

MOLAS

Prof. Alexandre Augusto Pescador Sardá

INTRODUÇÃO

- **MOLAS:**
 - Exibem flexibilidade ao grau buscado pelo projetista,
 - Permitem aplicação controlada de força ou torque;
 - Armazenamento e liberação de energia.
-
- A flexibilidade pode ser linear ou não-linear ao relacionar a deflexão à carga.

INTRODUÇÃO

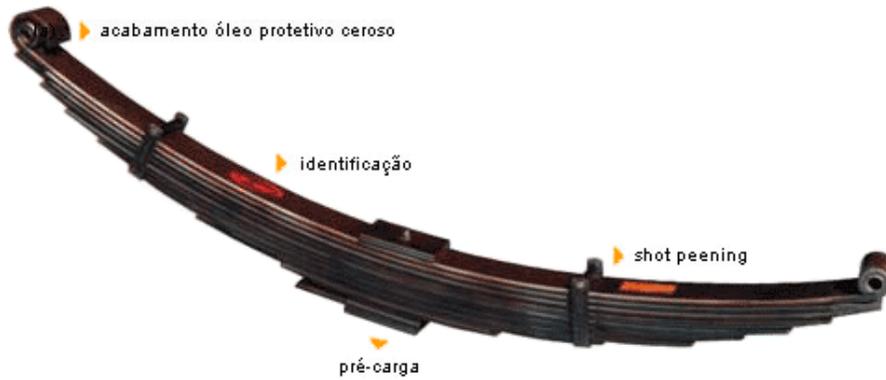


Molas de suspensão

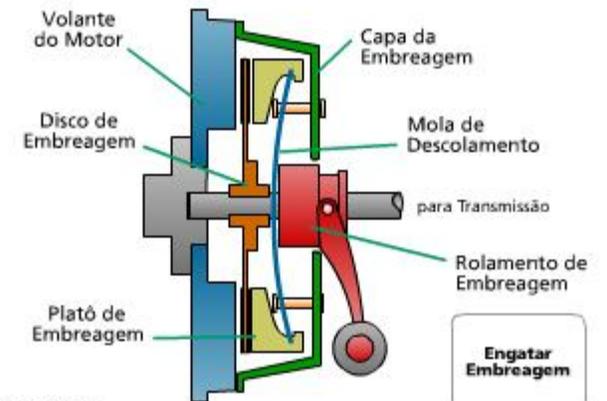


Abraçadeira de pressão

INTRODUÇÃO



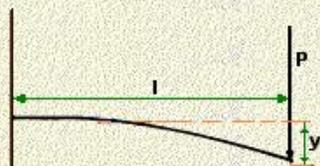
Diafragma da Embreagem



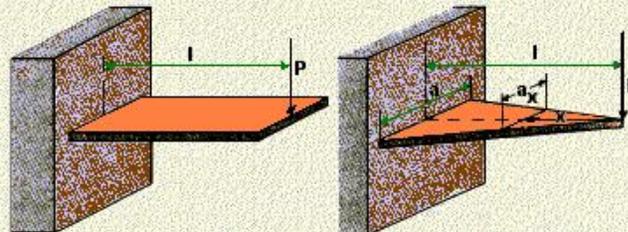
©2000 How Stuff Works

Como uma embreagem engata e solta

www.feitadeciencias.com.br



Mola de fricção: P carga; y flecha l comprimento da mola.



Mola de lâmina engastada e espessura constante: P carga; a largura do encaixe; a_x largura variável na distância x do pto de aplicação.

CLASSIFICAÇÃO

- **MOLAS:**

- Molas de fio (arame):

- Helicoidais de fio redondo e quadrado;

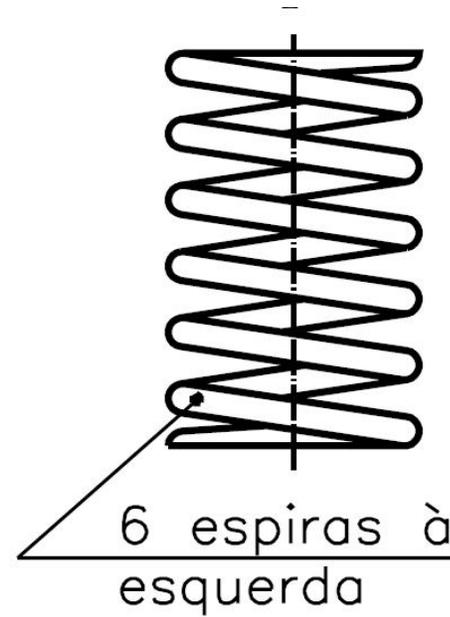
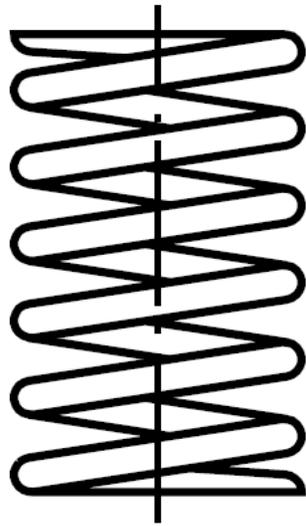
- Molas planas:

- Viga em balanço e elípticos;
- Arruelas de mola plana (Belleville);

- Formato especial

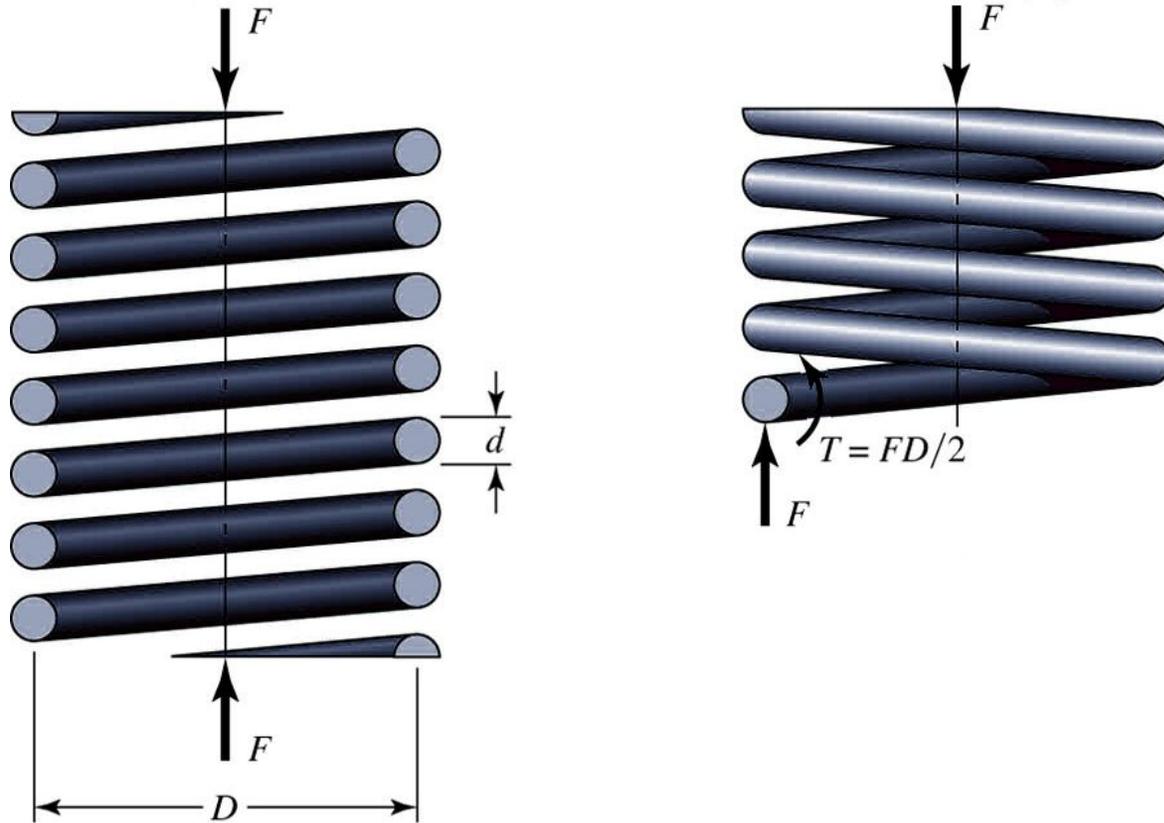
CLASSIFICAÇÃO

mola
helicoidal à
direita



mola helicoidal
à esquerda

TENSÕES EM MOLAS HELICOIDAIS



Mola helicoidal de compressão de fio redondo carregada pela força axial F .

TENSÕES EM MOLAS HELICOIDAIS

A tensão máxima que ocorre no fio, na fibra interna da mola, pode ser computada pela superposição da tensão de cisalhamento direto dada pela equação:

$$\tau_{\max} = \frac{T r}{J} + \frac{F}{A}$$

A substituição de

$$\tau_{\max} = \tau$$

$$T = \frac{F D}{2}$$

$$r = \frac{d}{2}$$

$$J = \frac{\pi d^4}{32}$$

$$A = \frac{\pi d^2}{4}$$

$$\tau = \frac{8 F D}{\pi d^3} + \frac{4 F}{\pi d^2}$$

TENSÕES EM MOLAS HELICOIDAIS

Define-se o **índice de mola**, o qual é uma medida de curvatura da espiral.

$$C = \frac{D}{d}$$

Assim:

$$\tau = K_s \frac{8 F D}{\pi d^3}$$

Onde K_s é um fator de correção de tensão de cisalhamento e é definido por:

$$K_s = \frac{2C + 1}{2C}$$

C varia de 6 a 12 para a maioria das molas.

EFEITO DE CURVATURA

- Equação anterior baseia-se no fato do fio ser reto.
- Curvatura do fio aumenta a tensão no lado interno da mola, mas a diminui ligeiramente no lado externo.

$$K_W = \frac{4C - 1}{4C - 4} + \frac{0,615}{C}$$

Fator de Wahl

$$K_B = \frac{4C + 2}{4C - 3}$$

Fator de Bergsträsser

- Resultados das duas equações diferem em menos de 1%;
- Preferível a segunda equação.

$$\tau = K_B \frac{(8 F D)}{\pi d^3}$$

Maior tensão de cisalhamento

DEFLEXÃO DE MOLAS HELICOIDAIS

- As relações de deflexão-força são obtidas através do teorema de Castigliano.
- A energia total de deformação para uma mola helicoidal é composta de uma componente de torção e uma componente de cisalhamento (Eqs. 5.16 e 5.17).

$$U = \frac{T^2 l}{2GJ} + \frac{F^2 l}{2AG}$$

Substituindo-se:

$$T = \frac{FD}{2}$$

$$l = \pi DN$$

$$J = \frac{\pi d^4}{32}$$

$$A = \frac{\pi d^2}{4}$$

$$U = \frac{4F^2 D^3 N}{d^4 G} + \frac{2F^2 DN}{d^2 G}$$

Onde $N=N_a$ é o número de espiras ativas.

DEFLEXÃO DE MOLAS HELICOIDAIS

Utilizando-se o teorema de Castigliano:

$$y = \frac{\partial U}{\partial F} = \frac{8FD^3 N}{d^4 G} + \frac{4FDN}{d^2 G}$$

Visto que $C=D/d$:

$$y = \frac{8FD^3 N}{d^4 G} \left(1 + \frac{1}{2C^2} \right)$$

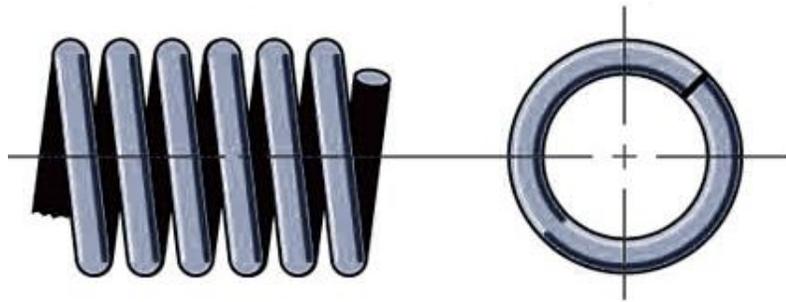
$$y = \frac{8FD^3 N}{d^4 G}$$

A razão de mola é $k = F/y$, assim:

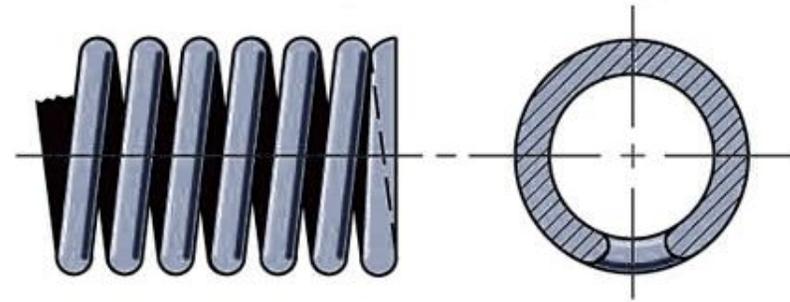
$$k = \frac{d^4 G}{8D^3 N}$$

MOLAS DE COMPRESSÃO

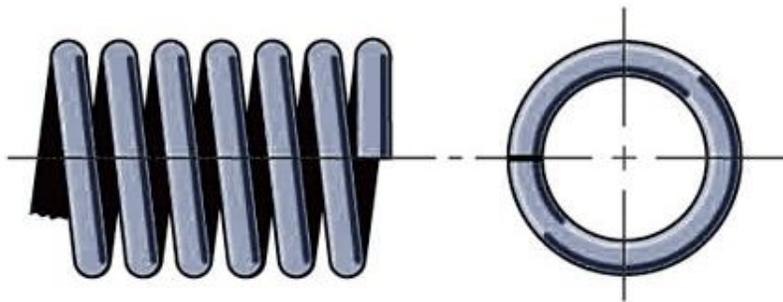
Quatro tipos de extremidades geralmente usados.



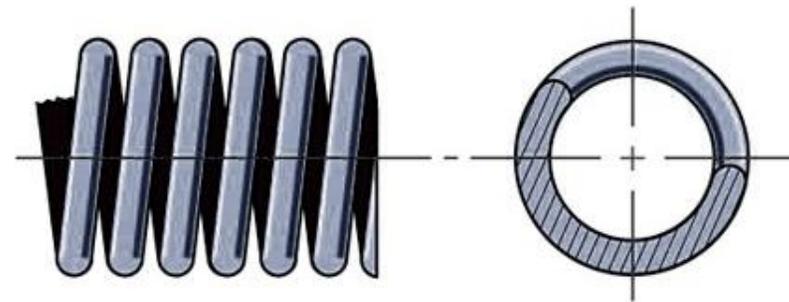
a) Extremidade plana, direita



c) Extremidade esquadrada e esmerilhada, esquerda



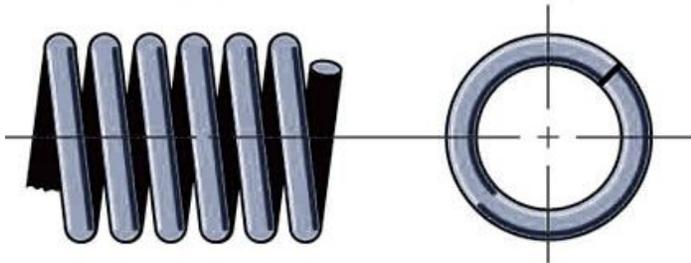
b) Extremidade esquadrada ou fechada, direita



d) Extremidade plana, esmerilhada, esquerda

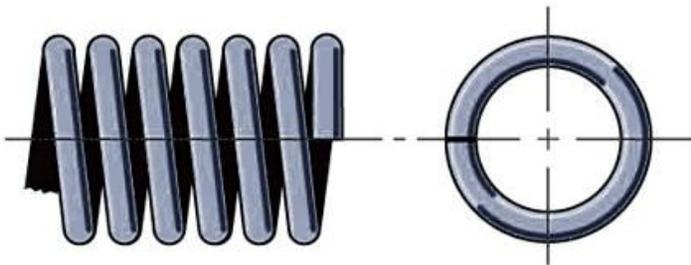
MOLAS DE COMPRESSÃO

Quatro tipos de extremidades geralmente usados.



a) Extremidade plana, direita

Uma mola de extremidades planas tem um helicóide ininterrupto; as extremidades são as mesmas como se uma mola longa tivesse sido cortada em secções.

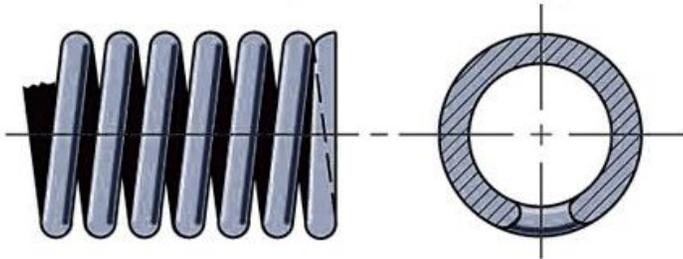


b) Extremidade esquadrada ou fechada, direita

Uma mola de extremidades planas que são esquadradas ou fechadas é obtida ao deformar-se as extremidades a um ângulo de hélice de grau zero.

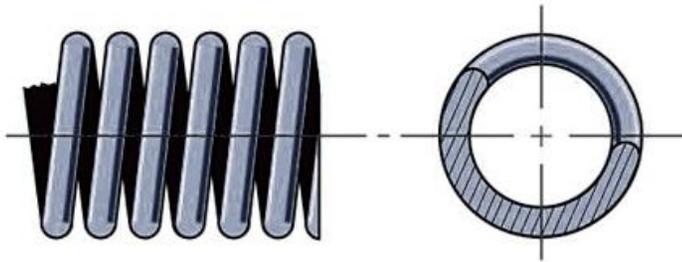
MOLAS DE COMPRESSÃO

Quatro tipos de extremidades geralmente usados.



c) Extremidade esquadrada e esmerilhada, esquerda

As molas devem sempre ser esquadradas e esmerilhadas para aplicações importantes, porque uma melhor transferência de carga é obtida.



d) Extremidade plana, esmerilhada, esquerda

MOLAS DE COMPRESSÃO

A tabela a seguir mostra como o tipo de extremidade usado afeta o número de espiras e o comprimento de mola. Quatro tipos de extremidades geralmente usados.

Fórmulas para dimensões de mola de compressão (N_a = número de espiras ativas)

Termo	Tipos de Extremidades de Mola			
	Plana	Plana e esmerilhada	Esquadrada ou fechada	Esquadrada e esmerilhada
Espiras de extremidade, N_e	0	1	2	2
Espiras totais, N_t	N_a	$N_a + 1$	$N_a + 2$	$N_a + 2$
Comprimento livre, L_0	$pN_a + d$	$p(N_a + 1)$	$pN_a + 3d$	$pN_a + 2d$
Comprimento indeflectível (sólido), L_s	$d(N_t + 1)$	dN_t	$d(N_t + 1)$	dN_t
Passo, p	$(L_0 - d)/N_a$	$L_0/(N_a + 1)$	$(L_0 - 3d)/N_a$	$(L_0 - 2d)/N_a$

Fonte: *Design Handbook*, 1987, p. 32. Cortesia da Associated Spring.

MOLAS DE COMPRESSÃO

Forys salientou que extremidades esquadradas e esmerilhadas dão um comprimento sólido L_s de:

$$L_s = (N_t - a)d$$

Onde a varia com uma média 0,75.

Uma maneira de verificar o comprimento sólido é tomar molas de um determinado fabricante, fechá-las compactamente e medir a altura compacta.

Uma outra maneira é olhar para a mola e contar os diâmetros de fio na pilha compacta.

MOLAS DE COMPRESSÃO

- **Remoção de deformação (assentamento) ou pré-ajuste:** é um processo usado na manufatura de molas de compressão para induzir tensões residuais úteis. É feita fazendo a mola mais longa que o necessário e então comprimindo-a até a sua altura sólida.
- Essa operação ajusta a mola ao comprimento livre final requerido e, visto que a resistência torcional ao escoamento tem sido excedida, induz tensões residuais opostas em direção àquelas induzidas em serviço.
- Molas a serem pré-ajustadas devem ser projetadas de modo que 10 a 30% do comprimento livre inicial sejam removidos durante a operação.
- Remoção de deformação aumenta a resistência da mola e é especialmente útil quando a mola é usada para propósitos de armazenagem de energia. Contudo, não deve ser utilizada quando as molas forem sujeitas à fadiga.

ESTABILIDADE

Molas de espiras de compressão podem flambar quando a deflexão se torna muito grande. A deflexão crítica é dada pela equação:

$$y_{cr} = L_0 C_1 \left[1 - \left(1 - \frac{C_2'}{\lambda_{eff}^2} \right)^{\frac{1}{2}} \right]$$

λ_{eff} é a razão efetiva de esbeltez.

$$\lambda_{eff} = \frac{\alpha L_0}{D}$$

C_1 e C_2 são constantes elásticas definidas pelas equações:

$$C_1' = \frac{E}{2(E - G)}$$

$$C_2' = \frac{2\pi^2(E - G)}{2G + E}$$

ESTABILIDADE

α é a condição de extremidade e depende de como as extremidades da mola estão apoiadas.

Condição de extremidade	Constante α
Mola suportada entre superfícies planas paralelas (extremidades fixas)	0,5
Uma extremidade suportada por superfície plana perpendicular ao eixo de mola (fixa); a outra extremidade pivotada (articulada)	0,707
Ambas as extremidades pivotadas(articuladas)	1
Uma extremidade engastada; a outra extremidade livre	2

Estabilidade absoluta ocorre quando o termo $C'_2/\lambda_{\text{eff}}^2$ é maior que a unidade. Isso significa que a condição para estabilidade absoluta é:

$$L_0 < \frac{\pi D}{\alpha} \left[\frac{2(E - G)}{2G + E} \right]^{\frac{1}{2}}$$

Para aços:

$$L_0 < 2,63 \frac{D}{\alpha}$$

Para extremidades esquadradas e esmerilhadas: $\alpha = 0,5$ e $L_0 \leq 5,26D$

MATERIAIS DE MOLA

- Manufaturadas por processos de trabalho a quente ou a frio, dependendo do tamanho do material, do índice de mola e das propriedades desejadas.
- Em geral, um fio pré-endurecido não deve ser usado caso $D / d < 4$ ou se $d > 6,35$ mm.
- Tratamento térmico ameno é realizado, após o enrolamento, para aliviar as tensões residuais de flexão.
- O gráfico da resistência à **tração** versus o diâmetro do fio é uma linha reta para alguns materiais quando traçado em papel log-log. Tratamento térmico ameno é realizado, após o enrolamento, para aliviar as tensões residuais de flexão.

$$S_{ut} = \frac{A}{d^m}$$

MATERIAIS DE MOLA

- Da teoria da máxima energia de distorção, obtém-se a resistência ao escoamento de torção.

$$S_{sy} = 0,577 S_{ut}$$

Resultando em um intervalo (para aços):

$$0,35 S_{ut} \leq S_{sy} \leq 0,52 S_{ut}$$

MATERIAIS DE MOLA

- Aços comuns de carbono;
- Aços liga;
- Aços resistentes à corrosão;
- Materiais não ferrosos;
- Bronze-fósforo;
- Latão de mola;
- Cobre-Berílio;
- Ligas de Níquel;

MATERIAIS DE MOLA

Nome do material	Especificações similares	Descrição
Fio musical 0,80-0,95C	UNS G10850 AISI 1085 ASTM A228-51	Este é o melhor, o mais tenaz e o mais amplamente usado entre todos os materiais de mola para molas pequenas. Ele tem a maior resistência à tração e pode suportar tensões mais elevadas sob carregamento repetido que qualquer outro material de mola. Disponível em diâmetros 0,12 a 3 mm (0,005 a 0,125 in). Não deve ser usado acima de 120°C (250°F) ou a temperaturas abaixo de zero.
Fio revenido em óleo 0,60-0,70C	UNS G10650 AISI 1065 ASTM 229-41	Este aço de mola de propósito geral é usado para muitos tipos de molas de espira nos quais o custo do fio musical é proibitivo e em tamanhos maiores que os disponíveis em fio musical. Não recomendado para carregamento de choque e impacto. Disponível em diâmetros de 3 a 12 mm (0,125 a 0,5000 in), mas tamanhos maiores e menores podem ser obtidos. Não recomendado para uso acima de 180°C (350°F) ou em temperaturas abaixo de zero.
Fio repuxado duro 0,60-0,70C	UNS G10660 AISI 1065 ASTM A227-47	Este é o aço de mola mais barato de propósito geral e deve ser usado somente quando vida, acurácia e deflexão não são muito importantes. Disponível em diâmetros de 0,8 a 12 mm (0,031 a 0,500 in). Não recomendado para uso acima de 120°C (250°F) ou a temperaturas abaixo de zero.
Cromo-vanádio	UNS G61500 AISI 6150 ASTM 231-41	Este é o aço liga de mola mais popular para condições envolvendo tensões mais elevadas que pode ser usado com aços de alto-carbono e nas quais resistência à fadiga e resistência longa são necessárias. Também bom para cargas de choque e impacto. Amplamente usado para molas de válvulas de motor de aeronaves e para temperaturas até 220°C (425°F). Disponível em tamanhos recozidos ou pré-revenidos de 0,8 a 12 mm (0,031 a 0,500 in) de diâmetro.
Cromo-silício	UNS G92540 AISI 9254	Esta liga é um material excelente para molas altamente tensionadas que requerem vida longa e estão sujeitas a carregamento de choque. Durezas Rockwell de C50 a C53 são muito comuns, e o material pode ser usado a até 250°C (475°F). Disponível de 0,8 a 12 mm (0,031 a 0,500 in) de diâmetro.

MATERIAIS DE MOLA

<i>Material</i>	<i>Número da ASTM</i>	<i>Expoente m</i>	<i>Diâmetro, in</i>	<i>A, kpsi · in^m</i>	<i>Diâmetro, mm</i>	<i>A, MPa · mm^m</i>
Fio musical*	A228	0,145	0,004-0,256	201	0,10-6,5	2211
Fio OQ&T (temperado em banho de óleo e revenido)†	A229	0,187	0,020-0,500	147	0,5-12,7	1855
Fio repuxado duro‡	A227	0,190	0,028-0,500	140	0,7-12,7	1783
Fio de cromo-vanádio§	A232	0,168	0,032-0,437	169	0,8-11,1	2005
Fio de cromo-silício	A401	0,108	0,063-0,375	202	1,6-9,5	1974
Fio de aço inoxidável 302#	A313	0,146 0,263 0,478	0,013-0,10 0,10-0,20 0,20-0,40	169 128 90	0,3-2,5 2,5-5 5,10	1867 2065 2911
Fio de bronze-fósforo**	B159	0 0,028 0,064	0,004-0,022 0,022-0,075 0,075-0,30	145 121 110	0,1-0,6 0,6-2 2-7,5	1000 913 932

* Superfície suave, livre de defeitos e com acabamento brilhante e lustroso.

† Tem uma escama leve de termotratamento que deve ser removida antes de chapeamento (revestimento metálico).

‡ Superfície suave e brilhante sem marcas visíveis.

§ Fio revenido de qualidade aeronáutica, pode também ser obtido recozido.

|| Revenido para Rockwell C49, mas pode ser obtido sem revenido.

Aço inoxidável do tipo 302.

** Revenido CA510.

Fonte: *Design Handbook*, 1987, p. 19. Cortesia da Associated Spring.

MATERIAIS DE MOLA

Material	Percentagem Máxima de Resistência à Tração Antes de remoção de deformação (inclui K_w ou K_B)	Depois de remoção de deformação (inclui K_s)
Fio musical e aço carbono repuxado a frio	45	60-70
Aço carbono endurecido e revenido e aço de baixa liga	50	65-75
Aços austeníticos inoxidáveis	35	55-65
Ligas não-ferrosas	35	55-65

Fonte: Robert E. Joerres, "Springs", Cap. 24, em Joseph E. Shigley e Charles R. Mischke (eds.), *Standard Handbook of Machine Design*, 2nd ed., McGraw-Hill, New York, 1996.

MATERIAIS DE MOLA

Material	Limite elástico, percentagem da S_{ut}		Diâmetro d , in	E		G	
	Tração	Torção		Mpsi	GPa	Mpsi	GPa
Fio musical A228	65-75	45-60	< 0,032	29,5	203,4	12,0	82,7
			0,033-0,063	29,0	200	11,85	81,7
			0,064-0,125	28,5	196,5	11,75	81,0
			> 0,125	28,0	193	11,6	80,0
Mola endurecida A227	60-70	45-55	< 0,032	28,8	198,6	11,7	80,7
			0,033-0,063	28,7	197,9	11,6	80,0
			0,064-0,125	28,6	197,2	11,5	79,3
			> 0,125	28,5	196,5	11,4	78,6
Revenido a óleo A239	85-90	45-50		28,5	196,5	11,2	77,2
Mola de válvula A230	85-90	50-60		29,5	203,4	11,2	77,2
Cromo-vanádio A231	88-93	65-75		29,5	203,4	11,2	77,2
	A232		88-93		29,5	203,4	11,2
Cromo-silício A401	85-93	65-75		29,5	203,4	11,2	77,2
Aço inoxidável							
A313*	65-75	45-55		28	193	10	69,0
17-7PH	75-80	55-60		29,5	208,4	11	75,8
414	65-70	42-55		29	200	11,2	77,2
420	65-75	45-55		29	200	11,2	77,2
431	72-76	50-55		30	206	11,5	79,3
Bronze-fósforo B159	75-80	45-50		15	103,4	6	41,4
Berílio-cobre B197	70	50		17	117,2	6,5	44,8
	75	50-55		19	131	7,3	50,3
Liga inconel X-750	65-70	40-45		31	213,7	11,2	77,2

* Também inclui 302, 304 e 316.

Nota: Ver Tabela 10-6 para valores de projeto de tensão admissível de torção.

EXERCÍCIO 10-5

Uma mola helicoidal de compressão é feita de fio de aço de mola duro repuxado, com 2 mm de diâmetro e um diâmetro externo de 22 mm. As extremidades são planas e esmerilhadas, e existem 8 ½ espiras totais.

- A mola é enrolada para um comprimento livre, que é o maior possível com propriedades de segurança e solidez. Encontre esse comprimento livre.
- Qual é o passo dessa mola?
- Que força é necessária para comprimir a mola a seu comprimento sólido?
- Estime a razão de mola.
- A mola flambará em serviço?

a)

Material	Número da ASTM	Expoente m	Diâmetro, in	A, kpsi · in ^m	Diâmetro, mm	A, MPa · mm ^m
Fio musical*	A228	0,145	0,004-0,256	201	0,10-6,5	2211
Fio OQ&T (temperado em banho de óleo e revenido)†	A229	0,187	0,020-0,500	147	0,5-12,7	1855
Fio repuxado duro‡	A227	0,190	0,028-0,500	140	0,7-12,7	1783
Fio de cromo-vanádio§	A232	0,168	0,032-0,437	169	0,8-11,1	2005
Fio de cromo-silício	A401	0,108	0,063-0,375	202	1,6-9,5	1974
Fio de aço inoxidável 302#	A313	0,146	0,013-0,10	169	0,3-2,5	1867
		0,263	0,10-0,20	128	2,5-5	2065
		0,478	0,20-0,40	90	5,10	2911
Fio de bronze-fósforo**	B159	0	0,004-0,022	145	0,1-0,6	1000
		0,028	0,022-0,075	121	0,6-2	913
		0,064	0,075-0,30	110	2-7,5	932

$$D_{ext} = 22 \text{ mm}$$

$$d = 2 \text{ mm}$$

$$A = 1783 \text{ MPa} \cdot \text{mm}^m$$

$$m = 0,190$$

$$S_{ut} = \frac{A}{d^m}$$

EXERCÍCIO 10-5

$$S_{ut} = \frac{1783}{2^{0,190}} = 1562,9 \text{ MPa}$$

Utilizando-se o valor médio da faixa indicada:

$$0,35 S_{ut} \leq S_{sy} \leq 0,52 S_{ut}$$

$$S_{sy} = 0,435 S_{ut}$$

$$S_{sy} = 0,435 (1562,9) = 679,8 \text{ MPa}$$

$$D = D_{ext} - d = 22 - 2 = 20 \text{ mm}$$

$$C = \frac{D}{d} = \frac{20}{2} = 10$$

EXERCÍCIO 10-5

$$K_B = \frac{4C + 2}{4C - 3} = \frac{4(10) + 2}{4(10) - 3} = 1,135$$

Utilizando-se o valor médio da faixa indicada:

$$N_t = N_a + 1$$

$$8,5 = N_a + 1$$

$$N_a = 7,5$$

$$L_s = (N_t - a)d$$

$$L_s = dN_t = 2 \cdot 8,5 = 17,0 \text{ mm}$$

$$L_0 = y_s + L_s$$

EXERCÍCIO 10-5

d)

$$k = \frac{d^4 G}{8D^3 N}$$

$$k = \frac{(0,002)^4 79,3 \cdot 10^9 Pa}{8(0,020)^3 7,5} = 2643 N / m$$

Utilizando-se :

$$\tau = K_s \frac{8 F D}{\pi d^3}$$

$$S_{sy} = K_B \frac{8 F D}{\pi d^3}$$

c)

$$F = \frac{\pi d^3 S_{sy}}{8 K_B D}$$

$$F = \frac{\pi (2 mm)^3 679,8 MPa}{8(1,135)(20 mm)} = 94,1 N$$

Material	Limite elástico, percentagem da S_{ut}		Diâmetro d , in	E		G	
	Tração	Torção		Mpsi	GPa	Mpsi	GPa
Fio musical A228	65-75	45-60	< 0,032	29,5	203,4	12,0	82,7
			0,033-0,063	29,0	200	11,85	81,7
			0,064-0,125	28,5	196,5	11,75	81,0
			> 0,125	28,0	193	11,6	80,0
Mola endurecida A227	60-70	45-55	< 0,032	28,8	198,6	11,7	80,7
			0,033-0,063	28,7	197,9	11,6	80,0
			0,064-0,125	28,6	197,2	11,5	79,3
			> 0,125	28,5	196,5	11,4	78,6
Revenido a óleo A239	85-90	45-50		28,5	196,5	11,2	77,2
Mola de válvula A230	85-90	50-60		29,5	203,4	11,2	77,2
Cromo-vanádio A231	88-93	65-75		29,5	203,4	11,2	77,2
			A232	88-93		29,5	203,4
Cromo-silício A401	85-93	65-75		29,5	203,4	11,2	77,2
Aço inoxidável							
A313*	65-75	45-55		28	193	10	69,0
17-7PH	75-80	55-60		29,5	208,4	11	75,8
414	65-70	42-55		29	200	11,2	77,2
420	65-75	45-55		29	200	11,2	77,2
431	72-76	50-55		30	206	11,5	79,3
Bronze-fósforo B159	75-80	45-50		15	103,4	6	41,4
Berílio-cobre B197	70	50		17	117,2	6,5	44,8
	75	50-55		19	131	7,3	50,3
Liga inconel X-750	65-70	40-45		31	213,7	11,2	77,2

* Também inclui 302, 304 e 316.

Nota: Ver Tabela 10-6 para valores de projeto de tensão admissível de torção.

EXERCÍCIO 10-5

$$y = \frac{F}{k} = \frac{94,1N}{2643N/m} = 0,035m$$

Assim:

a) $L_0 = 35,6 + 17 = 52,6mm$

b) $p = \frac{L_0}{N_t} = \frac{52,6}{8,5} = 6,18mm$

e) Para evitar flambagem, deve-se ter (para aços):

$$L_0 < 2,63 \frac{D}{\alpha}$$

$$\alpha = 0,5$$

$$L_0 < \frac{2,63(20)}{0,5} = 105,2mm$$

Assim, a mola não irá flambar.

PROJETO DE MOLAS HELICOIDAIS DE COMPRESSÃO PARA SERVIÇO ESTÁTICO

- Intervalo preferível de índice de mola:

$$4 \leq C \leq 12$$

- Índices mais baixos são mais difíceis de formar (perigo de trinca);
- Índices mais altos, tendência a se emaranhar;

- Intervalo recomendado de voltas ativas:

$$3 \leq N_a \leq 15$$

- Para manter a linearidade quando uma mola está quase se fechando, é necessário evitar o encosto gradual das espiras (devido à imperfeição de passo).

PROJETO DE MOLAS HELICOIDAIS DE COMPRESSÃO PARA SERVIÇO ESTÁTICO

- Característica de força-deformação de uma mola helicoidal de espira é idealmente linear:
- Na prática é sempre assim, mas não em cada extremidade da curva de força-deflexão:
 - A força de mola não é reproduzível para deflexões muito pequenas;
 - Próximo ao fechamento, o comportamento não-linear começa à medida que o número de voltas ativas diminui.
- Deve-se utilizar o ponto de operação de mola aos 75% centrais da curva entre nenhuma carga ($F=0$) e fechamento ($F=F_s$).

PROJETO DE MOLAS HELICOIDAIS DE COMPRESSÃO PARA SERVIÇO ESTÁTICO

- Força operacional máxima deve ser limitada a:

$$F_{\max} \leq \frac{7}{8} F_s$$

- Definindo-se a extensão fracionária até o fechamento como sendo ξ :

$$F_s = (1 + \xi) F_{\max} = (1 + \xi) \frac{7}{8} F_s$$

$$\xi = \frac{1}{7}$$

$$\xi \geq 0,15$$

PROJETO DE MOLAS HELICOIDAIS DE COMPRESSÃO PARA SERVIÇO ESTÁTICO

Condições recomendadas de projeto:

$$\xi \geq 0,15$$

$$4 \leq C \leq 12$$

$$3 \leq N_a \leq 15$$

$$n_s \geq 1,2$$

EXERCÍCIO 10-18

Uma mola helicoidal de compressão de fio musical de serviço estático é necessária para suportar uma carga de 20 lbf após ser comprimida 2 in. A altura sólida da mola não pode exceder a 1 1/2 poll. O comprimento livre não deve exceder a 4 in. O fator de segurança estático não deve igualar ou exceder a 1,3. Para linearidade robusta, use uma sobrevolta fracional para fechamento de 0,15.

- a) A mola deve operar sobre um eixo de 3/4 in. Uma tolerância diametral de folga de 0,050 in deve ser adequada para evitar interferência entre o eixo e a mola devido às espiras fora de circularidade. Projete a mola.

Material	Limite elástico, percentagem da S_{ut}		Diâmetro d , in	E		G	
	Tração	Torção		Mpsi	GPa	Mpsi	GPa
Fio musical A228	65-75	45-60	< 0,032	29,5	203,4	12,0	82,7
			0,033-0,063	29,0	200	11,85	81,7
			0,064-0,125	28,5	196,5	11,75	81,0
			> 0,125	28,0	193	11,6	80,0
Mola endurecida A227	60-70	45-55	< 0,032	28,8	198,6	11,7	80,7
			0,033-0,063	28,7	197,9	11,6	80,0
			0,064-0,125	28,6	197,2	11,5	79,3
			> 0,125	28,5	196,5	11,4	78,6
Revenido a óleo A239	85-90	45-50		28,5	196,5	11,2	77,2
Mola de válvula A230	85-90	50-60		29,5	203,4	11,2	77,2
Cromo-vanádio A231	88-93	65-75		29,5	203,4	11,2	77,2
	A232	88-93		29,5	203,4	11,2	77,2
Cromo-silício A401	85-93	65-75		29,5	203,4	11,2	77,2
Aço inoxidável							
A313*	65-75	45-55		28	193	10	69,0
17-7PH	75-80	55-60		29,5	208,4	11	75,8
414	65-70	42-55		29	200	11,2	77,2
420	65-75	45-55		29	200	11,2	77,2
431	72-76	50-55		30	206	11,5	79,3
Bronze-fósforo B159	75-80	45-50		15	103,4	6	41,4
Berílio-cobre B197	70	50		17	117,2	6,5	44,8
	75	50-55		19	131	7,3	50,3
Liga inonel X-750	65-70	40-45		31	213,7	11,2	77,2

$$G = 11,75 \text{ Mpsi}$$

Usar terminações esquadrada e esmerilhada.

* Também inclui 302, 304 e 316.

Nota: Ver Tabela 10-6 para valores de projeto de tensão admissível de torção.

EXERCÍCIO 10-18

$$k = \frac{F}{y} = \frac{20 \text{ lbf}}{2 \text{ in}} = 10 \text{ lbf / in}$$

1ª tentativa:

$$d = 0,08 \text{ in}$$

$$D = D_{\text{eixo}} + d + \text{toler} = 3/4 + 0,08 + 0,05 = 0,88 \text{ in}$$

$$D_{\text{int}} = D - d = 0,88 - 0,08 = 0,80 \text{ in}$$

$$D_{\text{ext}} = D + d = 0,88 + 0,08 = 0,96 \text{ in}$$

$$C = \frac{D}{d} = \frac{0,88}{0,08} = 11$$

$$k = \frac{d^4 G}{8D^3 N}$$

EXERCÍCIO 10-18

$$10 \text{ lbf} / \text{in} = \frac{(0,08)^4 11,75 \cdot 10^6}{8(0,88)^3 N}$$

$$N = 8,82$$

Da tabela 10-1:

Número total de espiras:

$$N_t = N_a + 2 = 10,82$$

Comprimento indeflectível:

$$L_s = dN_t = 0,08 \cdot 10,82 = 0,8656 \text{ in}$$

$$L_0 = L_s + (1 + 0,15)y_{\max} = 0,8656 + 1,15 \cdot 2 = 3,165 \text{ in}$$

EXERCÍCIO 10-18

L_0 crítico:

$$L_0 < 2,63 \frac{D}{\alpha}$$

$$L_0 < 2,63 \frac{0,88}{0,5} = 4,62 \text{ in}$$

Tabela 10-4:

Material	Número da ASTM	Expoente m	Diâmetro, in	A , kpsi · in ^m	Diâmetro, mm	A , MPa · mm ^m
Fio musical*	A228	0,145	0,004-0,256	201	0,10-6,5	2211
Fio OQ&T (temperado em banho de óleo e revenido)†	A229	0,187	0,020-0,500	147	0,5-12,7	1855
Fio repuxado duro‡	A227	0,190	0,028-0,500	140	0,7-12,7	1783
Fio de cromo-vanádio§	A232	0,168	0,032-0,437	169	0,8-11,1	2005
Fio de cromo-silício	A401	0,108	0,063-0,375	202	1,6-9,5	1974
Fio de aço inoxidável 302#	A313	0,146	0,013-0,10	169	0,3-2,5	1867
		0,263	0,10-0,20	128	2,5-5	2065
		0,478	0,20-0,40	90	5,10	2911
Fio de bronze-fósforo**	B159	0	0,004-0,022	145	0,1-0,6	1000
		0,028	0,022-0,075	121	0,6-2	913
		0,064	0,075-0,30	110	2-7,5	932

$$A = 201$$

$$m = 0,145$$

* Superfície suave, livre de defeitos e com acabamento brilhante e lustroso.

† Tem uma escama leve de termotratamento que deve ser removida antes de chapeamento (revestimento metálico).

‡ Superfície suave e brilhante sem marcas visíveis.

§ Fio revenido de qualidade aeronáutica, pode também ser obtido recozido.

|| Revenido para Rockwell C49, mas pode ser obtido sem revenido.

Aço inoxidável do tipo 302.

** Revenido CA510.

Fonte: *Design Handbook*, 1987, p. 19. Cortesia da Associated Spring.

EXERCÍCIO 10-18

$$S_{ut} = \frac{A}{d^m}$$

$$S_{ut} = \frac{201}{0,08^{0,145}} = 289,9 \text{ Kpsi}$$

Utilizando-se o valor médio da faixa indicada:

$$0,35 S_{ut} \leq S_{sy} \leq 0,52 S_{ut}$$

$$S_{sy} = 0,435 S_{ut}$$

$$S_{sy} = 0,435(289,9) = 126,1 \text{ Kpsi}$$

$$K_B = \frac{4C + 2}{4C - 3}$$

Fator de Bergsträsser

$$K_B = \frac{4C + 2}{4C - 3} = \frac{4(11) + 2}{4(11) - 3} = 1,122$$

EXERCÍCIO 10-18

$$\tau = K_B \frac{(8 F D)}{\pi d^3}$$

$$\tau = 1,122 \frac{[8(20)0,88]}{\pi (0,08)^3} = 98264 \text{ psi}$$

$$n = \frac{S_{sy}}{\tau} = \frac{126100}{98264} = 1,28$$

EXERCÍCIO 10-18

2ª tentativa:

$$d = 0,085 \text{ in}$$

$$D = D_{\text{eixo}} + d + \text{toler} = 3/4 + 0,08 + 0,05 = 0,885 \text{ in}$$

$$D_{\text{int}} = D - d = 0,885 - 0,08 = 0,805 \text{ in}$$

$$D_{\text{ext}} = D + d = 0,88 + 0,085 = 0,965 \text{ in}$$

$$C = \frac{D}{d} = \frac{0,885}{0,085} = 10,41$$

$$k = \frac{d^4 G}{8D^3 N}$$

EXERCÍCIO 10-18

$$10 \text{ lbf} / \text{in} = \frac{(0,085)^4 11,75 \cdot 10^6}{8(0,885)^3 N}$$

$$N = 11,06$$

Da tabela 10-1:

Número total de espiras:

$$N_t = N_a + 2 = 13,06$$

Comprimento indeflectível:

$$L_s = dN_t = 0,08 \cdot 13,06 = 1,11 \text{ in}$$

$$L_0 = L_s + (1 + 0,15)y_{\max} = 1,11 + 1,15 \cdot 2 = 3,41 \text{ in}$$

EXERCÍCIO 10-18

L_0 crítico:

$$L_0 < 2,63 \frac{D}{\alpha}$$

$$L_0 < 2,63 \frac{0,885}{0,5} = 4,65$$

Tabela 10-4:

Material	Número da ASTM	Expoente m	Diâmetro, in	A_s , kpsi · in ^m	Diâmetro, mm	A_s , MPa · mm ^m
Fio musical*	A228	0,145	0,004-0,256	201	0,10-6,5	2211
Fio OQ&T (temperado em banho de óleo e revenido)†	A229	0,187	0,020-0,500	147	0,5-12,7	1855
Fio repuxado duro‡	A227	0,190	0,028-0,500	140	0,7-12,7	1783
Fio de cromo-vanádio§	A232	0,168	0,032-0,437	169	0,8-11,1	2005
Fio de cromo-silício	A401	0,108	0,063-0,375	202	1,6-9,5	1974
Fio de aço inoxidável 302#	A313	0,146	0,013-0,10	169	0,3-2,5	1867
		0,263	0,10-0,20	128	2,5-5	2065
		0,478	0,20-0,40	90	5,10	2911
Fio de bronze-fósforo**	B159	0	0,004-0,022	145	0,1-0,6	1000
		0,028	0,022-0,075	121	0,6-2	913
		0,064	0,075-0,30	110	2-7,5	932

$$A = 201$$

$$m = 0,145$$

* Superfície suave, livre de defeitos e com acabamento brilhante e lustroso.

† Tem uma escama leve de termotratamento que deve ser removida antes de chapeamento (revestimento metálico).

‡ Superfície suave e brilhante sem marcas visíveis.

§ Fio revenido de qualidade aeronáutica, pode também ser obtido recozido.

|| Revenido para Rockwell C49, mas pode ser obtido sem revenido.

Aço inoxidável do tipo 302.

** Revenido CA510.

Fonte: *Design Handbook*, 1987, p. 19. Cortesia da Associated Spring.

EXERCÍCIO 10-18

$$S_{ut} = \frac{A}{d^m}$$

$$S_{ut} = \frac{201}{0,085^{0,145}} = 287,4 \text{ Kpsi}$$

Utilizando-se o valor médio da faixa indicada:

$$0,35 S_{ut} \leq S_{sy} \leq 0,52 S_{ut}$$

$$S_{sy} = 0,435 S_{ut}$$

$$S_{sy} = 0,435 (287,4) = 125,0 \text{ Kpsi}$$

$$K_B = \frac{4C + 2}{4C - 3}$$

Fator de Bergsträsser

$$K_B = \frac{4C + 2}{4C - 3} = \frac{4(10,4) + 2}{4(10,4) - 3} = 1,13$$

EXERCÍCIO 10-18

$$\tau = K_B \frac{(8 F D)}{\pi d^3}$$

$$\tau = 1,13 \frac{[8(20)0,885]}{\pi (0,085)^3} = 82976 \text{ psi}$$

$$n = \frac{S_{sy}}{\tau} = \frac{125000}{82976} = 1,50$$

FREQUÊNCIA CRÍTICA DE MOLAS HELICOIDAIS

- Quando molas helicoidais são usadas em aplicações que requerem um movimento alternativo rápido, o projetista deve evitar que a frequência natural da mola fique afastada da frequência de trabalho, evitando o fenômeno da ressonância;
 - Observa-se que o amortecimento de molas geralmente é muito baixo;
 - Ideal que a frequência de trabalho seja muito menor que a frequência natural:
-
- Wolford e Smith (mola tem uma extremidade contra uma placa plana e a outra livre):

$$f = \frac{1}{4} \sqrt{\frac{k g}{W}}$$

Onde k é a razão (rigidez) da mola ,
 g aceleração da gravidade
e W o peso da mola.

FREQUÊNCIA CRÍTICA DE MOLAS HELICOIDAIS

- Woford e Smith (mola tem uma extremidade contra uma placa plana e a outra guiada com um movimento de onda senoidal):

$$f = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{k g}{W}}$$

O peso da parte ativa de uma mola helicoidal é:

$$W = A L \gamma = \frac{\pi d^2}{4} (\pi D N_a) (\gamma) = \frac{\pi^2 d^2 D N_a \gamma}{4}$$

γ é o peso específico.

EXERCÍCIO

Para o exercício 10.18, qual a frequência natural da mola?

$$f = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{k g}{W}}$$

$$k = \frac{F}{y} = \frac{20 \text{ lbf}}{2 \text{ in}} = 10 \text{ lbf / in} \cdot \frac{4,45 \text{ N}}{1 \text{ lbf}} \cdot \frac{1 \text{ in}}{0,0254 \text{ m}} = 1751,9 \text{ N / m}$$

$$W = A L \gamma = \frac{\pi d^2}{4} (\pi D N_a) (\gamma) = \frac{\pi^2 d^2 D N_a \gamma}{4}$$

$$W = \frac{\pi^2 (0,002032 \text{ m})^2 (0,022352 \text{ m}) (8,82) (7800 \text{ kg / m}^3 \cdot 9,81 \text{ N})}{4} = 0,1536 \text{ N}$$

$$f = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{1753,9 (9,81)}{0,1536}} = 167,3 \text{ Hz}$$

EXERCÍCIO

Se a máxima frequência de excitação for de 30 Hz, qual deve ser a rigidez da mola?

$$f = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{k g}{W}}$$

$$W = \frac{\pi^2 d^2 D N_a \gamma}{4}$$

$$W = \frac{\pi^2 (0,002032m)^2 (0,022352m)(8,82)(7800kg/m^3 \cdot 9,81N)}{4} = 0,1536 N$$

CARREGAMENTO DE FADIGA DE MOLAS HELICOIDAIS DE COMPRESSÃO

- Número de ciclos de vida pode ser pequeno (vários milhares para uma mola de cadeado ou para uma mola de chave de arco elétrico);
 - Milhões de ciclos de operação (mola de válvula de um motor alternativo).
 - Jateamento de esferas pode ser usado para aumentar a resistência à fadiga das molas carregadas dinamicamente.
 - Pode aumentar a resistência à fadiga por torção em 20% ou mais.
 - Tamanho das esferas de cerca de 1/64 in (0,396 mm).
- Zimmerli:** o tamanho, o material e a resistência à tração não tem nenhum efeito nos limites de resistência. (vida infinita somente) de aços mola em tamanhos inferiores a 3/8 in (10 mm).

CARREGAMENTO DE FADIGA DE MOLAS HELICOIDAIS DE COMPRESSÃO

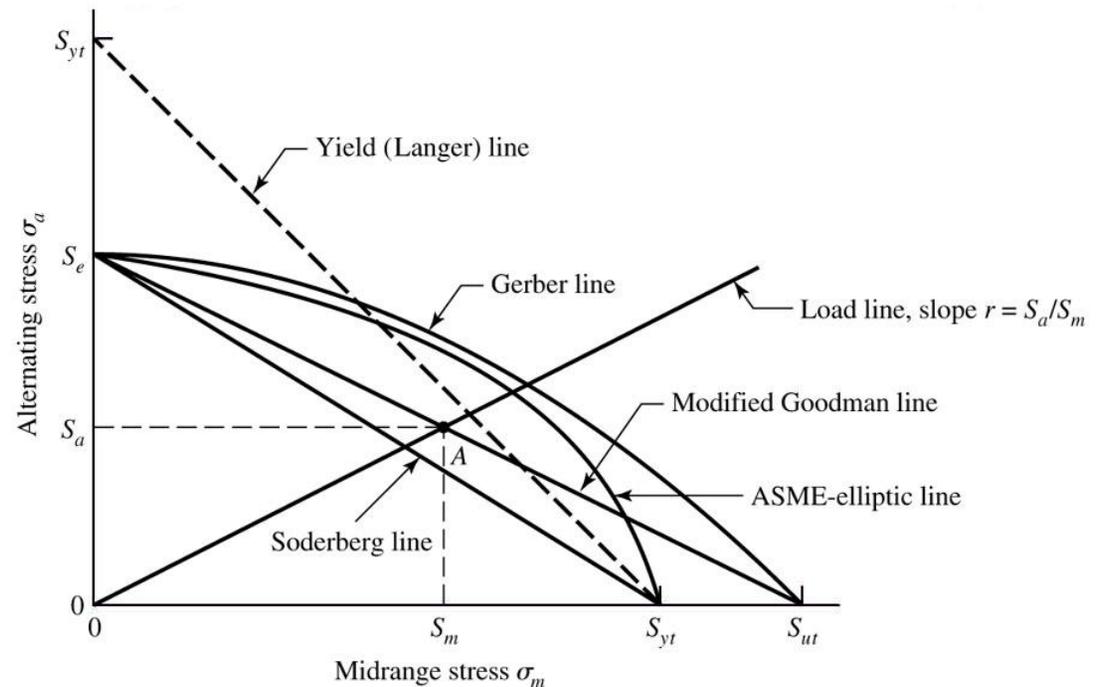
•VIDA INFINITA

$$\frac{S_a}{S_e} + \left(\frac{S_m}{S_{ut}} \right)^2 = 1$$

Critério de falha de Gerber

$$S_{se} = \frac{S_{sa}}{1 - \left(\frac{S_{sm}}{S_{su}} \right)^2}$$

S_e : Limite de fadiga;
 S_f : Resistência de vida finita;
 S_a : Resistência à carga alternante;
 S_m : Resistência à carga média;
 S_{ut} : Resistência à ruptura;



CARREGAMENTO DE FADIGA DE MOLAS HELICOIDAIS DE COMPRESSÃO

•VIDA INFINITA

$$\frac{S_a}{S_e} + \left(\frac{S_m}{S_{ut}} \right)^2 = 1$$

Critério de falha de Gerber

$$S_{se} = \frac{S_{sa}}{1 - \left(\frac{S_{sm}}{S_{su}} \right)^2}$$

Sem jateamento de esferas:

$$S_{sa} = 35 \text{ kpsi} (241 \text{ MPa})$$

$$S_{sm} = 55 \text{ kpsi} (379 \text{ MPa})$$

Com jateamento de esferas:

$$S_{sa} = 57,5 \text{ kpsi} (398 \text{ MPa})$$

$$S_{sm} = 77,5 \text{ kpsi} (534 \text{ MPa})$$

Dada uma mola sem jateamento de esferas, com $S_{su}=211,5$ kpsi:

$$S_{se} = \frac{S_{sa}}{1 - \left(\frac{S_{sm}}{S_{su}} \right)^2} = \frac{35}{1 - \left(\frac{55}{211,5} \right)^2} = 37,5 \text{ kpsi}$$

CARREGAMENTO DE FADIGA DE MOLAS HELICOIDAIS DE COMPRESSÃO

Quando o módulo torcional de ruptura for necessário, utiliza-se:

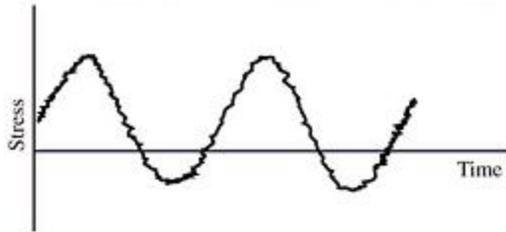
$$S_{su} = 0,67 S_{ut}$$

Definindo-se:

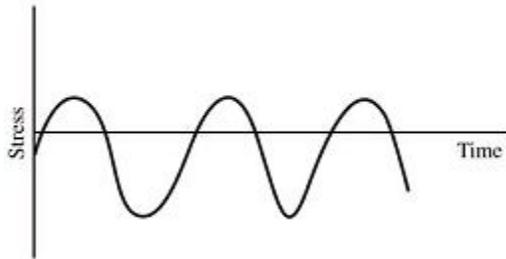
$$F_a = \frac{F_{\max} - F_{\min}}{2}$$

$$F_m = \frac{F_{\max} + F_{\min}}{2}$$

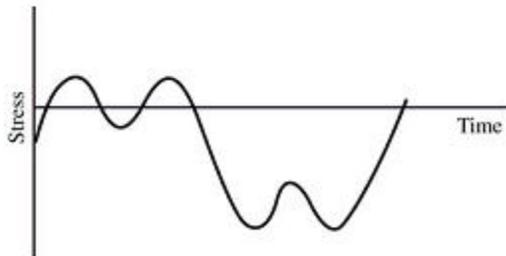
CARREGAMENTO DE FADIGA DE MOLAS HELICOIDAIS DE COMPRESSÃO



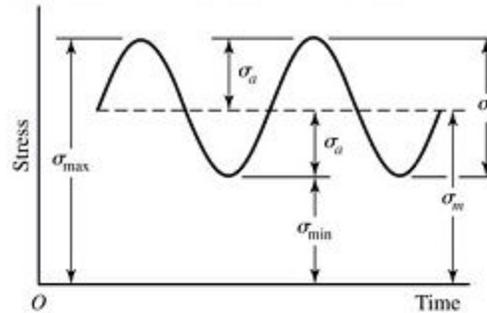
(a)



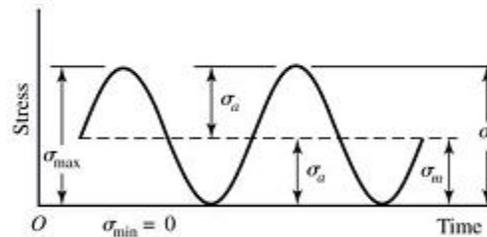
(b)



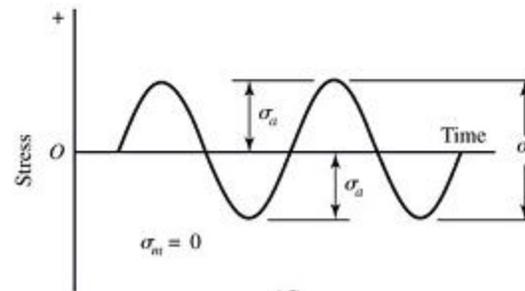
(c)



(d)



(e)



(f)

$$\tau_a = K_B \frac{(8 F_a D)}{\pi d^3}$$

$$\tau_m = K_B \frac{(8 F_m D)}{\pi d^3}$$

EXEMPLO 10-4

Uma mola helicoidal de compressão tipo enrolada, feita de fio musical, tem um tamanho de fio de 0,092 in (2,34 mm), um diâmetro externo de espira de 9/16 in (14,28 mm), um comprimento livre de 4 3/8 in (111,12 mm), 21 espiras ativas e ambas as extremidades esquadradas e esmerilhadas. A mola é não-jateada. Ela deve ser montada com uma pré-carga de 5 lbf (22,25 N) e, quando estiver em uso, deverá operar com uma carga máxima de 35 lbf (155,75 N).

- Estime o fator de segurança, resguardando contra falha de fadiga usando o critério de falha torcional de Gerber com dados de Zimmerli.
- Repita a parte (a) usando o critério de fadiga torcional de Sines (componente de tensão permanente não tem efeito) com dados de Zimmerli.
- Repita usando o critério de falha torcional de Goodman com dados de Zimmerli.
- Estime a frequência crítica da mola.

Diâmetro médio da espira:

$$D = 14,28 - 2,34 = 11,94 \text{ mm}$$

$$C = \frac{D}{d} = \frac{11,94}{2,34} = 5,10$$

$$K_B = \frac{4C + 2}{4C - 3} = \frac{4(5,10) + 2}{4(5,10) - 3} = 1,28$$

$$F_a = \frac{F_{\max} - F_{\min}}{2} = \frac{155,75 - 22,25}{2} = 66,75 \text{ N}$$

$$F_m = \frac{F_{\max} + F_{\min}}{2} = \frac{155,75 + 22,25}{2} = 89,0 \text{ N}$$

EXEMPLO 10-4

$$\tau_a = K_B \frac{(8 F_a D)}{\pi d^3}$$

$$\tau_a = 1,28 \frac{[8(66,75N)11,94mm]}{\pi (2,34mm)^3}$$

$$\tau_a = 202,75 MPa$$

$$\tau_m = K_B \frac{(8 F_m D)}{\pi d^3}$$

$$\tau_m = 1,28 \frac{[8(89,0)11,94mm]}{\pi (2,34mm)^3}$$

$$\tau_m = 270,33 MPa$$

Tabela 10-4:

Material	Número da ASTM	Expoente m	Diâmetro, in	A, kpsi · in ^m	Diâmetro, mm	A, MPa · mm ^m
Fio musical*	A228	0,145	0,004-0,256	201	0,10-6,5	2211
Fio OQ&T (temperado em banho de óleo e revenido)†	A229	0,187	0,020-0,500	147	0,5-12,7	1855
Fio repuxado duro‡	A227	0,190	0,028-0,500	140	0,7-12,7	1783
Fio de cromo-vanádio§	A232	0,168	0,032-0,437	169	0,8-11,1	2005
Fio de cromo-silício	A401	0,108	0,063-0,375	202	1,6-9,5	1974
Fio de aço inoxidável 302#	A313	0,146	0,013-0,10	169	0,3-2,5	1867
		0,263	0,10-0,20	128	2,5-5	2065
		0,478	0,20-0,40	90	5,10	2911
Fio de bronze-fósforo**	B159	0	0,004-0,022	145	0,1-0,6	1000
		0,028	0,022-0,075	121	0,6-2	913
		0,064	0,075-0,30	110	2-7,5	932

* Superfície suave, livre de defeitos e com acabamento brilhante e lustroso.

† Tem uma escama leve de termotratamento que deve ser removida antes de chapeamento (revestimento metálico).

‡ Superfície suave e brilhante sem marcas visíveis.

§ Fio revenido de qualidade aeronáutica, pode também ser obtido recozido.

|| Revenido para Rockwell C49, mas pode ser obtido sem revenido.

Aço inoxidável do tipo 302.

** Revenido CA510.

Fonte: *Design Handbook*, 1987, p. 19. Cortesia da Associated Spring.

$$A = 201$$

$$m = 0,145$$

$$S_{ut} = \frac{A}{d^m}$$

$$S_{ut} = \frac{201}{0,092^{0,145}} = 284,1 Kpsi$$

$$S_{ut} = 284,1 Kpsi \cdot 6,89 = 1957 MPa$$

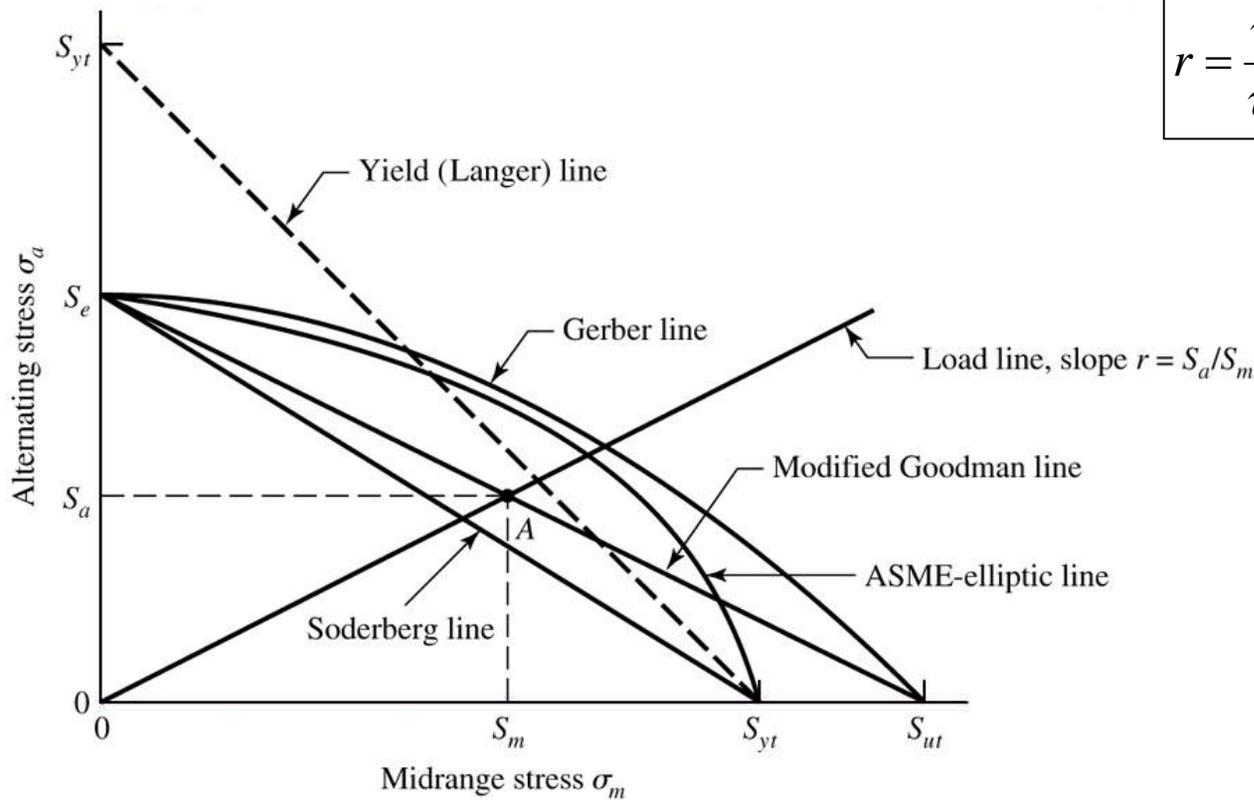
EXEMPLO 10-4

Resistência ao cisalhamento:

$$S_{su} = 0,67 S_{ut} = 0,67(1957 MPa) = 1311 MPa = 190,3 kpsi$$

Linha de carga:

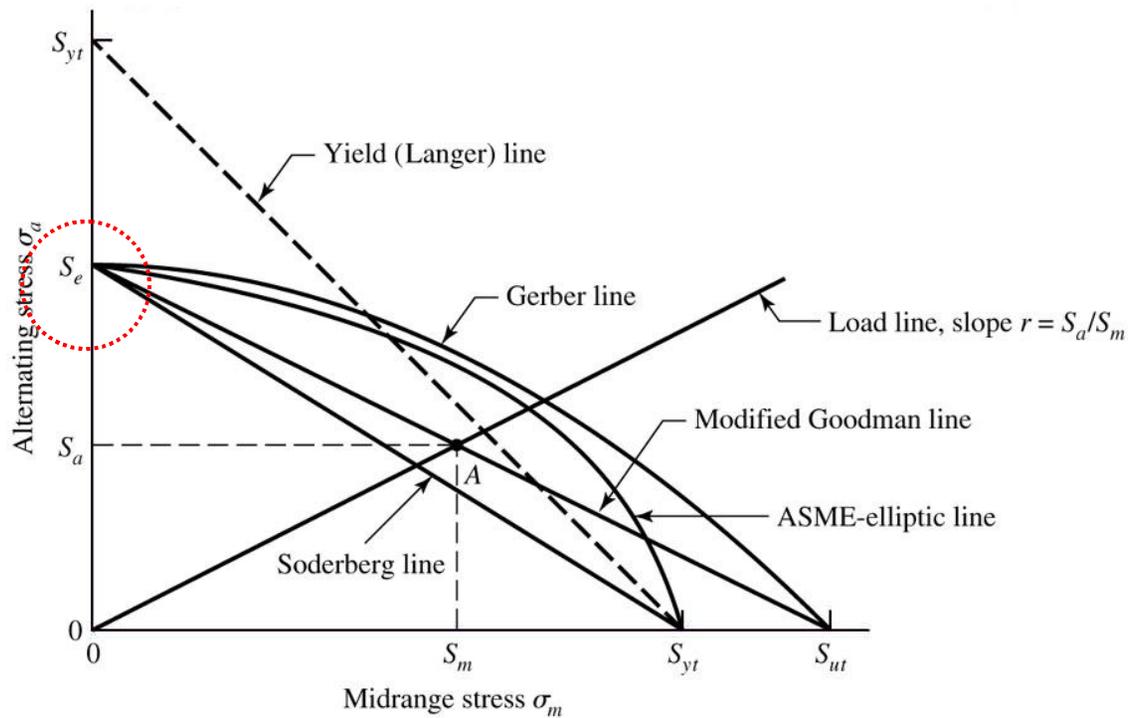
$$r = \frac{\tau_a}{\tau_m} = \frac{202,75}{270,33} = 0,75$$



EXEMPLO 10-4

a) Ordenada de intersecção de Gerber para dados de Zimmerli:

$$S_{se} = \frac{S_{sa}}{1 - \left(\frac{S_{sm}}{S_{su}}\right)^2} = \frac{35}{1 - \left(\frac{55}{190,3}\right)^2} = 38,2 \text{ kpsi} \cdot 6,89 \frac{\text{MPa}}{\text{kpsi}} = 263,2 \text{ MPa}$$



EXEMPLO 10-4

Componente de amplitude de resistência S_{sa} (Tabela 7-10):

$$S_{sa} = \frac{r^2 S_{su}^2}{2 S_{se}} \left[-1 + \sqrt{1 + \left(\frac{2 S_{se}}{r S_{su}} \right)^2} \right] = 35,8 \text{ kpsi} = 246,7 \text{ MPa}$$

Fator de fadiga de segurança n_f é dado por:

$$n_f = \frac{S_{sa}}{\tau_a} = \frac{246,7 \text{ MPa}}{202,75 \text{ MPa}} = 1,22$$

EXEMPLO 10-4

b) Critério de falha de Sines ignora S_{sm} , de modo que para os dados de Zimmerli com $S_{sa} = 246,7\text{MPa}$:

$$n_f = \frac{S_{sa}}{\tau_a} = \frac{35\text{ kpsi} \cdot 6,89\text{MPa}}{202,75\text{MPa}} = 1,189$$

c) A ordenada de intersecção S_{se} , para o critério de falha de Goodman com dados de Zimmerli é:

$$S_{se} = \frac{S_{sa}}{1 - \left(\frac{S_{sm}}{S_{su}}\right)} = \frac{241,15\text{MPa}}{1 - \left(\frac{55 \cdot 6,89}{190,3 \cdot 6,89}\right)} = 339,18\text{MPa}$$

A componente de amplitude da resistência S_{sa} , para o critério de falha de Goodman (Tabela 7-8) é:

$$S_{sa} = \frac{r S_{se} S_{su}}{r S_{su} + S_{se}} = \frac{0,75(339,18)1311\text{MPa}}{0,75(1311) + 339,18} = 252,18\text{MPa}$$

Fator de fadiga de segurança n_f é dado por:

$$n_f = \frac{S_{sa}}{\tau_a} = \frac{252,18\text{MPa}}{202,75\text{MPa}} = 1,243$$

EXEMPLO 10-4

d) Razão de mola:

$$k = \frac{d^4 G}{8D^3 N_a} = \frac{(2,34\text{mm})^4 81 \cdot 10^3 \text{ N/mm}^2}{8(14,28\text{mm})^3 21} = 4,964 \text{ N/mm} \quad (48,1 \text{ lbf/in})$$

$$W = \frac{\pi^2 d^2 D N_a \gamma}{4}$$

$$W = \frac{\pi^2 (0,00234\text{m})^2 (0,01428\text{m})(21)(7800 \text{ kg/m}^3 \cdot 9,81)}{4} = 0,310 \text{ N} \quad (0,0586 \text{ lbf})$$

$$f_n = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{k g}{W}} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{4964(9,81)}{0,310}} = 198 \text{ Hz}$$

REFERÊNCIAS

SHIGLEY, J.E., MISCHKE, C.R., BUDYNAS, R.G., *Projeto de Engenharia mecânica, 7ª edição, Bookman.*

NORTON, R., *Projeto de Máquinas – Uma Abordagem Integrada, 2ª Edição, Bookman.*