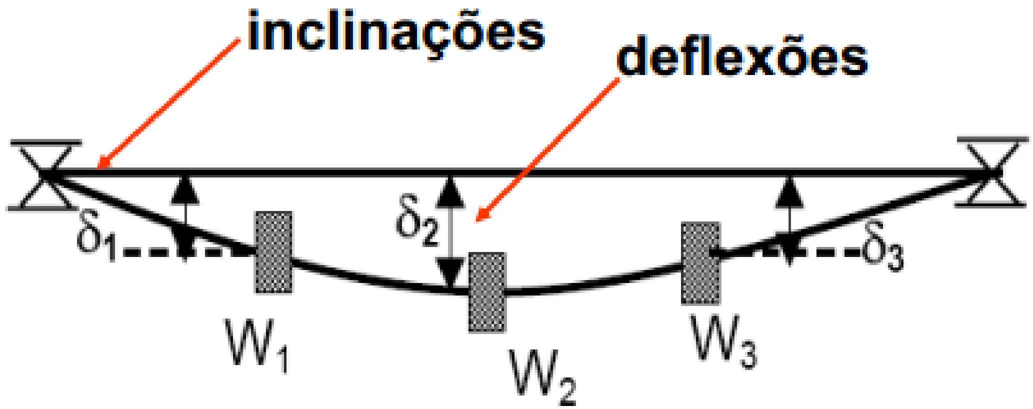
Aula 4

Eixos e árvores

Projeto para eixos: restrições geométricas

- <u>Deflexões e inclinações</u>: a geometria de um eixo corresponde geralmente a um eixo escalonado, sendo que as análises referentes as deflexões e inclinações somente poderão ser realizadas após a definição completa da geometria do eixo;



- A análise da deflexão mesmo em um único ponto requer informações completas de geometria para o eixo inteiro;
- Apenas as dimensões geométricas brutas necessitam ser incluídas, pois fatores locais como ranhuras e chavetas tem pouco impacto na deflexão.

Eixos e árvores

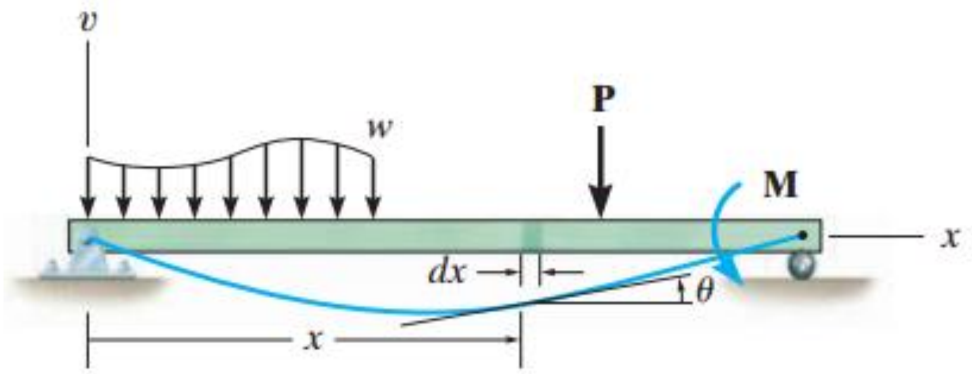
Projeto para eixos: restrições geométricas

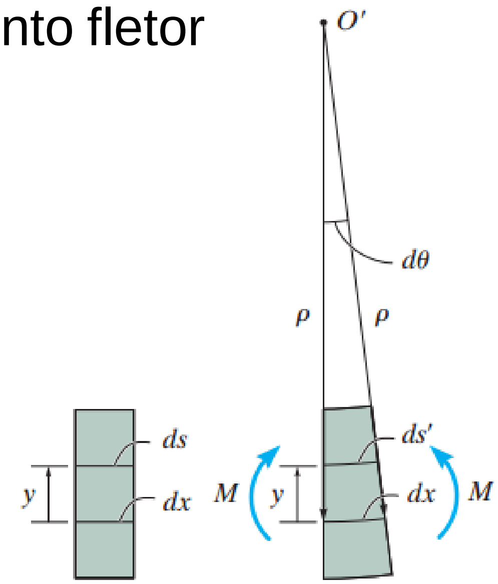
- As deflexões (lineares e angulares) dependem de muitos fatores, normalmente com auxílio de um programa computacional.
- Intervalos típicos para inclinações máximas e deflexões transversais da linha de centro do eixo.

Restrições geométricas x deformações limites

Inclinações	
Rolo cônico	0,0005–0,0012 rad
Rolo cilíndrico	0,0008–0,0012 rad
Esfera de sulco profundo	0,001–0,003 rad
Esfera	0,026–0,052 rad
Esfera autoalinhante	0,026–0,052 rad
Engrenagem reta sem coroa	< 0,00050 rad
Deflexões transversais	
Engrenagens retas com $P < 4$ dentes/cm	0,25 mm
Engrenagens retas com $5 < P < 8$	0,125 mm
Engrenagens retas com $9 < P < 20$	0,075 mm

- Qualquer tipo de carregamento que gere momento fletor interno no eixo, irá gerar também deflexão





- A curvatura de um eixo sujeito a um momento fletor M é dada por:

$$\boxed{\frac{1}{\rho} = \frac{M}{EI}}$$

Eixos e árvores

Projeto de eixos por restrições geométricas

- A linha elástica pode ser descrita como uma variável y = f(x) ao longo do eixo longitudinal da viga:

$$\frac{1}{\rho} = \frac{d^2y/dx^2}{[1+(dy/dx)^2]^{3/2}} \text{, onde} \quad \theta = \frac{dy}{dx}$$

- Simplificações para pequenas deflexões – dy/dx é insignificante em relação à unidade

$$\frac{1}{\rho} = \frac{d^2y}{dx^2} \Rightarrow \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{M}{EI}$$

- Cuja integração permite escrever: $\boxed{\frac{dy}{dx} = \theta = \frac{1}{EI}\int M}$

Eixos e árvores

Projeto de eixos por restrições geométricas

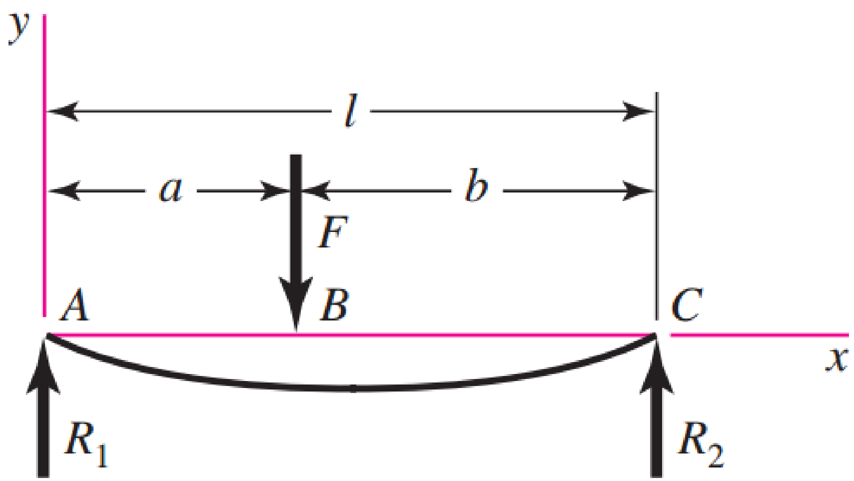
- A segunda integração descreve a deflexão transversal y do eixo:

$$\boxed{y(x) = \frac{1}{EI} \int \int M(x)dx}$$

- Podemos obter um diâmetro preliminar do eixo: impondo as condições de contorno do problema (dados do problema) e substituindo o momento de inércia de uma seção circular em termos do diâmetro:

$$I = \frac{\pi d^4}{64}$$

Caso mais comum de carregamento: **força concentrada**



$$R_1 = \frac{Fb}{l} \qquad R_2 = \frac{Fa}{l}$$

$$V_{AB} = R_1$$

$$V_{BC} = -R_2$$

$$M_{AB} = \frac{Fbx}{l}$$

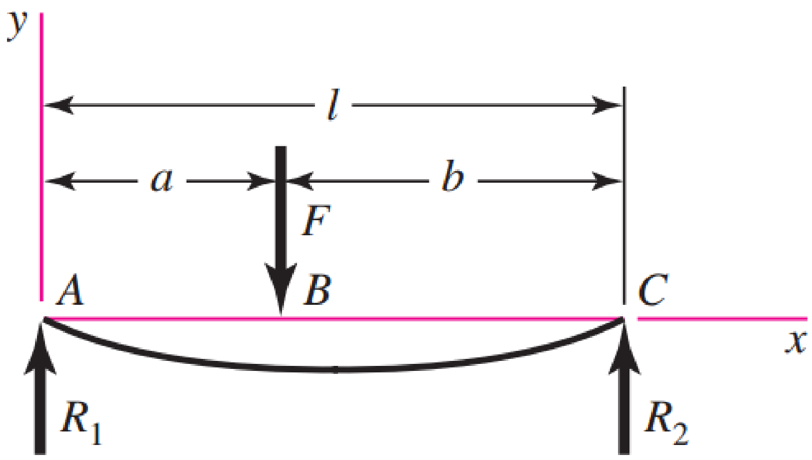
$$M_{BC} = \frac{Fa}{l}(l - x)$$

$$\boxed{\frac{dy}{dx} = \theta = \frac{1}{EI}\int M}$$

Eixos e árvores

Projeto de eixos por restrições geométricas

Caso mais comum de carregamento: **força concentrada**



$$\boxed{y(x) = \frac{1}{EI}\int\int M(x)dx}$$

$$y_{AB} = \frac{Fbx}{6EIl}(x^2 + b^2 - l^2)$$

$$y_{BC} = \frac{Fa(l - x)}{6EIl}(x^2 + a^2 - 2lx)$$

Condições de contorno:

$$x = 0 \Rightarrow y(0) = 0$$

$$x = L \Rightarrow y(L) = 0$$

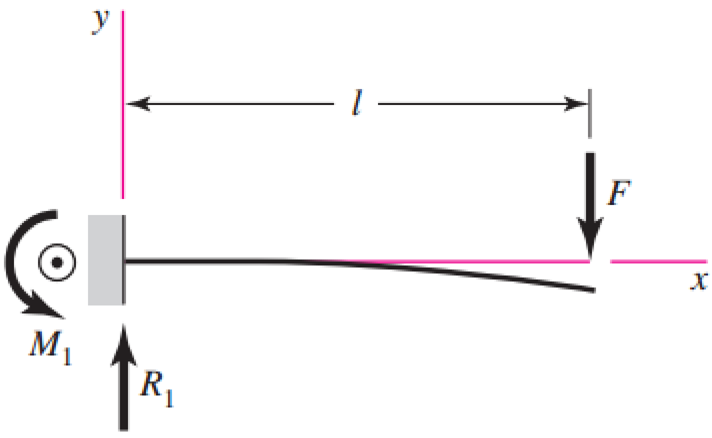
$$x = a \Rightarrow y_{AB}(a) = y_{BC}(0)$$

$$x = a \Rightarrow \theta_{AB}(a) = \theta_{BC}(0)$$

ou

$$x = a \Rightarrow \left(\frac{dy}{dx}\right)_{AB}(a) = \left(\frac{dy}{dx}\right)_{BC}(0)$$

Outros casos de carregamento

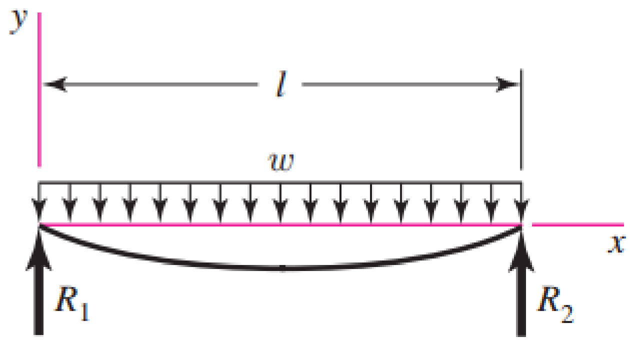


$$R_1 = V = F \qquad M_1 = Fl$$

$$M = F(x - l)$$

$$y = \frac{Fx^2}{6EI}(x - 3l)$$

$$y_{max} = -\frac{Fl^3}{3EI}$$



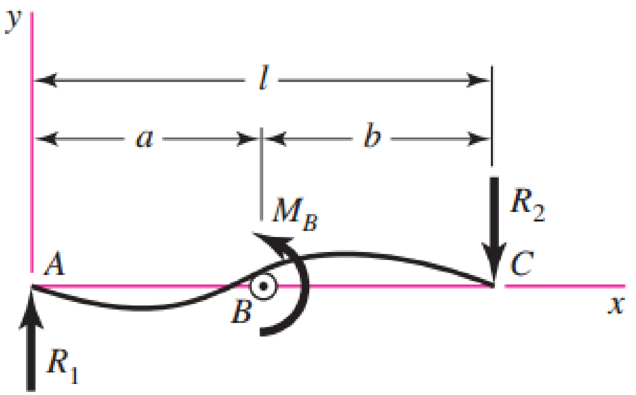
$$R_1 = R_2 = \frac{wl}{2} \qquad V = \frac{wl}{2} - wx$$

$$M = \frac{wx}{2}(l - x)$$

$$y = \frac{wx}{24EI}(2lx^2 - x^3 - l^3)$$

$$y_{max} = -\frac{5wl^4}{384EI}$$

Outros casos de carregamento

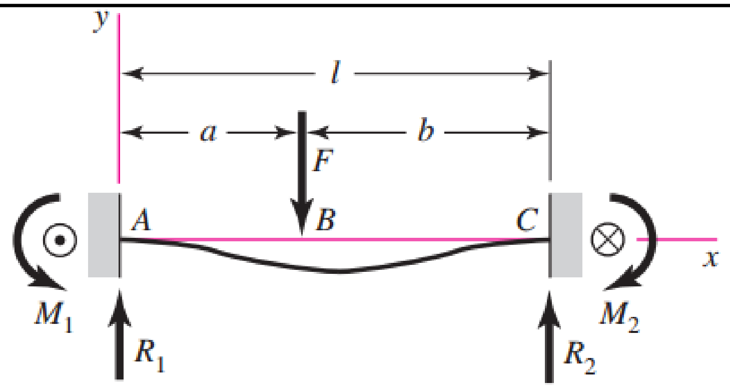


$$R_1 = R_2 = \frac{M_B}{l} \qquad V = \frac{M_B}{l}$$

$$M_{AB} = \frac{M_B x}{l} \qquad M_{BC} = \frac{M_B}{l}(x - l)$$

$$y_{AB} = \frac{M_B x}{6EIl}(x^2 + 3a^2 - 6al + 2l^2)$$

$$y_{BC} = \frac{M_B}{6EIl}[x^3 - 3lx^2 + x(2l^2 + 3a^2) - 3a^2 l]$$



$$R_1 = \frac{Fb^2}{l^3}(3a + b) \qquad R_2 = \frac{Fa^2}{l^3}(3b + a)$$

$$M_1 = \frac{Fab^2}{l^2} \qquad M_2 = \frac{Fa^2 b}{l^2}$$

$$V_{AB} = R_1 \qquad V_{BC} = -R_2$$

$$M_{AB} = \frac{Fb^2}{l^3}[x(3a + b) - al]$$

$$M_{BC} = M_{AB} - F(x - a)$$

$$y_{AB} = \frac{Fb^2 x^2}{6EIl^3}[x(3a + b) - 3al]$$

$$y_{BC} = \frac{Fa^2(l - x)^2}{6EIl^3}[(l - x)(3b + a) - 3bl]$$

Eixos e árvores

Projeto de eixos por restrições geométricas

Alguns dos métodos populares: para relacionar o momento fletor **M**, a inclinação **\theta** e a deflexão transversal **y** são:

- **Superposição dos efeitos;**
- Método do momento-área
- Funções de singularidade;
- Integração numérica.

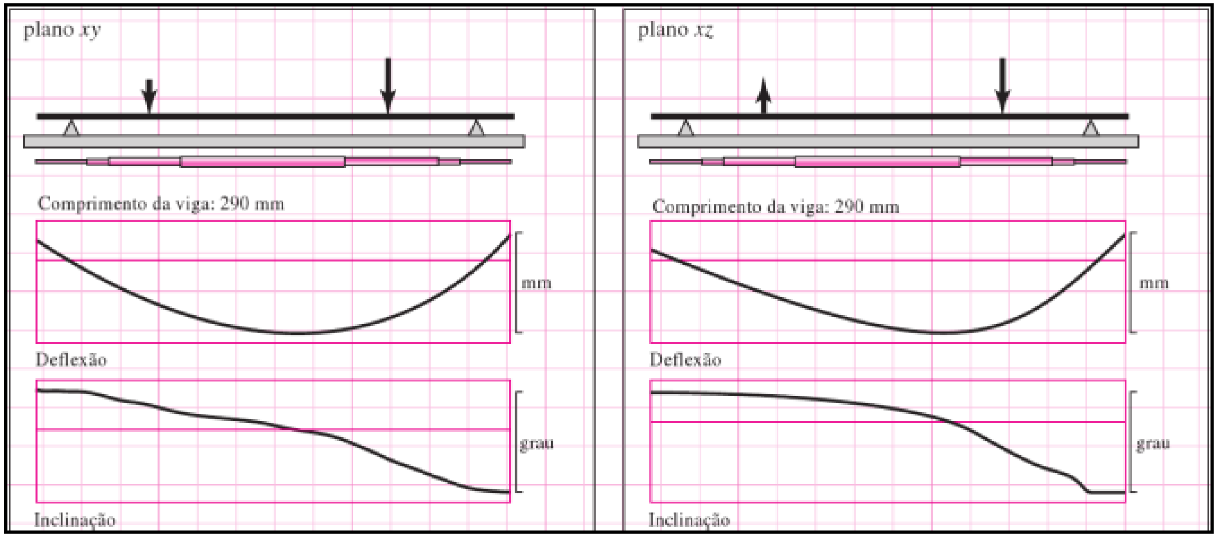
Uma vez que as deflexões em vários pontos forem conhecidas (eixo escalonado), se acontecer de a deflexão for maior do que a deflexão permissível (dado de projeto), um novo diâmetro deve ser encontrado

$$\boxed{d_{novo} = d_{velho}\left[\frac{n\, y_{velho}}{y_{lim}}\right]^{\frac{1}{4}}}$$

$$\boxed{d_{novo} = d_{velho}\left[\frac{n\, \theta_{velho}}{\theta_{lim}}\right]^{\frac{1}{4}}}$$

Eixos e árvores

Projeto de eixos por restrições geométricas



Caso a inclinação seja maior que a permitida:

Ponto de interesse	Plano xz	Plano xy	Total
Inclinação do mancal esquerdo	0,02263 grau	0,01770 grau	0,02872 grau
			0,000501 rad
Inclinação do mancal direito	0,05711 grau	0,02599 grau	0,06274 grau
			0,001095 rad

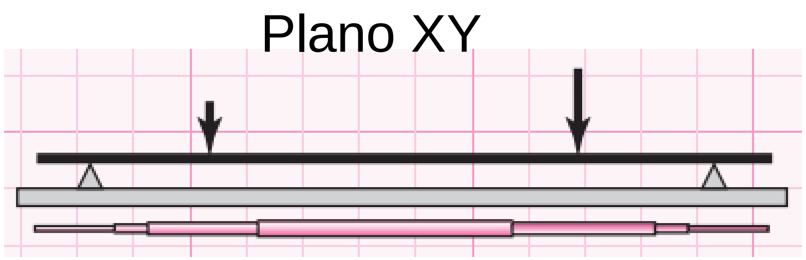
$$\theta = \sqrt{\theta_{xy}^2 + \theta_{xz}^2}$$

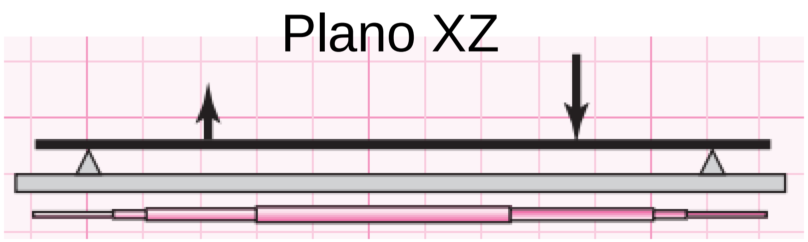
Inclinações	
Rolo cônico	0,0005–0,0012 rad
Rolo cilíndrico	0,0008–0,0012 rad
Esfera de sulco profundo	0,001–0,003 rad
Esfera	0,026–0,052 rad
Esfera autoalinhante	0,026–0,052 rad

$$d_{novo} = d_{velho} \left[\frac{n \, y_{velho}}{y_{lim}} \right]^{\frac{1}{4}}$$

$$d_{novo} = d_{velho} \left[\frac{n \, \theta_{velho}}{\theta_{lim}} \right]^{\frac{1}{4}}$$

- As deflexões e inclinações nos pontos de interesse devem ser combinadas com adição de vetores ortogonais (valor resultante):





$$y = \sqrt{y_{xy}^2 + y_{xz}^2}$$

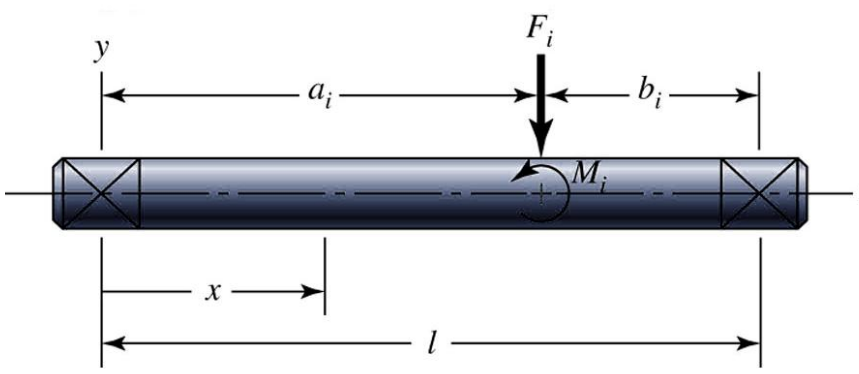
$$\theta = \sqrt{\theta_{xy}^2 + \theta_{xz}^2}$$

- Caso algum diâmetro necessite ser alterado, deve-se encontrar **a maior** razão [d_{novo} / d_{velho}] e multiplicar todos os diâmetros por esta razão;

Princípio da superposição dos efeitos

O princípio da superposição dos efeitos considera os carregamentos aplicados sobre o eixo individualmente e somando os resultados algebricamente. A sobreposição pode ser aplicada desde que:

- Cada efeito esteja relacionado linearmente com a carga;
- A carga não crie uma condição que afeta outra carga;
- As deformações resultantes de qualquer carga específica não sejam grandes o suficiente para alterar as relações geométricas do eixo



$$y_{AB} = \frac{F_i\ b_i x}{6EIL}\left(x^2 + b_i^2 - L^2\right) + \frac{M_i\ x}{6EIL}\left(x^2 + 3a_i^2 - 6a_i L + 2L^2\right)$$

Eixos e árvores

Projeto de eixos por restrições geométricas

Para força concentrada - Diferenciando a expressão da deflexão e impondo a condição de contorno no **mancal da esquerda** (x = 0)

$$\boxed{y_{AB} = \frac{F_i\ b_i x}{6EIL}\left(x^2 + b_i^2 - L^2\right)}$$

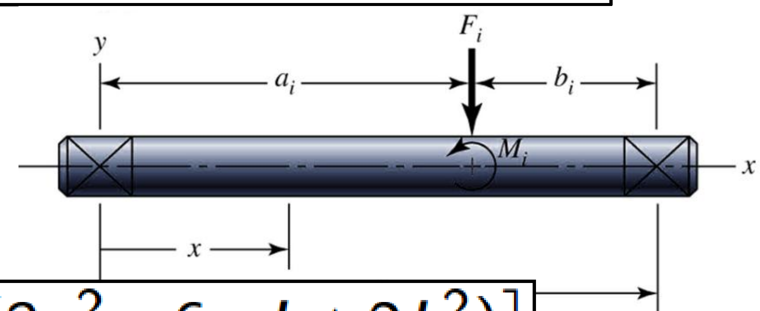
$$\boxed{\theta_A = \frac{F_i\ b_i}{6EIL}\left(b_i^2 - L^2\right)}$$

Substituindo o momento de inércia de área, e incluindo um fator de segurança **n**, obtém-se:

$$\boxed{d = \left[\frac{32n}{3EL\pi\theta_{lim}}\ F_i b_i\left(b_i^2 - L^2\right)\right]^{\frac{1}{4}}}$$

Para forças e momentos concentrados - Diferenciando a expressão da deflexão e impondo a condição de contorno no **mancal da esquerda** (x = 0)

$$y_{AB} = \frac{F_i\ b_i x}{6EIL}(x^2 + b_i^2 - L^2) + \frac{M_i\ x}{6EIL}(x^2 + 3a_i^2 - 6a_i L + 2L^2)$$



$$\theta_A = \frac{1}{6EIL}\sum\left[F_i\ b_i(b_i^2 - L^2) + M_i(3a_i^2 - 6a_i L + 2L^2)\right]$$

Substituindo o momento de inércia de área, e incluindo um fator de segunrança **n**, obtém-se:

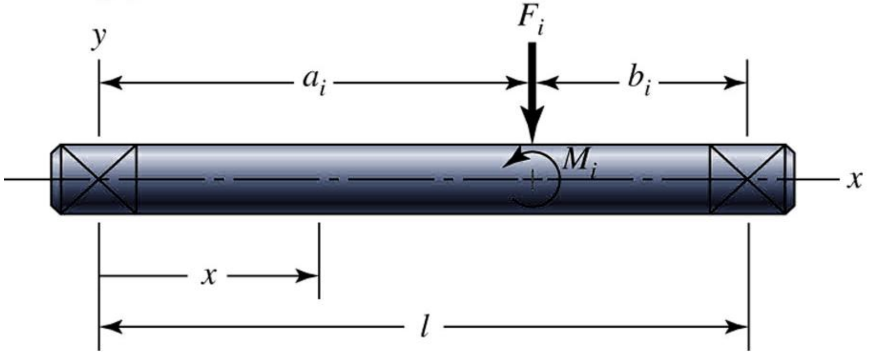
$$d = \left[\frac{32n}{3EL\pi\theta_{lim}}\left[F_i b_i(b_i^2 - L^2) + M_i(3a_i^2 - 6a_i L + 2L^2)\right]\right]^{\frac{1}{4}}$$

Eixos e árvores

Projeto de eixos por restrições geométricas

Para "i" forças e "i " momentos concentrados - Considerando o plano xy como o plano vertical V e o plano xz como o plano horizontal H, para carregamento em ambos os planos, os resultados podem ser adicionados como vetores, de modo a prover:

$$\theta_A = \frac{1}{6EI\,L}\left\{\begin{bmatrix} \sum\left[F_i.b_i(b_i^{\,2}-L^2)+M_i(3a_i^{\,2}-6a_iL+2L^2)\right]_H^2 + \\ \sum\left[F_i.b_i(b_i^{\,2}-L^2)+M_i(3a_i^{\,2}-6a_iL+2L^2)\right]_V^2 \end{bmatrix}\right\}^{\frac{1}{2}}$$



Para “i” forças e “i ” momentos concentrados

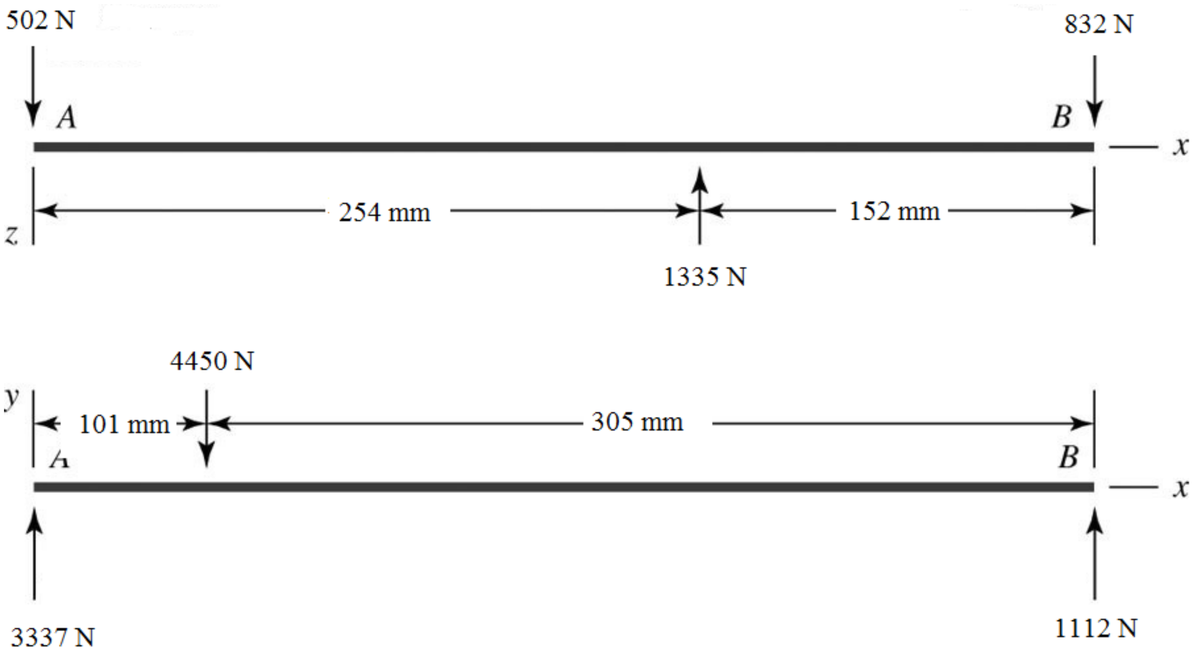
Para restrição de inclinação do mancal esquerdo:

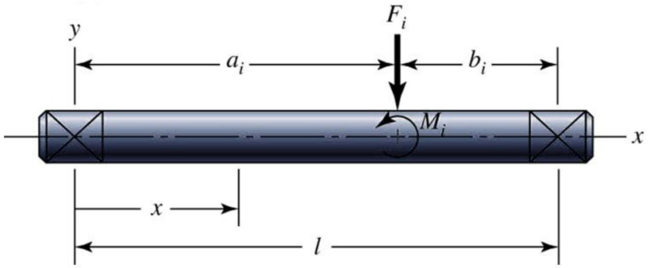
$$d = \left(\frac{32.n}{3E.L.\pi.\theta_{LIM}} \left\{ \begin{array}{l} \left[\sum F_i.b_i(b_i^{\ 2} - L^2) + \sum M_i(3a_i^{\ 2} - 6a_i L + 2L^2)\right]_H^2 + \\ \left[\sum F_i.b_i(b_i^{\ 2} - L^2) + \sum M_i(3a_i^{\ 2} - 6a_i L + 2L^2)\right]_V^2 \end{array} \right\}^{\frac{1}{2}} \right)^{1/4}$$

Para restrição de inclinação do mancal direito:

$$d = \left(\frac{32.n}{3E.L.\pi.\theta_{LIM}} \left\{ \begin{array}{l} \left[\sum F_i.a_i(L^2 - a_i^2) + \sum M_i(3a_i^{\ 2} - L^2)\right]_H^2 + \\ \left[\sum F_i.a_i(L^2 - a_i^{\ 2}) + \sum M_i(3a_i^{\ 2} - L^2)\right]_V^2 \end{array} \right\}^{\frac{1}{2}} \right)^{1/4}$$

Exemplo 1.6 - O eixo de aço ilustrado carrega duas engrenagens retas e dispõe de carregamento como mostrado. Os mancais localizados em A e B são mancais de rolos cilíndricos. A inclinação espacial de linha de centro nos mancais está limitada a 0,001 rad, com um fator de projeto de 1,5. Estime o diâmetro de um eixo uniforme que satisfaça às restrições de inclinação impostas pelos mancais.





Eixos e árvores

Projeto de eixos por restrições geométricas

<u>Para restrição de inclinação do mancal esquerdo:</u>

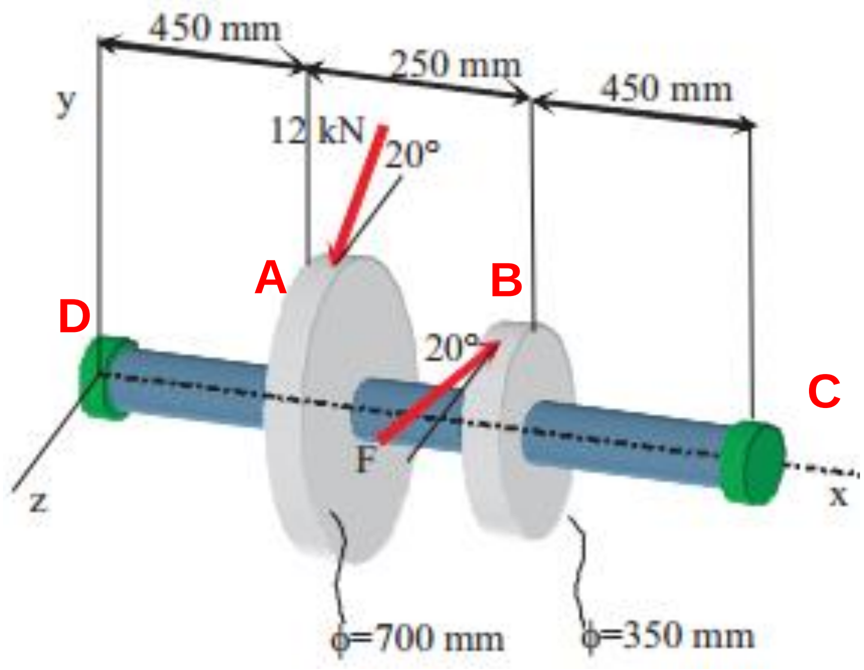
$$\boxed{d = \left(\frac{32.n}{3E.L.\pi.\theta_{LIM}} \left\{ \begin{matrix} \left[\sum F_i.b_i(b_i^{\,2} - L^2) + \cancel{\sum M_i(3a_i^{\,2} - 6a_iL + 2L^2)} \right]_H^2 + \\ \left[\sum F_i.b_i(b_i^{\,2} - L^2) + \cancel{\sum M_i(3a_i^{\,2} - 6a_iL + 2L^2)} \right]_V^2 \end{matrix} \right\}^{\frac{1}{2}} \right)^{1/4}}$$

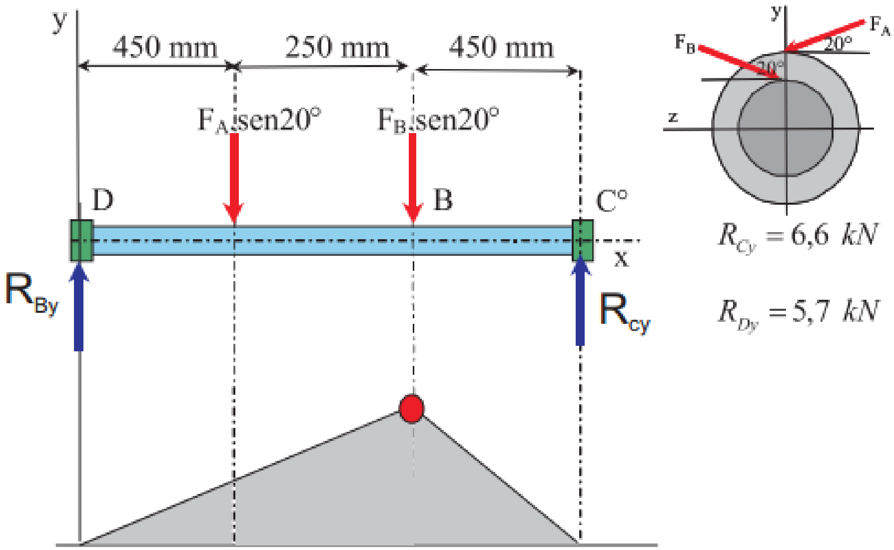
$$\boxed{d = \left(\frac{32.(1,5)}{3(21\cdot 10^9\,Pa).(0,406\mathrm{m}).\pi.(0,001rd)} \left\{ \begin{matrix} \left[\sum 1335.(0,152)(0,152^2 - 0,406^2) \right]_H^2 + \\ \left[\sum 4450.0,305(0,305^2 - 0,406^2) \right]_V^2 \end{matrix} \right\}^{\frac{1}{2}} \right)^{1/4}}$$

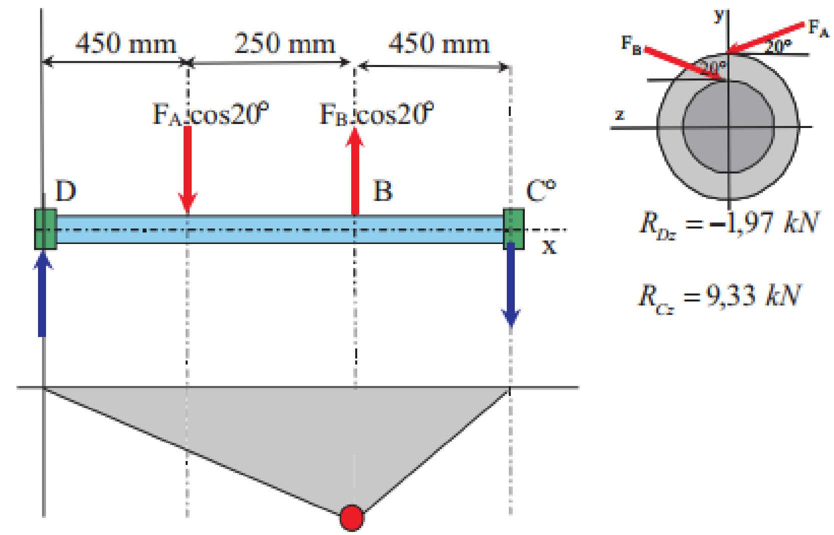
$$d = 8.827 \times 10^{-2}\ \mathrm{m}$$

$$d = 88.3\ \mathrm{mm}$$

Exemplo 1.7 – Considere um eixo com diâmetro uniforme de 100mm. Verifique se as inclinações nos mancais são aceitáveis, considerando o carregamento conforme dado abaixo e mancais de rolo cilíndrico em D e C. Se necessário, proponha mudanças na geometria para resolver quaisquer problemas.







Plano XY

$$F_A \cdot sen\ 20^o = 4,1 \ \ \text{kN}$$
$$F_B \cdot sen\ 20^o = 8,2 \ \ \text{kN}$$

Plano ZX

$$F_A \cdot cos\ 20^o = 11,3 \ \ \text{kN}$$
$$F_B \cdot cos\ 20^o = 22,6 \ \ \text{kN}$$

Eixos e árvores

Projeto de eixos por restrições geométricas

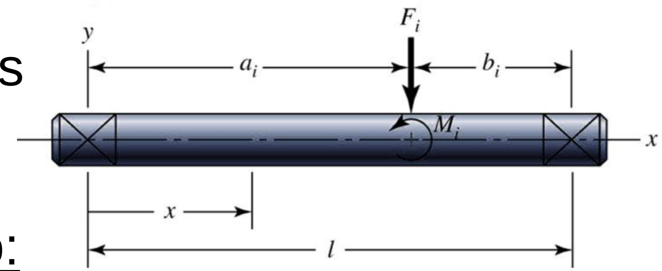
Limites de inclinação para mancais de rolo cinlíndrico

Inclinações	
Rolo cônico	0,0005–0,0012 rad
Rolo cilíndrico	0,0008–0,0012 rad
Esfera de sulco profundo	0,001–0,003 rad
Esfera	0,026–0,052 rad
Esfera autoalinhante	0,026–0,052 rad
Engrenagem reta sem coroa	< 0,00050 rad
Deflexões transversais	
Engrenagens retas com $P < 4$ dentes/cm	0,25 mm
Engrenagens retas com $5 < P < 8$	0,125 mm
Engrenagens retas com $9 < P < 20$	0,075 mm

Eixos e árvores

Projeto de eixos por restrições geométricas

- Como a deflexão nos mancais é nula, estimamos o diâmetro baseado nos limites de inclinação



Para restrição de inclinação do mancal esquerdo:

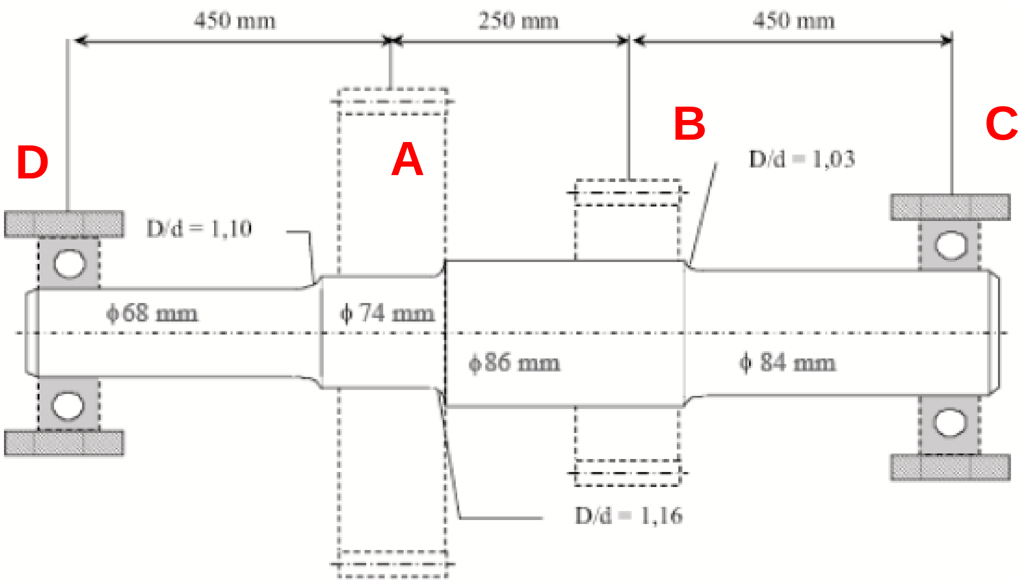
$$d = \left(\frac{32.n}{3E.L.\pi.\theta_{LIM}} \left\{ \left[\sum F_i.b_i(b_i^2 - l^2) + \cancel{\sum M_i(3a_i^2 - 6a_i l + 2l^2)} \right]_H^2 + \left[\sum F_i.b_i(b_i^2 - l^2) + \cancel{\sum M_i(3a_i^2 - 6a_i l + 2l^2)} \right]_V^2 \right\}^{\frac{1}{2}} \right)^{1/4}$$

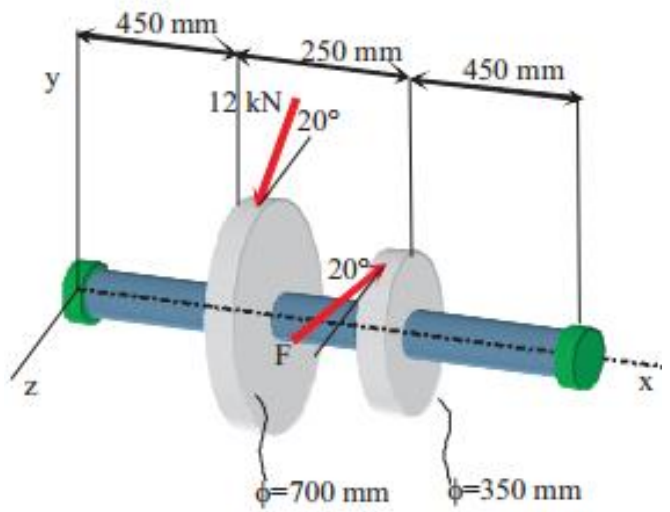
radianos

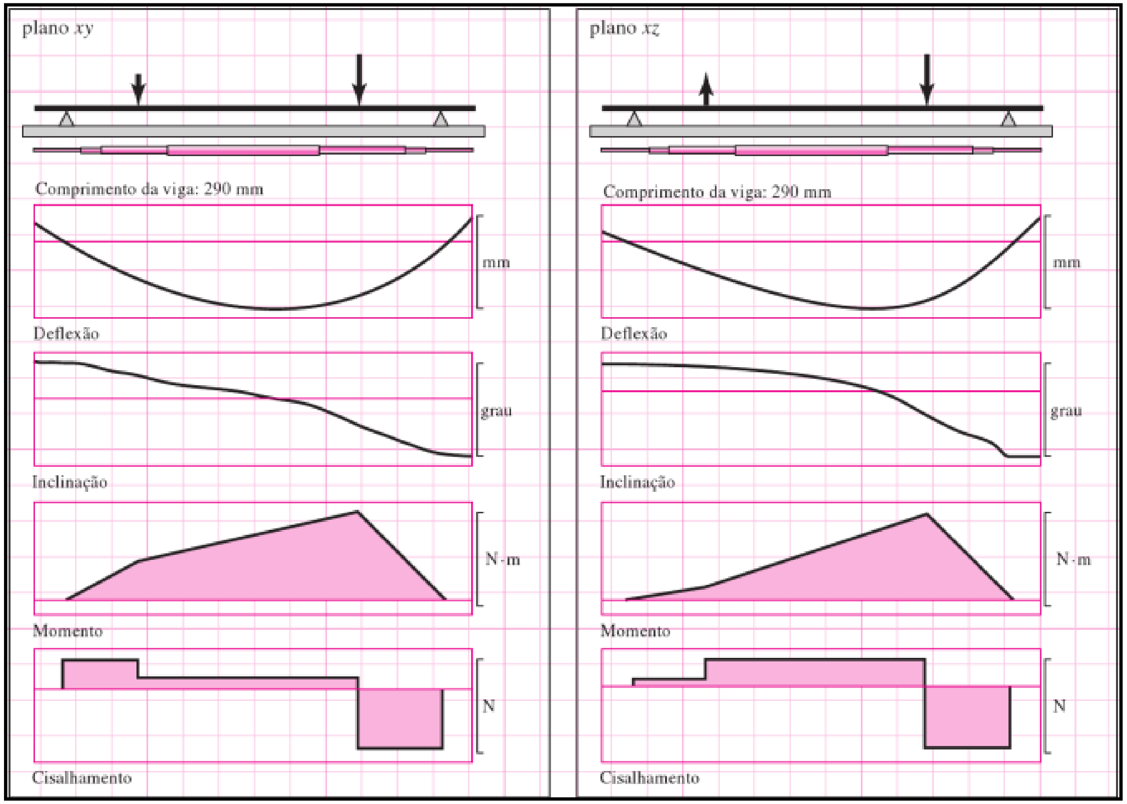
Para restrição de inclinação do mancal direito:

$$d = \left(\frac{32.n}{3E.L.\pi.\theta_{LIM}} \left\{ \left[\sum F_i.a_i(L^2 - a_i^2) + \cancel{\sum M_i(3a_i^2 - L^2)} \right]_H^2 + \left[\sum F_i.a_i(L^2 - a_i^2) + \cancel{\sum M_i(3a_i^2 - L^2)} \right]_V^2 \right\}^{\frac{1}{2}} \right)^{1/4}$$

Exemplo 1.8 (continuação do ex. 1.4) – No exemplo 1.4, uma geometria preliminar de eixo foi obtida na base do projeto por tensão, considerando critérios de fadiga. Verifique se as inclinações nos mancais são aceitáveis. Se necessário, proponha mudanças na geometria para resolver quaisquer problemas. Considere um fator de projeto de 1,5.







Ponto de interesse	Plano xz	Plano xy	Total
Inclinação do mancal esquerdo	0,02263 grau	0,01770 grau	0,02872 grau
			0,000501 rad
Inclinação do mancal direito	0,05711 grau	0,02599 grau	0,06274 grau
			0,001095 rad

Inclinações	
Rolo cônico	0,0005–0,0012 rad

Caso a inclinação seja maior que a permitida:

$$\boxed{\theta = \sqrt{\theta_{xy}^2 + \theta_{xz}^2}}$$

$$\boxed{d_{novo} = d_{velho} \left[\frac{n\, \theta_{velho}}{\theta_{lim}} \right]^{\frac{1}{4}}}$$

Caso algum diâmetro necessite ser alterado, deve-se encontrar **a maior** razão [d_{novo} / d_{velho}] e multiplicar todos os diâmetros por esta razão;