrenagem movida:

$z_2 = i(z_1) = 3.2(20) = 64\, dentes$

Diâmetros primitivos das engrenagens:

$d_{p1} = mz_1 = 24(20) = 480mm$

$dp_2 = mz_2 = 24(64) = 1536\, mm$

Diâmetros de base das engrenagens (ângulo de pressão = 20º):

$db_1 = dp_1 cos\alpha = 480cos20^o = 451.05\, mm$

$db_2 = dp_2 cos\alpha = 1536cos20^o = 1443.37\, mm$

Distância entre eixos:

$$a = m\left(\frac{z_1 + z_2}{2}\right) = 24\left(\frac{20 + 64}{2}\right) = 1008\, mm$$

Exemplo 1.3 – *Um pinhão de 15 dentes e módulo 8.0 mm deve acionar uma engrenagem de 18 dentes. Considerando um ângulo de pressão de 25º, identificar a existência ou não do fenômeno da interferência.*

Solução:

Interferência do pinhão (k = 1, dada a condição de não haver rebaixamento dos dentes):

$$z_1{}^2 + 2z_1z_2 = \frac{4k(z_2 + k)}{sen^2\alpha}$$

$$z_1{}^2 + 2z_1(18) = \frac{4(18 + 1)}{sen^2 25}$$

$$z_1{}^2 + 36z_1 - 425.52 = 0$$

$$z_1 = 9.37$$

$$z_1' = -45.37$$

Se considera, como resposta válida, apenas a raiz positiva. Desta forma, pinhões confeccionados acima de 10 dentes, não apresentam problemas de interferência quando colocados para engrenar com uma coroa de 18 dentes e ângulo de pressão de 25º. Não existe assim, para o presente exemplo, problemas de interferência para com o pinhão proposto (o qual apresenta 15 dentes).

Interferência da coroa (k = 1, dada a condição de não haver rebaixamento dos dentes):

$$z_2 = \frac{z_1{}^2 sen^2\alpha - 4k^2}{4k - 2z_1 sen^2\alpha}$$

$$z_2 = \frac{15^2 sen^2 25 - 4}{4 - 2(15)sen^2 25} = -26.64$$

Para o caso de cálculos de interferência na coroa se pode afirmar que em todas as circunstâncias nas quais a resposta da referida expressão resultar num valor "negativo", não haverá qualquer problema de interferência para com a engrenagem analisada. Trata-se de uma situação para a qual a referida expressão "perde" a sua validade matemática. Não existe assim, para o presente exemplo, problemas de interferência para com a coroa proposta.

Exemplo 1.4 – *Qual o menor pinhão do sistema módulo métrico de 20º que poderá engrenar sem interferência com uma roda padronizada intercambiável de 37 dentes?*

Solução:

Interferência do pinhão (k = 1, dada a condição de não haver rebaixamento dos dentes):

$$z_1{}^2 + 2z_1z_2 = \frac{4k(z_2 + k)}{sen^2\alpha}$$

$$z_1{}^2 + 2z_1(37) = \frac{4(37 + 1)}{sen^2 20}$$

$$z_1{}^2 + 74z_1 - 1299.39 = 0$$

$$z_1 = 14.65$$

$$z_1' = -88.65$$

Se considera, como resposta válida, apenas a raiz positiva. Desta forma, pinhões confeccionados acima de 15 dentes, não apresentam problemas de interferência quando colocados para engrenar com uma coroa de 37 dentes e ângulo de pressão de 20º.

Tem-se assim, como resposta: pinhão com 15 dentes.

Exemplo 1.5 - Determine o número máximo de dentes para uma roda que deverá engrenar sem interferência, com um pinhão de 15 dentes do sistema métrico com 20º?

Interferência da coroa (k = 1, dada a condição de não haver rebaixamento dos dentes):

$$z_2 = \frac{{z_1}^2 sen^2\alpha - 4k^2}{4k - 2z_1 sen^2\alpha}$$

$$z_2 = \frac{15^2 sen^2 20 - 4}{4 - 2(15) sen^2 20} = 45.48$$

Para o presente caso, coroas confeccionados com até 45 dentes, não apresentam problemas de interferência quando colocados para engrenar com um pinhão 15 dentes e ângulo de pressão de 20º.

Tem-se assim, como resposta: coroa com 45 dentes.

Exemplo 1.6 – *Considere um redutor formado por engrenagens cilíndricas de dentes retos, acionado diretamente por um motor de 74.6 kW/1120 rpm, com uma redução de 3:1. Supondo z_1 = 18 e m = 8 mm, determinar pelo critério da resistência a mínima largura necessária para as engrenagens.*

Dados : $Q_v = 8$ / *durezas do pinhão e coroa = 235 e 200 HB*

pinhão de aço endurecido por completo grau 1

coroa de aço endurecido por completo grau 2

acionamento uniforme e choques moderados

$K_m = 1.1$ / *confiabilidade esperada = 90%* / $K_s = 1.01$

Solução: *define-se inicialmente o torque atuante no pinhão e sua correspondente força tangencial (74600 W = 101.36 CV):*

$$T = 71620\frac{N}{n} = 71620\frac{101.36}{1120} = 6481.61\ kgf.cm$$

$$d_p = mz = 8(18) = 144\ mm$$

$$T = F_t\frac{dp_1}{2} \Longrightarrow 6481.61 = F_t\frac{14.4}{2} \Longrightarrow F_t = 900.22\ kgf = 8831.16\ N$$

Coeficientes para os quais não se tem informações e, consequentemente, devem ser assumidos como iguais à unidade:

$$K_B = Y_\theta = Y_N = 1.00$$

Velocidade tangencial das engrenagens e fator dinâmico:

$$v = \frac{\pi d_p n}{60} = \frac{\pi(0.144)1120}{60} = 8.44\ m/s$$

$$B = 0.25(12 - Q_V)^{2/3} = 0.25(12 - 8)^{2/3} = 0.63$$

$$A = 50 + 56(1 - B) = 50 + 56(1 - 0.63) = 70.72$$

$$K_V = \left(\frac{A + \sqrt{200v}}{A}\right)^B = \left(\frac{70.72 + \sqrt{200(8.44)}}{70.72}\right)^{0.63} = 1.334$$

Fator geométrico (J):

$$J_1 = 0.32$$

$$J_2 = 0.40$$

Fator de sobrecarga (acionamento uniforme e choques moderados):

$K_o = 1.25$

Fator de confiabilidade:

$Y_Z = 0.658 - 0.0759\ln(1 - R)$

$Y_Z = 0.658 - 0.0759\ln(1 - 0.9) = 0.833$

Tensão AGMA:

$$\sigma_{AGMA} = K_O F_T K_V K_S \frac{1}{bm}\frac{K_m K_B}{J}$$

$$\sigma_{AGMA1} = (1.25)8831.16(1.334)(1.01)\frac{1}{b(8)}\frac{(1.1)}{0.32} = \frac{6390.83}{b}$$

$$\sigma_{AGMA2} = (1.25)8831.16(1.334)(1.01)\frac{1}{b(8)}\frac{(1.1)}{0.40} = \frac{5112.66}{b}$$

Tensões admissíveis de flexão AGMA:

$S_{t1} = 0.533\,HB + 88.3 = 0.533(235) + 88.3 = 213.56\,MPa$

$S_{t2} = 0.703\,HB + 113 = 0.703(200) + 113 = 253.60\,MPa$

Largura mínima das engrenagens com os dados do pinhão:

$$CS_{F1} = \frac{S_{t1} Y_N}{Y_\theta Y_Z \sigma_{AGMA}} \geq 1.5$$

$$1.5 = \frac{213.56(1)}{(1)(0.833)\frac{6390.83}{b}}$$

$b = 37.4\,mm$

Largura mínima das engrenagens com os dados da coroa:

$$CS_{F2} = \frac{S_{t2} Y_N}{Y_\theta Y_Z \sigma_{AGMA}} \geq 1.5$$

$$1.5 = \frac{253.60(1)}{(1)(0.833)\frac{5112.66}{b}}$$

$b = 25.2\,mm$

Prevalecendo como resposta, uma largura mínima necessária de 37.4 mm para as engrenagens.

__Exemplo 1.7__ – Um pinhão de par cilíndrico de dentes retos tem módulo 1.5mm, 17 dentes, ângulo de pressão 20° e transmite 0.25 kW a 400 rpm. Sabendo-se que a largura de face dos dentes é de 18 mm, calcule a tensão de flexão atuante nos dentes do pinhão. Considerar Q_v = 8, um fator de sobrecarga de 1.3, engrenagens de média precisão e uma coroa com 25 dentes.

__Solução__: define-se inicialmente o torque atuante no pinhão e sua correspondente força tangencial (250 W = 0.34 CV):

$$T = 71620\frac{N}{n} = 71620\frac{0.34}{400} = 60.88\, kgf.cm$$

$$d_p = mz = 1.5(17) = 25.5\, mm$$

$$T = F_t\frac{dp_1}{2} \Longrightarrow 60.88 = F_t\frac{2.55}{2} \Longrightarrow F_t = 47.75\, kgf = 468.42\, N$$

Coeficientes para os quais não se tem informações e, consequentemente, devem ser assumidos como iguais à unidade:

$$K_B = 1.00$$

Velocidade tangencial das engrenagens e fator dinâmico:

$$v = \frac{\pi d_p n}{60} = \frac{\pi(0.0255)400}{60} = 0.53\, m/s$$

$$B = 0.25(12 - Q_V)^{2/3} = 0.25(12 - 8)^{2/3} = 0.63$$

$$A = 50 + 56(1 - B) = 50 + 56(1 - 0.63) = 70.72$$

$$K_V = \left(\frac{A + \sqrt{200v}}{A}\right)^B = \left(\frac{70.72 + \sqrt{200(0.53)}}{70.72}\right)^{0.63} = 1.09$$

Fator geométrico (J):

$$J_1 = 0.30$$

Fator de distribuição de carga:

$$K_m = 1.60$$

Fator de tamanho das engrenagens (b = 18 mm = 0.709 in):

$$Y = 0.302$$

$$P = \frac{25.4}{m} = 16.93\, dtes/in$$

$$K_s = 1.192\left(\frac{b\sqrt{Y}}{P}\right)^{0.0525}$$

$$K_s = 1.192\left(\frac{0.709\sqrt{0.302}}{16.93}\right)^{0.0525} = 0.978$$

Tensão AGMA:

$$\sigma_{AGMA} = K_O F_T K_V K_S \frac{1}{bm}\frac{K_m K_B}{J}$$

$$\sigma_{AGMA} = (1.30)468.42(1.09)(0.978)\frac{1}{18(1.5)}\frac{(1.6)}{0.30} = 128.23\ MPa$$

Exemplo 1.8 – Um dispositivo para manobra de portões trabalha com um pinhão de aço endurecido por completo grau 1 (dureza de 200 HB) à 600 rpm, acionando uma coroa de FoFo Classe 20, com uma relação de transmissão de 4. Supor engrenagens de média precisão.

Sendo:	z_1 = 16	b = 100 mm	
	dp_1 = 72 mm		
	acionamento leve e choques moderados		Q_v = 6
	E_1 = 210 GPa	E_2 = 105 GPa	$\nu_1 = \nu_2 = 0.3$
	10^8 ciclos	R(x) = 90%	

Determinar, pelo critério da resistência, a máxima potência que poderá ser transmitida pelo conjunto.

Solução: coeficientes para os quais não se tem informações e, consequentemente, devem ser assumidos como iguais à unidade:

$$K_B = Y_\theta = 1.00$$

Velocidade tangencial das engrenagens e fator dinâmico:

$$v = \frac{\pi d_p n}{60} = \frac{\pi(0.072)600}{60} = 2.26\, m/s$$

$$B = 0.25(12 - Q_V)^{2/3} = 0.25(12-6)^{2/3} = 0.825$$

$$A = 50 + 56(1 - B) = 50 + 56(1 - 0.825) = 59.80$$

$$K_V = \left(\frac{A + \sqrt{200v}}{A}\right)^B = \left(\frac{59.80 + \sqrt{200(2.26)}}{59.80}\right)^{0.825} = 1.285$$

Fator geométrico (J):

$$J_1 = 0.27$$

$$J_2 = 0.41$$

Fator de distribuição de carga:

$$K_m = 1.70$$

Fator de tamanho das engrenagens (b = 100 mm = 3.94 in):

$$d_p = mz \Rightarrow 72 = m(16) \Rightarrow m = 4.5\, mm$$

$$Y_1 = 0.295$$

$$Y_2 \cong 0.358$$

$$P = \frac{25.4}{m} = 5.64\ dtes/in$$

$$K_s = 1.192\left(\frac{b\sqrt{Y}}{P}\right)^{0.0525}$$

$$K_{s1} = 1.192\left(\frac{3.94\sqrt{0.295}}{5.64}\right)^{0.0525} = 1.132$$

$$K_{s2} = 1.192\left(\frac{3.94\sqrt{0.358}}{5.64}\right)^{0.0525} = 1.139$$

Fator de sobrecarga (acionamento leve e choques moderados):

$$K_o = 1.50$$

Tensões AGMA:

$$\sigma_{AGMA} = K_O F_T K_V K_S \frac{1}{bm}\frac{K_m K_B}{J}$$

$$\sigma_{AGMA1} = (1.50)F_T(1.285)(1.132)\frac{1}{100(4.5)}\frac{(1.7)}{0.27} = 0.031F_T$$

$$\sigma_{AGMA2} = (1.50)F_T(1.285)(1.139)\frac{1}{100(4.5)}\frac{(1.7)}{0.41} = 0.020F_T$$

Tensões admissíveis de flexão AGMA:

$$S_{t1} = 0.533\ HB + 88.3 = 0.533(200) + 88.3 = 194.90\ MPa$$

$$S_{t2} = 5000\ psi = 34.47\ MPa$$

Fator de confiabilidade:

$$Y_Z = 0.658 - 0.0759\ln(1 - R)$$

$$Y_Z = 0.658 - 0.0759\ln(1 - 0.9) = 0.833$$

Fator de ciclos (para o caso da coroa, considera-se a relação de transmissão sobre o número de ciclos previsto em projeto):

$$Y_{N1} = 1.3558N^{-0.0178} = 1.3558(10^8)^{-0.0178} = 0.977$$

$$Y_{N2} = 1.3558N^{-0.0178} = 1.3558(\frac{10^8}{4})^{-0.0178} = 1.001$$

Força tangencial limite com os dados do pinhão:

$$CS_{F1} = \frac{S_{t1}Y_N}{Y_\theta Y_Z \sigma_{AGMA}} \geq 1.5$$

$$1.5 = \frac{194.90(0.977)}{(1)(0.833)0.031F_T}$$

$$F_T = 4916\ N$$

Força tangencial limite com os dados da coroa:

$$CS_{F2} = \frac{S_{t2}Y_N}{Y_\theta Y_Z \sigma_{AGMA}} \geq 1.5$$

$$1.5 = \frac{34.47(1.001)}{(1)(0.833)0.020F_T}$$

$$F_T = 1380.73\ N$$

Prevalecendo como resposta, a força tangencial de 1380.73 N. Com esse valor, se torna possível, enfim, definir a potência máxima admissível para o par de engrenagens:

$$T = F_t \frac{dp_1}{2} = \frac{N}{2\pi f}$$

$$1380.73\left(\frac{0.072}{2}\right) = \frac{N}{2\pi\left(\frac{600}{60}\right)}$$

$$N = 3.12\ kW$$

Exemplo 1.9 – *Um par de engrenagens cilíndricas de dentes retos, ângulo de pressão 20º e módulo 6 mm, foi projetado para transmitir 2500 W a 660 rpm. Para um par com 20 e 40 dentes, respectivamente, determinar pelo critério da pressão, o coeficiente de segurança por fadiga por contato. Considerar Q_v = 7, um fator de sobrecarga de 1.25, engrenagens de média precisão e uma expectativa de vida 10^7 ciclos.*

Dados: pinhão e coroa de aço endurecido por completo grau 1 (dureza de 220 HB), E = 200 GPa, $\nu = 0.3$, R(x) = 95%.

Solução: *coeficientes para os quais não se tem informações e, consequentemente, devem ser assumidos como iguais à unidade:*

$K_B = Y_\theta = 1.00$

Diâmetro primitivo do pinhão e largura das engrenagens:

$d_p = mz = 6(20) = 120\,mm$

$8m \le b \le 16m \Rightarrow b = 12m = 12(6) = 72\,mm$

Torque atuante no pinhão e sua correspondente força tangencial:

$$T = \frac{N}{2\pi f} = \frac{2500}{2\pi\left(\frac{660}{60}\right)} = 36.17\,Nm$$

$$T = F_t\frac{dp_1}{2} \Rightarrow 36.17 = F_t\frac{0.12}{2} \Rightarrow F_t = 602.86\,N$$

Velocidade tangencial das engrenagens e fator dinâmico:

$$v = \frac{\pi d_p n}{60} = \frac{\pi(0.12)660}{60} = 4.15\,m/s$$

$$B = 0.25(12 - Q_V)^{2/3} = 0.25(12 - 7)^{2/3} = 0.73$$

$$A = 50 + 56(1 - B) = 50 + 56(1 - 0.73) = 65.12$$

$$K_V = \left(\frac{A + \sqrt{200v}}{A}\right)^B = \left(\frac{65.12 + \sqrt{200(4.15)}}{65.12}\right)^{0.73} = 1.31$$

Fator geométrico (I):

$$I = \frac{cos\alpha\, sen\alpha}{2}\frac{i}{i+1} = \frac{cos20\, sen20}{2}\frac{2}{2+1} = 0.107$$

Fator de distribuição de carga:

$$K_m = 1.70$$

Fator de tamanho das engrenagens (b = 72 mm = 2·83 in):

$$Y_1 = 0.320$$

$$P = \frac{25.4}{m} = 4.23\ dtes/in$$

$$K_s = 1.192\left(\frac{b\sqrt{Y}}{P}\right)^{0.0525}$$

$$K_{s1} = 1.192\left(\frac{2.83\sqrt{0.320}}{4.23}\right)^{0.0525} = 1.133$$

Coeficiente elástico:

$$Cp = 10^{-3}\sqrt{\frac{1}{\pi\left[\frac{(1-\upsilon_1{}^2)}{E_1}+\frac{(1-\upsilon_2{}^2)}{E_2}\right]}}$$

$$Cp = 10^{-3}\sqrt{\frac{1}{\pi\left[\frac{(1-0.3^2)}{200(10^9)}+\frac{(1-0.3^2)}{200(10^9)}\right]}} = 187.03\ MPa$$

Tensão de contato:

$$\sigma_C = Cp\sqrt{K_O F_T K_V K_S \frac{K_m}{bd_{p1}I}}$$

$$\sigma_C = 187.03\sqrt{(1.25)602.86(1.31)(1.133)\frac{1.7}{72(120)0.107}} = 268.22\ MPa$$

Tensão admissível de contato AGMA:

$$S_{c1} = 2.22\ HB + 200 = 2.22(220) + 200 = 688.4\ MPa$$

Fator de confiabilidade:

$$Y_Z = 0.658 - 0.0759\ln(1-R)$$

$$Y_Z = 0.658 - 0.0759\ln(1-0.95) = 0.885$$

Fator de ciclos:

$$Z_{N1} = 1.0$$

Coeficiente de segurança por fadiga de contato:

$$CS_C = \frac{S_C Z_N C_H}{Y_\theta Y_Z \sigma_C} = \frac{688.4(1)(1)}{(1)(0.885)268.22} = 2.90$$