

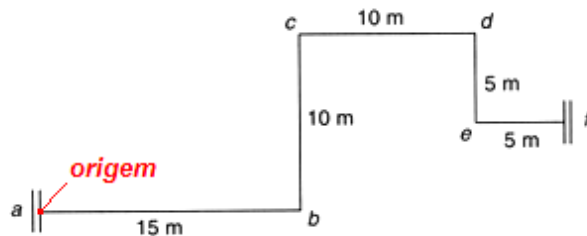
- **ANÁLISE PELO CENTRÓIDE**

É um método de estimativa das cargas térmicas que exige do analista um trabalho um pouco maior do que a análise da viga cantiléver guiada, mas apresenta resultados conservativos e condizentes com a realidade.

A análise pelo centróide consiste em considerar que a expansão de um determinado sistema pode ser estimada empregando-se como referência o centro de gravidade deste sistema. Em outras palavras, enquanto o método da viga cantiléver guiada consiste em estimar como a expansão de um determinado membro do sistema é absorvida pela seção vizinha, **a análise pelo centróide verifica o sistema como um conjunto unificado, levando em consideração inclusive a flexibilidade dos tubos em curva. Entretanto, este método não considera a atuação das restrições e suportes sobre o sistema, ou mesmo a eventual movimentação dos bocais.**

EXEMPLO NUMÉRICO 15 (Exemplo 7-8 no livro)

Considere apenas o sistema bidimensional apresentado (tridimensional é extremamente complexo por este método) na Figura 7-11. Estimar através da análise pelo centróide, as forças, momentos e tensões geradas pela expansão térmica, partindo dos seguintes dados: diâmetro nominal de 12 polegadas, sch standard; tubos em aço-carbono ASTM A-106 Gr B; temperatura de projeto, 180°C; norma aplicável, ASME B31.3.



Ponto	Coordenadas	
	x	y
a	0	0
b	15	0
c	15	10
d	25	10
e	25	5
f	30	5

Figura 7-11 Esquema, fora de escala, do sistema do Exemplo 7-8

Solução:

- 1) Tomando origem inicial do sistema no ponto a;
- 2) Partindo do material especificado e da temperatura de operação, temos:
 $J = 1,163 \times 10^{-4} \text{ m}^4$; $W = 7,18 \times 10^{-4} \text{ m}^3$; $e = 1,91 \text{ mm/m} = 1,91 \times 10^{-3}$ e $E = 187,7 \text{ GPa}$.
- 3) Localizar o centro de gravidade ou centróide do sistema. Denominando x' e y' as distâncias do centro de gravidade de cada membro ao ponto de referência, e L o comprimento de cada membro. A Tabela 7-1 apresenta a metodologia, empregando o ponto a como referência.

Tabela 7-11 Cálculo do centróide do sistema da Figura 7-11

Pontos	Coordenadas		Membro	L	CG		Lx'	Ly'
	x	y			x'	y'		
a	0	0	a-b	15	7,5	112,5	0	0
b	15	0	b-c	10	15	150	5	50
c	15	10	c-d	10	20	200	10	100
d	25	10	d-e	5	25	125	7,5	37,5
e	25	5	e-f	5	27,5	137,5	5	25
f	30	5						
				$\Sigma L = 45$	$\Sigma Lx' = 725$		$\Sigma Ly' = 212,5$	

- 4) Então as coordenadas do centro de gravidade do sistema:

$$\bar{x} = \frac{\sum L \cdot x'}{\sum L} = \frac{725}{45} = 16,111 \text{ m}$$

$$\bar{y} = \frac{\sum L \cdot y'}{\sum L} = \frac{212,5}{45} = 4,722 \text{ m}$$

(7-38)

- 5) Determinar os momentos de inércia pelas fórmulas seguintes:

$$J_x = L^3 \frac{\text{sen}^2 \theta}{12} + LY_G^2 \quad (7-39)$$

$$J_y = L^3 \frac{\text{cos}^2 \theta}{12} + LX_G^2 \quad (7-40)$$

$$J_{xy} = L^3 \frac{\text{sen}2\theta}{24} + LX_G Y_G \quad (7-41)$$

onde especial atenção estão no que as X_G e Y_G nas fórmulas (7- 39, 7- 40 e 7- 41) são consideram as novas coordenadas do centróide do membro (tubo) em relação ao novo sistema (X, Y) de coordenação com novo origem no centróide do sistema e o ângulo θ é formado pelo membro (tubo) em consideração em relação ao novo eixo X .

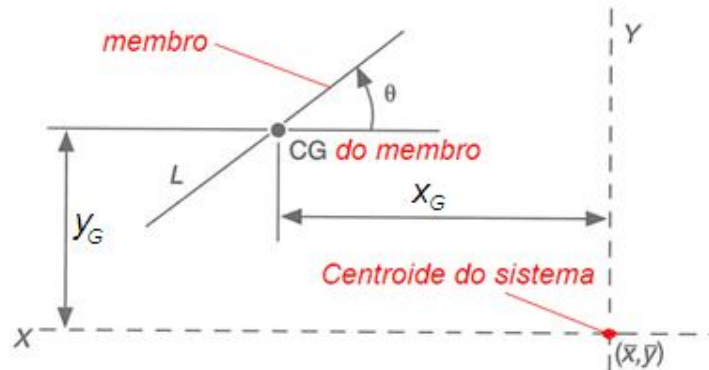


Figura 7-12 Membro retilíneo bidimensional.

Por exemplo para o membro a-b, tem se: $L_{a-b} = 15m$, $\theta=0^\circ$, $X_G = -(16,111m - 7,5m) = -8,611m$ e $Y_G = -(4,722m - 0) = -4,722m$, então:

$$J_x = L_{a-b}^3 \frac{\text{sen}^2 0^\circ}{12} + L_{a-b} Y_G^2 = 15m \times (-4,722m)^2 = 334,49m^3$$

$$J_y = L_{a-b}^3 \frac{\text{cos}^2 0^\circ}{12} + L_{a-b} X_G^2 = \frac{(15m)^3}{12} + 15m \times (-8,611m)^2 = 1393,5m^3$$

$$J_{xy} = L_{a-b}^3 \frac{\text{sen}(2 \times 0^\circ)}{24} + L_{a-b} X_G Y_G = 15m \times (-8,611m) \times (-4,722m) = 609,92m^3$$

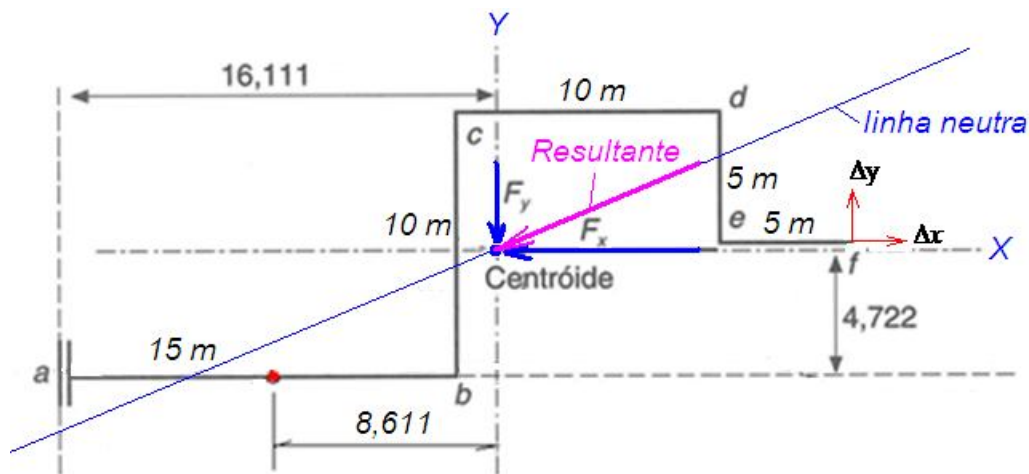


Figura 7-13 Disposição do centróide e forças no sistema do Exemplo 7-8.

A Tabela 7-12 lista os resultados dos momentos de inércia de cada membro.

Tabela 7-12 Cálculo dos momentos de inércia do sistema da Figura 7-11

J_{xy} a-b	Equação 7-41	609,95	J_x a-b	Equação 7-39	334,49	J_y a-b	Equação 7-40	1393,52
b-c	Equação 7-41	-3,09	b-c	Equação 7-39	84,10	b-c	Equação 7-40	12,35
c-d	Equação 7-41	205,25	c-d	Equação 7-39	278,55	c-d	Equação 7-40	234,57
d-e	Equação 7-41	123,46	d-e	Equação 7-39	49,00	d-e	Equação 7-40	395,06
e-f	Equação 7-41	15,82	e-f	Equação 7-39	0,39	e-f	Equação 7-40	658,95
$\Sigma J_{xy} = 951,39$			$\Sigma J_x = 746,53$			$\Sigma J_y = 2694,44$		

6) Determinar as forças **no ponto considerado** pelas fórmulas:

$$F_x = \frac{L_x \sum J_y + L_y \sum J_{xy}}{(\sum J_x) \cdot (\sum J_y) - (\sum J_{xy})^2} \cdot e \cdot E \cdot J \quad (7-42)$$

$$F_y = \frac{L_y \sum J_x + L_x \sum J_{xy}}{(\sum J_x) \cdot (\sum J_y) - (\sum J_{xy})^2} \cdot e \cdot E \cdot J \quad (7-43)$$

onde $L_x=30$ m e $L_y= 5$ m são as **distancias** entre os pontos inicial e final do sistema. Então para o exemplo (**no livro, os valores são totalmente errados**):

$$F_x = \frac{30 \times 2694,44 + 5 \times 951,39}{746,53 \times 2694,44 - 951,39^2} \cdot 1,91 \times 10^{-3} \cdot 187,7 \times 10^9 \cdot 1,163 \times 10^{-4} = 3226,06N$$

$$F_y = \frac{5 \times 746,53 + 30 \times 951,39}{746,53 \times 2694,44 - 951,39^2} \cdot 1,91 \times 10^{-3} \cdot 187,7 \times 10^9 \cdot 1,163 \times 10^{-4} = 1216,48N$$

As direções das forças F_x e F_y são determinadas seguintes: Supor o ponto a fixo e o ponto f livre (**Obs. pode ser contrário**); pela dilatação, pode definir as direções das expansões Δx e Δy como mostradas na Figura 7-13. As direções das forças F_x e F_y são contra as Δx e Δy respectivamente, devido o ponto f é fixo verdadeiramente. Então as direções das forças F_x e F_y no ponto f são como as mostradas. Para o ponto a, as direções das reações são contrárias, devido os equilíbrios das forças em X e Y.

7) Determinar os momentos em qualquer ponto e o momento máximo do sistema

O momento em qualquer ponto é obtido através de multiplicando F_x e F_y pelas distâncias entre o ponto considerado e as linhas de ações F_x e F_y . O sinal positivo do momento é para ante-horário. Assim:

$$\begin{aligned}M_a &= F_x \times 4,722 - F_y \times 16,111 = 3226,06 \times 4,722 - 1216,48 \times 16,111 = -4.365,25 \text{ Nm} \\M_f &= F_y \times (30 - 16,111) - F_x \times 0,278 = 1216,48 \times 13,889 - 3226,06 \times 0,278 = 15.998,85 \text{ Nm} \\M_b &= -F_y \times 1,111 + F_x \times 4,722 = -1216,48 \times 1,111 + 3226,06 \times 4,722 = 13.881,95 \text{ Nm} \\M_c &= -F_x \times 5,278 - F_y \times 1,111 = -3226,06 \times 5,278 - 1216,48 \times 1,111 = -18.378,65 \text{ Nm} \\M_d &= F_y \times 8,889 - F_x \times 5,278 = 1216,48 \times 8,889 - 3226,06 \times 5,278 = -6.213,85 \text{ Nm} \\M_e &= F_y \times 8,889 - F_x \times 0,278 = 1216,48 \times 8,889 - 3226,06 \times 0,278 = 9.916,45 \text{ Nm}\end{aligned}$$

Os resultados obtidos são quase idênticos, exceto o sinal, aos do Exemplo 7-10 do livro onde o método analítico geral simplificado foi aplicado ($M_a=4360 \text{ Nm}$, $M_f=-16000 \text{ Nm}$, $M_b=-13900 \text{ Nm}$, $M_c=18400 \text{ Nm}$, $M_d=6210 \text{ Nm}$, $M_e=-9920 \text{ Nm}$).

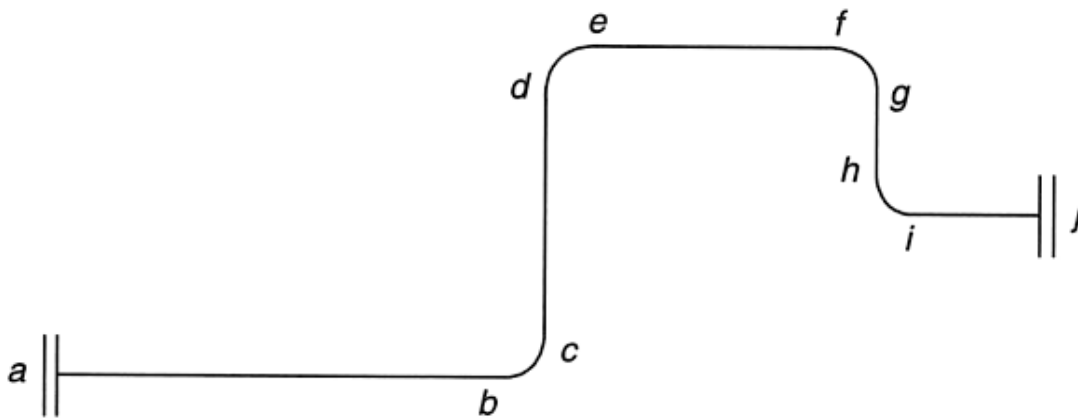
O momento máximo ocorre no ponto c que tem a maior distância à linha neutra (linha de ação do resultante R). Conseqüentemente a tensão máxima no sistema está neste ponto:

$$S_{m\acute{a}x} = \frac{M_{m\acute{a}x}}{W} = \frac{|M_c|}{W} = \frac{18378,65 \text{ Nm}}{7,18 \times 10^{-4} \text{ m}^3} \approx 25,6 \text{ MPa}$$

Comparando $S_{m\acute{a}x}$ com o valor de tensão admissível S_A para o material na temperatura de operação (Anexo 7), podemos verificar se esta configuração do sistema está aprovada ou não. Através do Anexo 7, sabemos que a tensão admissível a 180°C , $S_h = 97,3 \text{ MPa}$ e na temperatura ambiente, $S_c = 110,3 \text{ MPa}$. Empregando a Equação 3-11, podemos estimar a tensão admissível $S_A = 162,2 \text{ MPa}$. Como $S_{m\acute{a}x} = 25,6 \text{ MPa}$ podemos afirmar que o sistema é aceitável quanto às tensões geradas pela expansão térmica.

EXEMPLO NUMÉRICO 16 (Exemplo 7-9 no livro)

Considere o sistema bidimensional apresentado na Figura 7-14. Estimar através da análise pelo centróide, as forças, momentos e tensões geradas pela expansão térmica, partindo dos seguintes dados: diâmetro nominal de 12 polegadas, sch standard; tubos em aço-carbono ASTM A-106 Gr B; temperatura de projeto, 180°C ; norma aplicável, ASME B31.3.



Ponto	Coordenadas	
	x	y
a	0	0
b	14,543	0
c	15,000	0,457
d	15,000	9,543
e	15,457	10,000
f	24,543	10,000
g	25,000	9,543
h	25,000	5,457
i	25,457	5,000
j	30,000	5,000

Figura 7-14 Esquema, fora de escala, do sistema do Exemplo 7-8.

Solução: Pela tabela sabe-se as curvas têm um raio $R=0,457$ m. A posição do centróide da curva CG é mostrado pela Figura 7-15.

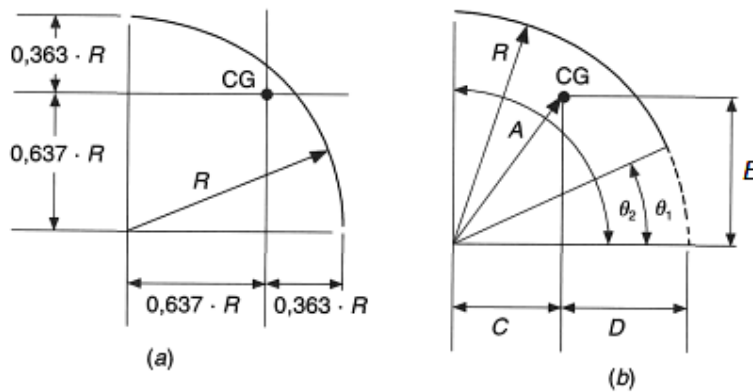


Figura 7-15 Determinação do centro de gravidade de tubos em curva.

Para o caso (b), as dimensões são determinadas por:

$$A = \frac{2 \cdot R}{(\theta_2 - \theta_1)} \cdot \text{sen} \left[\frac{\theta_2 - \theta_1}{2} \right] \quad (\text{ângulos em radianos}) \quad (7-50)$$

$$B = A \cdot \text{sen} \left[\frac{\theta_2 + \theta_1}{2} \right] \quad (7-51)$$

$$C = A \cdot \cos \left[\frac{\theta_2 + \theta_1}{2} \right] \quad (7-52)$$

$$D = R - C \quad (7-53)$$

O comprimento L do tubo em curva é calculado por:

$$L = \frac{K\pi R}{2} \quad (7-54)$$

onde $K = \frac{12\lambda^2 + 10}{12\lambda^2 + 1}$ e $\lambda = \frac{4tR}{(D-t)^2}$ em que t é a espessura do tubo.

A seguir o mesmo procedimento do exemplo anterior:

- 1) Tomando origem inicial do sistema no ponto a;
- 2) Partindo do material especificado e da temperatura de operação, temos:
 $D=323,85$ mm, $t=9,525$ mm, $J = 1,163 \times 10^{-4}$ m⁴; $W = 7,18 \times 10^{-4}$ m³;
 $e = 1,91$ mm/m= $1,91 \times 10^{-3}$ e $E = 187,7$ GPa.
- 3) Localizar o centro de gravidade ou centróide do sistema. Denominando x' e y' as distâncias do centro de gravidade de cada membro ao ponto de referência, e L o comprimento de cada membro. A Tabela 7-13 apresenta a metodologia, empregando o ponto a como referência.

Tabela 7-13 Cálculo do centróide do sistema da Figura 7-14

Pontos	Coordenadas		Trecho	L	CG		L · x'	L · y'
	x	y			x'	y'		
a	0,00	0,00	a-b	14,54	7,27	105,75	0,00	0,00
b	14,54	0,00	b-c	5,42	14,83	80,46	0,17	0,90
c	15,00	0,46	c-d	9,09	15,00	136,28	5,00	45,43
d	15,00	9,54	d-e	5,42	15,17	82,26	9,83	53,34
e	15,46	10,00	e-f	9,09	20,00	181,71	10,00	90,86
f	24,54	10,00	f-g	5,42	24,83	134,71	9,83	53,34
g	25,00	9,54	g-h	4,09	25,00	102,14	7,50	30,64
h	25,00	5,46	h-i	5,42	25,17	136,51	5,62	30,50
i	25,46	5,00	i-j	4,54	27,73	125,97	5,00	22,71
j	30,00	5,00						
				$\Sigma L = 63,04$	$\Sigma L \cdot x' = 1085,79$	$\Sigma L \cdot y' = 327,73$		

4) Então as coordenadas do centro de gravidade do sistema:

$$\bar{x} = \frac{\sum L \cdot x'}{\sum L} = \frac{1085,79}{63,04} = 17,224 \text{ m} \quad \bar{y} = \frac{\sum L \cdot y'}{\sum L} = \frac{327,73}{63,04} = 5,199 \text{ m}$$

5) Determinar os momentos de inércia

Para tubos retos as fórmulas são as mesmas 7-39, 7-40 e 7-41. Para os tubos em curva, seguintes fórmulas são empregados:

$$J_x = 0,149KR^3 + LY_G^2 \quad (7-59)$$

$$J_y = 0,149KR^3 + LX_G^2 \quad (7-60)$$

$$J_{xy} = \pm 0,137KR^3 + LX_GY_G \quad (7-61)$$

onde o sinal negativo da (7-61) para o caso se os dois ou nem eixos positivos de X e Y cruzar com a curva (Figura 7-16 (a) ou (b)) e o sinal positivo para o caso se apenas um dos eixos positivos cruzar com a curva (Figura 7-16 (c)). Por essa regra, as curvas b-c e d-e devem levar o sinal positivo e as f-g e h-i o sinal negativo.

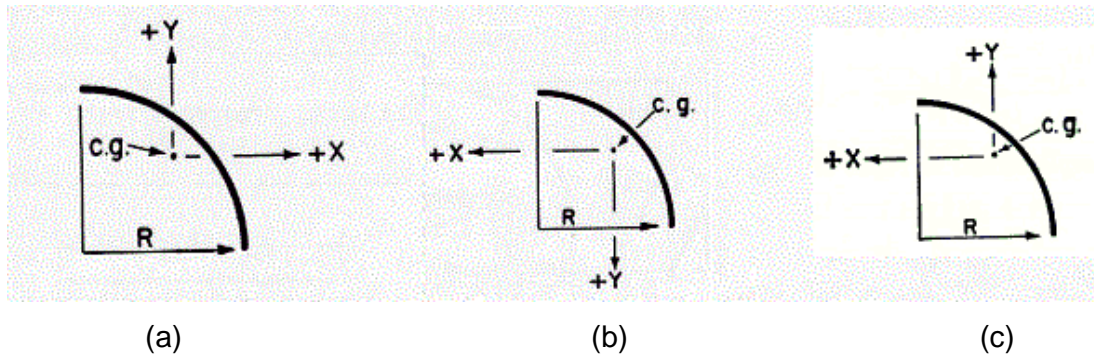


Figura 7-16. Como definir os sinais da fórmula (7-61). Se os eixos não passa o centróide da curva, a definição segue mesmo critério. Para (a) e (b), o sinal é negativo e (c) positivo.

Por exemplo para o curva b-c, tem se:

$$\lambda = \frac{4tR}{(D-t)^2} = \frac{4 \times 9,525\text{mm} \times 457\text{mm}}{(323,85\text{mm} - 9,525\text{mm})^2} \approx 0,17623$$

$$K = \frac{12\lambda^2 + 10}{12\lambda^2 + 1} = \frac{12 \times 0,17623^2 + 10}{12 \times 0,17623^2 + 1} \approx 7,5565$$

$$L_{b-c} = \frac{K\pi R}{2} = \frac{7,5565 \times \pi \times 0,457\text{m}}{2} \approx 5,424\text{m}$$

$$X_G = -(17,224\text{m} - 15\text{m}) - 0,363R = -2,224\text{m} - 0,363 \times 0,457\text{m} = -2,39\text{m}$$

$$Y_G = -(5,199\text{m} - 0,363 \times 0,457\text{m}) = -5,033\text{m}$$

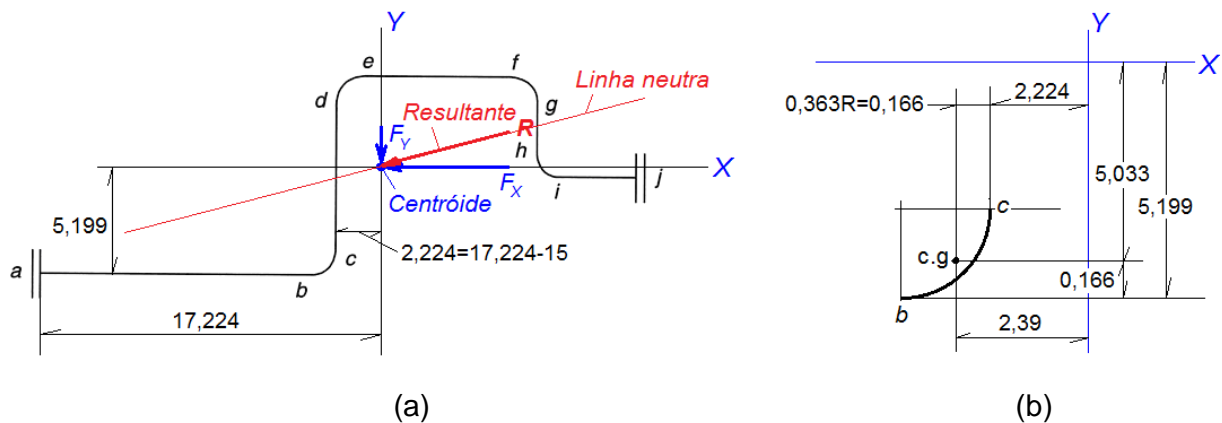


Figura 7-17 A posição do centróide do sistema e a força resultante **R**. (a) A posição do centróide da curva b-c em relação ao centróide do sistema.

Segunda a relação entre o centróide da curva b-c e o do sistema, pode-se calcular:

$$J_X = 0,149KR^3 + LY_G^2 = 0,149 \times 7,5565 \times 0,457^3 + 5,424 \times (-5,033)^2 = 0,1075 + 137,5033 = 137,11\text{m}^3$$

$$J_Y = 0,149KR^3 + LX_G^2 = 0,149 \times 7,5565 \times 0,457^3 + 5,424 \times (-2,39)^2 = 0,1075 + 30,9824 = 31,09\text{m}^3$$

$$J_{XY} = +0,137KR^3 + LX_GY_G = 0,137 \times 7,5565 \times 0,457^3 + 5,424 \times (-2,39) \times (-5,033) = 65,34\text{m}^3$$

A Tabela 7-14 lista os resultados dos momentos de inércia de cada membro.

Tabela 7-14 Cálculo dos momentos de inércia do sistema da Figura 7-14

J_{xy}	a-b	Equação 7-41	752,46	J_x	a-b	Equação 7-39	393,05	J_y	a-b	Equação 7-40	1696,82
	b-c	Equação 7-61	65,11		b-c	Equação 7-59	137,43		b-c	Equação 7-60	31,07
	c-d	Equação 7-41	4,02		c-d	Equação 7-39	62,86		c-d	Equação 7-40	44,94
	d-e	Equação 7-61	-51,62		d-e	Equação 7-59	116,59		d-e	Equação 7-60	23,07
	e-f	Equação 7-41	121,10		e-f	Equação 7-39	209,44		e-f	Equação 7-40	132,52
	f-g	Equação 7-61	191,14		f-g	Equação 7-59	116,59		f-g	Equação 7-60	314,09
	g-h	Equação 7-41	73,11		g-h	Equação 7-39	27,32		g-h	Equação 7-40	247,04
	h-i	Equação 7-61	18,37		h-i	Equação 7-59	1,08		h-i	Equação 7-60	342,07
	i-j	Equação 7-41	-9,48		i-j	Equação 7-39	0,18		i-j	Equação 7-40	509,10
			$\Sigma J_{xy} = 1164,21$				$\Sigma J_x = 1064,55$				$\Sigma J_y = 3340,72$

6) Determinar as forças **no ponto considerado** pelas fórmulas (7-42) e (7-43):

$$F_x = \frac{30 \times 3340,72 + 5 \times 1164,21}{1064,55 \times 3340,72 - 1164,21^2} \times 1,91 \times 10^{-3} \times 187,7 \times 10^9 \times 1,163 \times 10^{-4} \approx 2009,1N$$

$$F_y = \frac{5 \times 1064,55 + 30 \times 1164,21}{1064,55 \times 3340,72 - 1164,21^2} \times 1,91 \times 10^{-3} \times 187,7 \times 10^9 \times 1,163 \times 10^{-4} \approx 762,56N$$

Observação: no livro, os valores F_x e F_y são totalmente errados.

As direções das forças F_x e F_y são determinadas de mesma maneira do exemplo anterior.

7) Determinar os momentos em qualquer ponto e o momento máximo do sistema

O momento em qualquer ponto é obtido através de multiplicando F_x e F_y pelas distâncias entre o ponto considerado e as linhas de ações F_x e F_y . O sinal positivo do momento é para ante-horário. Assim, segunda da Figura 7-17, obtemos

$$M_a = F_x \times 5,199 - F_y \times 17,224 = 2009,1 \times 5,199 - 726,56 \times 17,224 = -2689,02Nm$$

$$M_j = F_x \times 0,199 + F_y \times (30 - 17,224) = 2009,1 \times 0,199 + 726,56 \times 12,776 = 10142,28Nm$$

$$M_b = F_x \times 5,199 - F_y \times (2,224 + 0,457) = 2009,1 \times 5,199 - 726,56 \times 2,681 = 8400,89Nm$$

$$M_e = -F_x \times (10 - 5,199) - F_y \times (2,224 - 0,457) = 2009,1 \times 4,801 - 726,56 \times 1,767 = -10993,13Nm$$

O momento máximo ocorre no ponto e que tem a maior distância à linha neutra (linha de ação do resultante R). Conseqüentemente a tensão máxima no sistema está neste ponto:

$$S_{m\acute{a}x} = \frac{M_{m\acute{a}x}}{W} = \frac{|M_e|}{W} = \frac{10993,13Nm}{7,18 \times 10^{-4} m^3} \approx 15,3MPa$$

Que está bem menor que o caso que todos os tubos são retos ($S_{m\acute{a}x} = 25,6MPa$) devido que as curvas diminuíram as forças F_x e F_y .

QUESTÕES

16. Repita **EXEMPLO NUMÉRICO 15** com $L_{a-b}=10$ m, $L_{b-c}=10$ m, $L_{c-d}=15$ m, $L_{d-e}=6$ m, $L_{e-f}=5$ m e a origem no ponto a para calcular o centróide.

Resposta:

$$\bar{x} = 15,217m, \bar{y} = 5,696m$$

$$\sum J_x = 733,03m^3, \sum J_y = 3097,82m^3, \sum J_{xy} = 738,04m^3$$

$$F_x = 2316,49N, F_y = 605,74N$$

$$M_a = 3977,2Nm, M_b = 10034,6Nm, M_c = -13130,3Nm,$$

$$M_d = -4044,2Nm, M_e = 1997,2Nm, M_f = 12883,4Nm$$

$$S_{m\acute{a}x} = \frac{M_{m\acute{a}x}}{W} = \frac{|M_c|}{W} = \frac{13130,3Nm}{7,18 \times 10^{-4} m^3} \approx 18,3MPa$$