

7. ESCOAMENTOS EXTERNOS

- Escoamento interno: o fluido é limitado por superfícies sólidas.
Exemplo: escoamento em dutos, tubos.

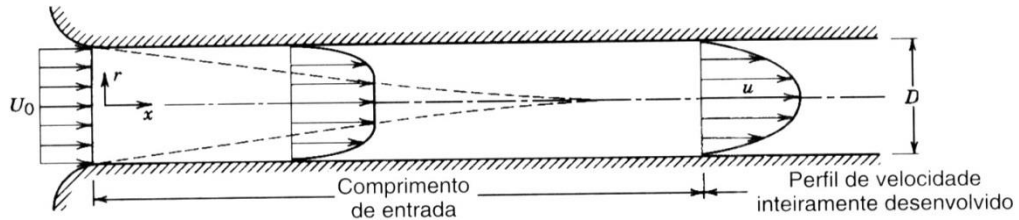


Figura 1 – Escoamento interno em um duto

- Escoamento externo: o fluido envolve um objeto sólido.
Exemplo: escoamento sobre um avião.

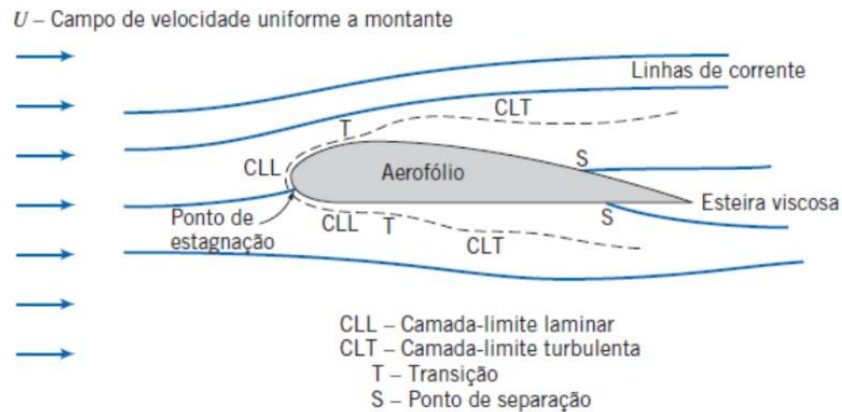


Figura 2 – Escoamento externo sobre um aerofólio

MOTIVAÇÃO

- Escoamento interno: Q (vazão) e Δp (pressão). Utilizado para dimensionamento de turbinas, bombas, ventiladores, etc.
- Escoamento externo: forças de arrasto F_d (o subscrito d se refere a “drag”, arrasto em inglês), forças de sustentação F_l (l para “lift”), coeficiente de pressão C_p . Conceitos utilizados para dimensionar estruturas de automóveis, aviões, edifícios, navios, etc. e minimizar gastos de energia.

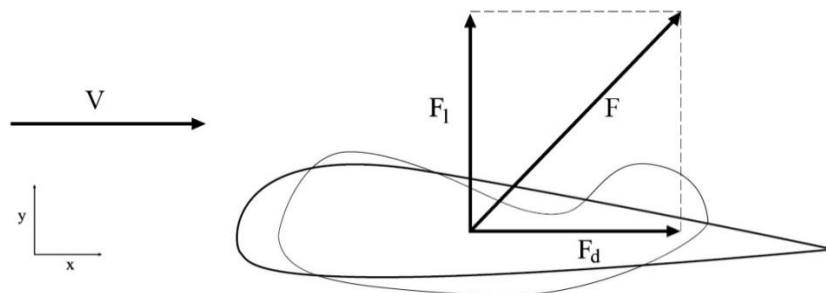


Figura 3 – Escoamento sobre um sólido

Onde:

F = força total exercida por um fluido ao escoar sobre um objeto

F_l = força de sustentação; componente de F perpendicular à direção do escoamento

F_d = força de arrasto; componente de F paralela à direção do escoamento

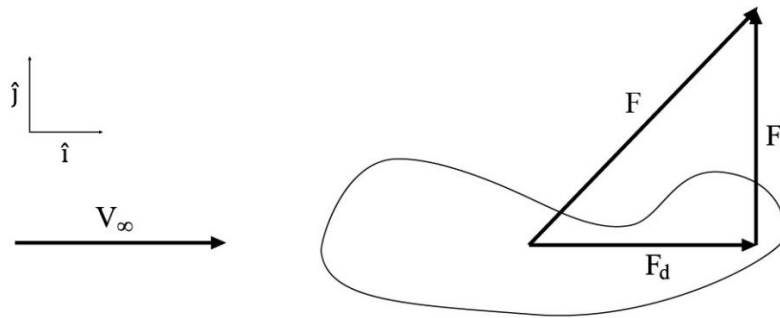


Figura 4 – Escoamento sobre um sólido

$$\vec{F} = \vec{F}_\mu + \vec{F}_p$$

Onde:

$$\vec{F}_\mu = \int_A \tau_w \hat{t} dA \quad (\text{força de atrito})$$

$$\tau_w = \mu \left(\frac{dV_t}{d\hat{n}} \right)_w \quad (\text{tensão na parede do objeto})$$

$$\vec{F}_p = - \int_A p \hat{n} dA \quad (\text{força devido à pressão})$$

\hat{t} = vetor unitário tangente ao objeto

A = área do objeto em contato com o fluido

\hat{n} = vetor unitário normal ao objeto

V = velocidade

μ = viscosidade absoluta do fluido

w = parede

p = pressão

$$F_d = (\vec{F}_\mu + \vec{F}_p) \cdot \hat{i}$$

$$F_l = (\vec{F}_\mu + \vec{F}_p) \cdot \hat{j}$$

→ **Escoamento sobre placa plana paralela ao escoamento ($\theta = 0^\circ$):**

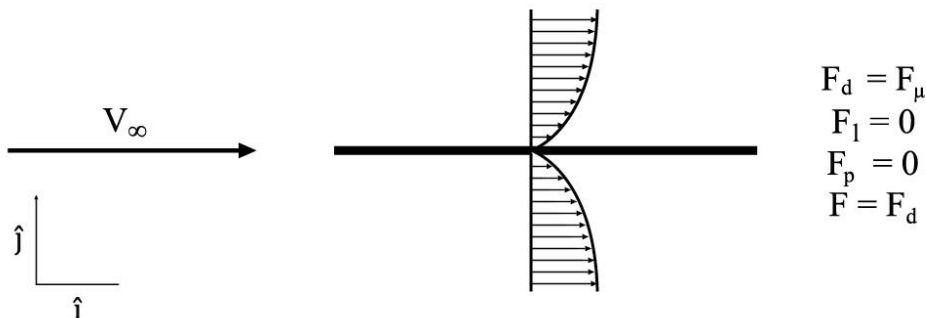


Figura 5 – Escoamento paralelo à placa plana

→ Escoamento sobre placa plana perpendicular ao escoamento ($\theta = 90^\circ$):

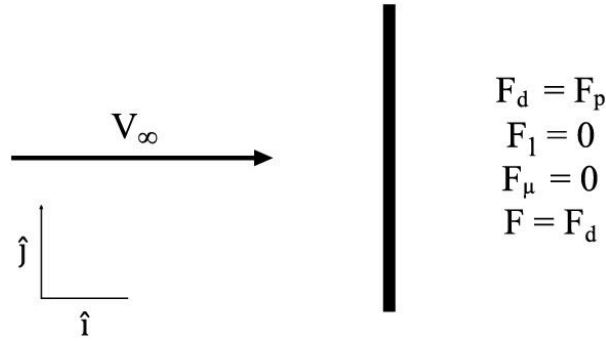


Figura 6 – Escoamento perpendicular à placa plana

Gradientes de pressão

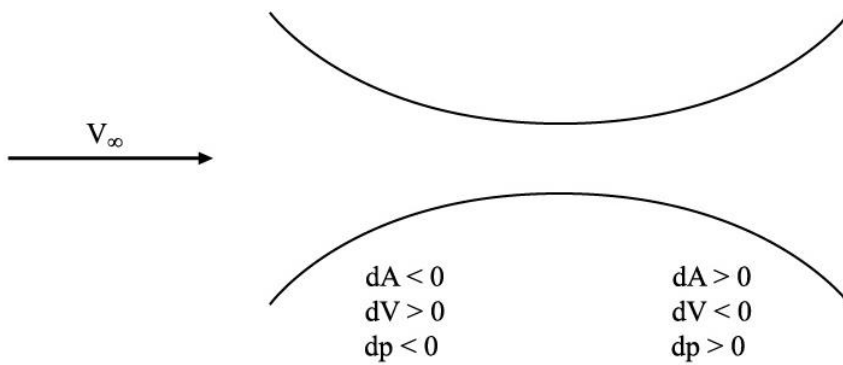


Figura 7 – Gradientes de pressão

Forças que atuam sobre uma partícula de fluido

- Força de inércia ($\rho V^2 A$) → no sentido do escoamento
- Força de atrito ($\tau_w = \mu \frac{dV}{dn} A$) → contrário ao escoamento
- Força de pressão (pA):
 - $dp < 0$ → no sentido do escoamento
 - $dp > 0$ → contrário ao escoamento

Deslocamento da camada limite

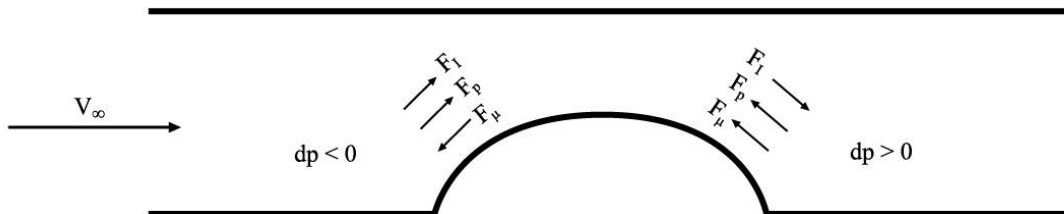


Figura 8 – Comportamento de fluidos ao encontrar obstáculos

No ponto em que a força de pressão torna-se maior do que a força de inércia, há a reversão do escoamento; neste ponto ocorre o deslocamento de camada-limite.

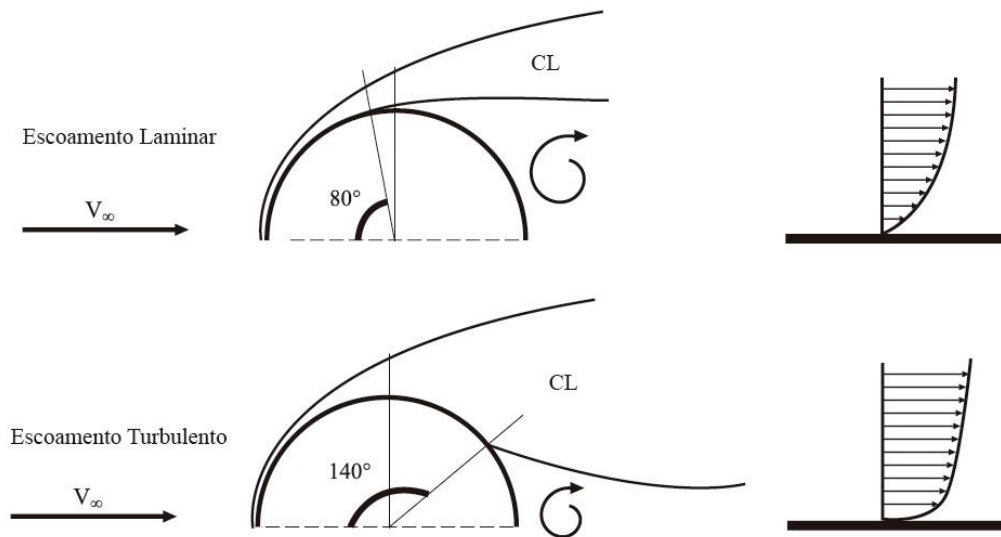


Figura 9 – Diferenças de comportamento entre escoamento laminar e turbulento

Carros de corrida

<u>Fórmula 1</u>		<u>Indy</u>
V = 340 km/h	$F_d = \frac{1}{2} \rho V^2 A C_d$	V = 400 km/h
P = 670 à 740 HP ≈ 500 à 552 kW	P = F _d V	P = 700 à 850 HP ≈ 522 à 634 kW
A = 2 x 0,95 = 1,9m ²	$P = \frac{C_d}{2} \rho V^3 A$	A = 1,99 x 1,09 = 2,17m ²
ρ = 1,22 kg/m ³		ρ = 1,22 kg/m ³
C _d ≈ 0,57 à 0,51	$C_d = \frac{2P}{\rho V^3 A}$	C _d = 0,29 à 0,35

Coeficientes

Geralmente, os engenheiros calculam F_d e F_l com base nos coeficientes de arrasto (C_d) e de sustentação (C_l), adimensionais, definidos por:

$$C_d = \frac{F_d}{qA} = \frac{F_d}{\left(\frac{1}{2} \rho V^2\right) A} \quad (1)$$

Onde:

$$q = \frac{1}{2} \rho V^2 = \text{pressão dinâmica do escoamento [Pa]}$$

A = área de referência [m²], geralmente é a área do objeto sólido projetada na direção do escoamento (exceto para asas de aviões)

ρ = massa específica do fluido [kg/m³]

V = velocidade **relativa** entre o objeto e o fluido [m/s]

C_d = coeficiente de arrasto

$$C_f = \frac{F_f}{qA} = \frac{F_f}{\left(\frac{1}{2} \rho V^2\right) A} \quad (2)$$

Onde:

$$q = \frac{1}{2} \rho V^2 = \text{pressão dinâmica do escoamento [Pa]}$$

A = área de referência [m^2], geralmente é a área do objeto sólido projetada na direção do escoamento (exceto para asas de aviões)



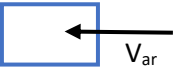

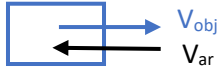

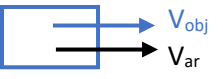


ρ = massa específica do fluido [kg/m^3]

V = velocidade **relativa** entre o objeto e o fluido [m/s]

C_f = coeficiente de sustentação

Velocidade relativa

Tabela 1 – Relações de velocidade relativa.

$V = V_{obj}$  $V_{ar} = 0$ 	$V = V_{ar}$  $V_{ar} \neq 0$ 	$V = V_{obj} + V_{ar} $  $V_{ar} \neq 0$ 	$V = V_{obj} - V_{ar} $  $V_{ar} \neq 0$ Se: $V_{obj} > V_{ar}$  $V_{obj} < V_{ar}$ 
--	--	--	--

Dados sobre o C_d

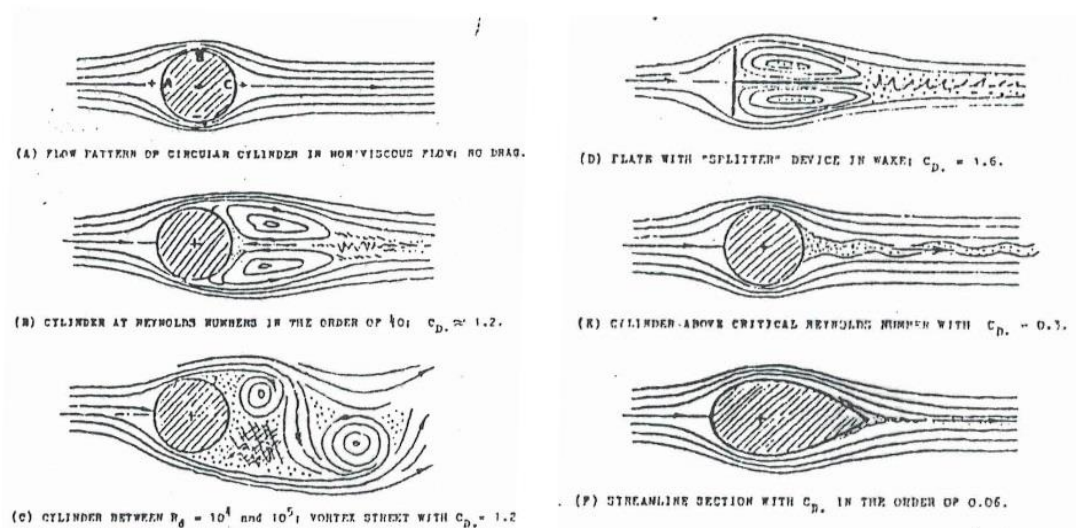


Figura 10 – Padrões teóricos e experimentais de fluxo sobre corpos bidimensionais

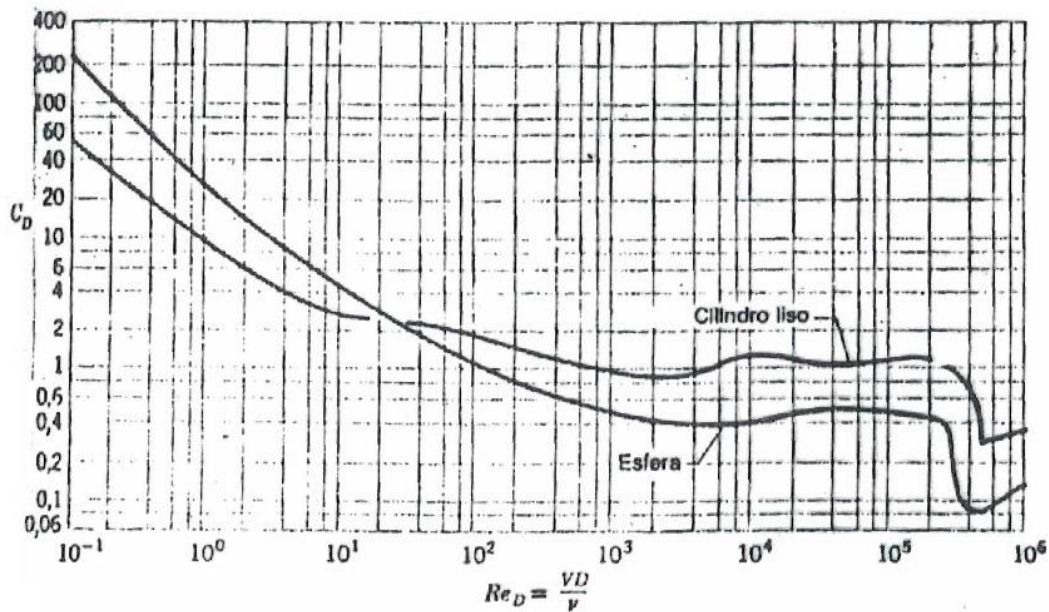


Figura 11 – Coeficiente de arrasto no escoamento transversal sobre um cilindro e no escoamento sobre uma esfera.

→ **Cilindro:** perpendicular ao escoamento.

$$C_d = 1 + \frac{10}{R_{ed}^{2/3}} \quad \text{para } 0 < R_{ed} \leq 2,5 \times 10^5 \quad (4)$$

Onde:

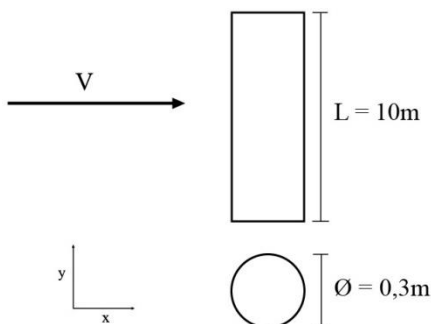
$$R_{ed} = \frac{VD}{v} = \frac{\rho VD}{\mu}$$

A = área de referência = D.L (área projetada)

D = diâmetro do cilindro

L = comprimento do cilindro

Exemplo 1: Calcular a força de arrasto que o ar a 36 km/h exerce sobre um poste com 10m de comprimento e D = 30 cm. Dados: $\rho_{ar} = 1,2\text{kg/m}^3$, $v = 1,5 \times 10^{-5} \text{ m}^2/\text{s}$.



Resolução:

$$R_{ed} = \frac{VD}{v} = \frac{10 \cdot 0,3}{1,5 \times 10^{-5}} = 2 \times 10^5$$

$$C_d = 1 + \frac{10}{R_{ed}^{2/3}} = 1 + \frac{10}{(2 \times 10^5)^{2/3}} = 1,003$$

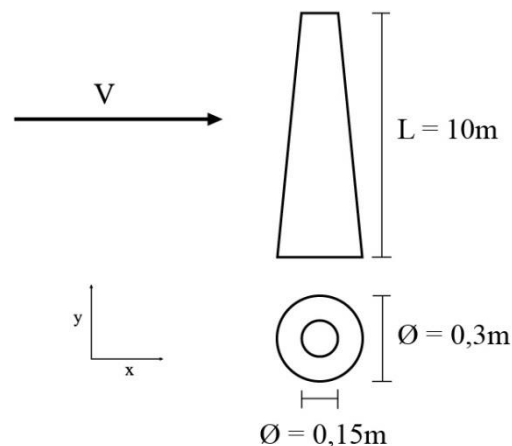
$$F_d = C_d q A$$

$$q = \frac{1}{2} \rho V^2 \cong 60 \text{ Pa}$$

$$A = DL = 3\text{m}^2$$

$$F_d \cong 181 \text{ N}$$

Exercício 1: Resolver o mesmo problema do exemplo 1 mas considerando um poste de formato cônico. Dados: $d = 0,15 \text{ m}$, $D = 0,3 \text{ m}$ e $v = 1,0 \text{ m/s}$



→ **Esfera:**

$$C_d \cong \frac{24}{Re_d} + \frac{6}{1 + \sqrt{Re_d}} + 0,4 \quad \text{para } 0 < Re_d \leq 2 \times 10^5 \quad (6)$$

Onde:

$$A = \text{área de referência } A = \frac{\pi D^2}{4}$$

$$C_d = \frac{24}{Re_d} \quad \text{para } Re_d < 1 \rightarrow \text{Solução exata de Stokes}$$

→ **Trens:**

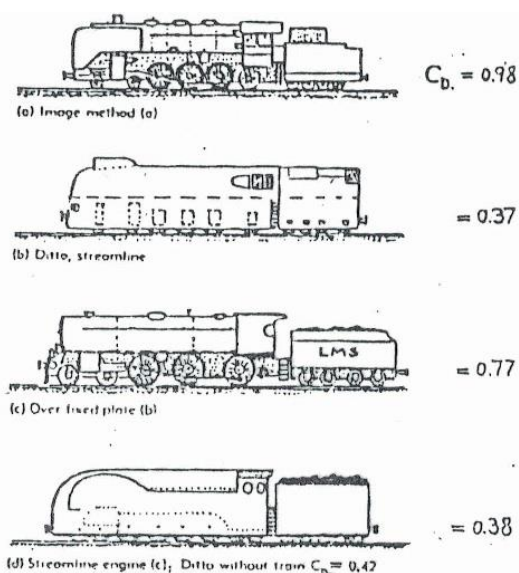


Figura 12 – Coeficientes de arrasto aerodinâmico de locomotivas testadas em túneis de vento na frente de trens.

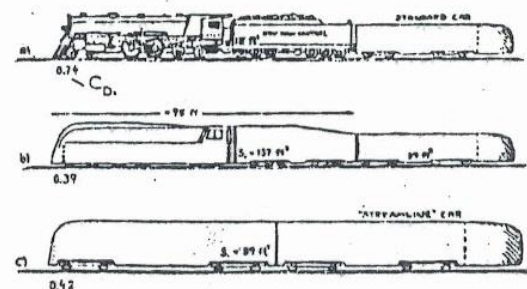


Figura 13 – Coeficientes de arrasto aerodinâmico de três tipos de locomotivas testadas:

- Locomotiva padrão:
 $C_d = 0,74$ com “carro cauda” (carenado)
 $C_d = 0,97$ com 1 carro + carro cauda
 $C_d = 1,17$ com 2 carros + carro cauda
 $C_d = 1,27$ com 3 carros + carro cauda
- Locomotiva simplificada: $C_d = 0,39$ com “carro cauda” (carenado)
- Locomotiva movida a eletricidade:
 $C_d = 0,42$ com “carro cauda” (carenado)
 $C_d = 0,52$ com 1 carro + carro cauda
 $C_d = 0,64$ com 2 carros + carro cauda

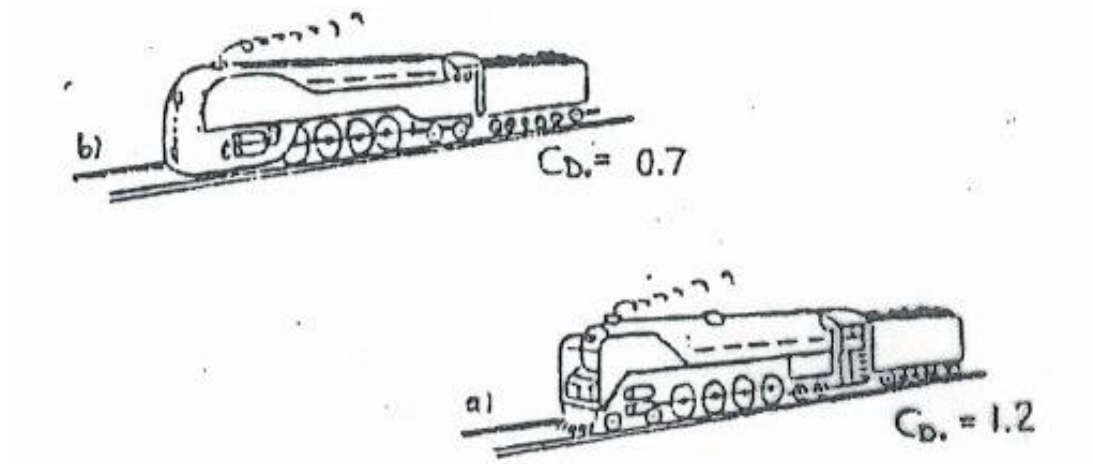


Figura 14 - Coeficientes de arrasto aerodinâmico de uma locomotiva movida a vapor (sem trem): a) design “padrão”, b) design simplificado. O coeficiente de arrasto aerodinâmico desta locomotiva (sem trem) deve ser na ordem de $C_d = 0,2$.

Exemplo 2: Calcular a força de arrasto do ar sobre um TGV que se movimenta a 360 km/h e cuja área frontal seja de 6m^2 e $C_d = 0,3$.

Resolução:

$$F_d = C_d q A$$

$$F_d = C_d \frac{1}{2} V^2 \rho A = 0,3 \times \frac{1}{2} 100^2 \times 1,2 \times 6 = 10,8 \text{ kN}$$

$$\dot{W} = F_d \times V = 1,08 \text{ MW} \quad (\text{potência dissipada pelo arrasto})$$

E se variarmos a velocidade?

$$V = 250 \text{ km/h}$$

$$F_d = 5,21 \text{ kN}$$

$$\dot{W} = 0,36 \text{ MW} = 485 \text{ HP}$$

$$V = 407 \text{ km/h}$$

$$F_d = 13,8 \text{ kN}$$

$$\dot{W} = 1,56 \text{ MW} = 2090 \text{ HP}$$

Percebe-se que a potência varia com V^3 !

→ **Navios:**

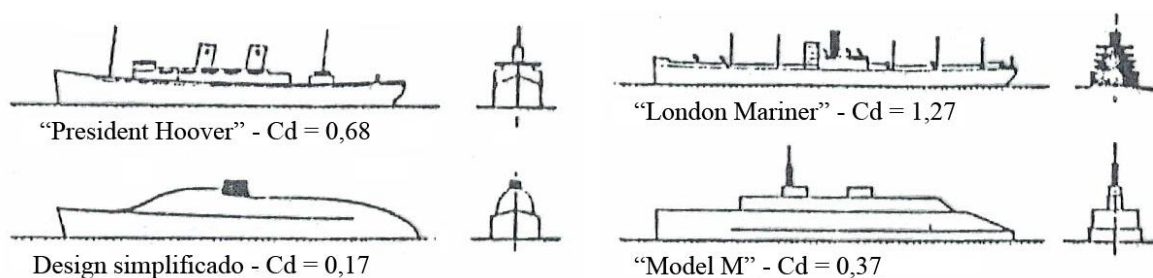


Figura 15 – Resistência aerodinâmica de diversos modelos de navios. O coeficiente de arrasto é baseado na área frontal do casco (acima da linha da água) mais superestrutura

→ Empire State Building:

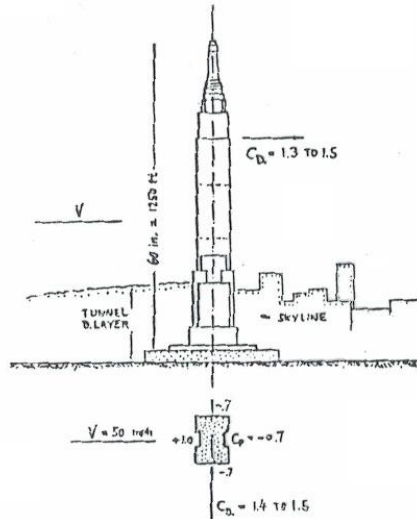
























Figura 16 – Testes em um modelo do Empire State Building: note a camada limite do túnel de vento e o horizonte aproximado das construções vizinhas.

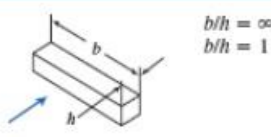






→ Diversos:

Tabela 2 – Coeficientes de arrasto aerodinâmico para objetos variados. Valores válidos entre $10^4 < Re_d < 10^6$. O lado esquerdo da tabela se refere a objetos tridimensionais, enquanto o lado direito se refere a bidimensionais.

SHAPE	REF.	C_D	SHAPE	REF.	C_D
 STRING SUPPORT		0.47 _y		—	1.17 _y
 (c)	(c)	0.38	 (a)	(a)	1.20
 (c)	(c)	0.42	 (g)	(g)	1.16
 (e)	(e)	0.59 _y	 (d)	(d)	1.60 _y
 CUBE (f)	(f)	0.80 _y	 (e)	(e)	1.55
 60° (d)	(d)	0.50	 (a)	(a)	1.55
 SEPARATION		1.17	 VORTEX STREET		1.98
 (c)	(c)	1.17	 (a)	(a)	2.00
 (b)	(b)	1.42	 (a)	(a)	2.30
 (a)	(a)	1.38	 (b)	(b)	2.20
 CUBE (f)	(f)	1.05 _y	 (a)	(a)	2.05 _y

Atenção: antes de utilizar os valores apresentados na Tabela 2, verificar se o número de Reynolds se enquadra no requisito $10^4 < Re_d < 10^6$.

Tabela 3 – Dados de coeficiente de arrasto para objetos selecionados ($Re_d \geq 10^3$)

Objeto	Diagrama	$C_D (Re \geq 10^3)$
Prisma retangular		2,05 1,05
Disco		1,17
Anel		1,20 _b
Hemisfério (extremidade aberta voltada para o escoamento)		1,42
Hemisfério (extremidade aberta voltada para jusante)		0,38
Seção em C (lado aberto voltado para o escoamento)		2,30
Seção em C (lado aberto voltado para jusante)		1,20

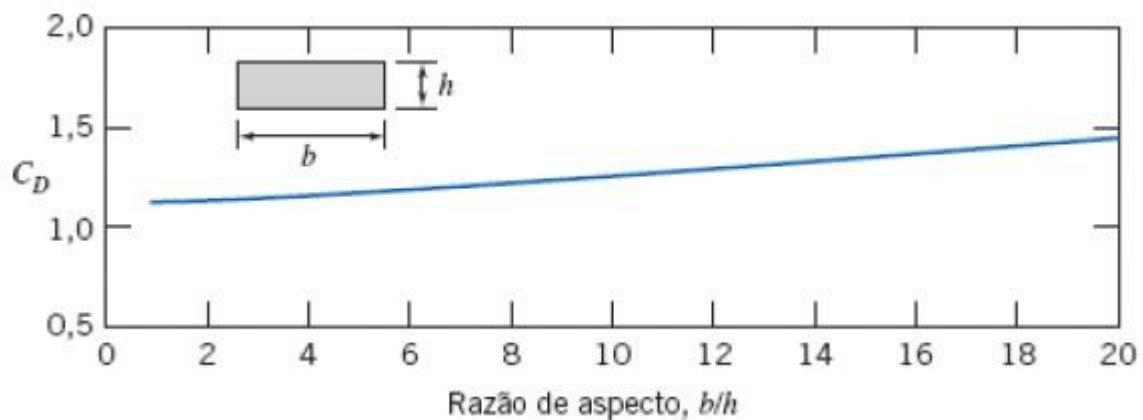


Figura 17 – Variação do coeficiente de arrasto com a razão de aspecto para uma placa de largura finita normal ao fluxo com $Re > 1000$

Exemplo 3: Calcular a força de arrasto em uma placa de trânsito de 80 cm de diâmetro exposta à corrente de ar e a 50km/h. Dados: $\rho_{ar} = 1,2\text{kg/m}^3$, $v = 1,5 \times 10^{-5}\text{m}^2/\text{s}$.

Resolução:

$$A = \frac{\pi D^2}{4} = 0,503 \text{ m}^2$$

$$Re_d = \frac{VD}{\nu} = 7,4 \times 10^5 \quad (\text{verificar se } 10^4 < Re_d < 10^6)$$

De acordo com a tabela, $C_d = 1,17$ $F_d = C_d qA = 68,3 N$

→ Carros:

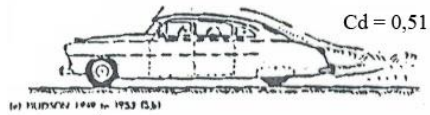
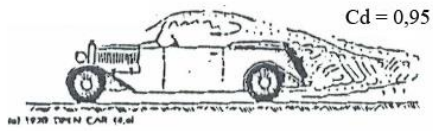


Figura 18 – Coeficientes de arrasto de carros de passeio “padrão”.

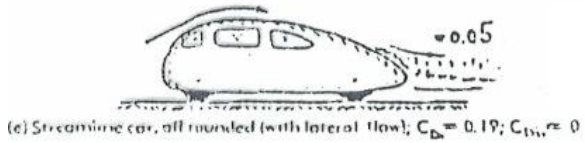
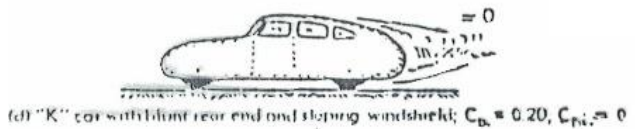
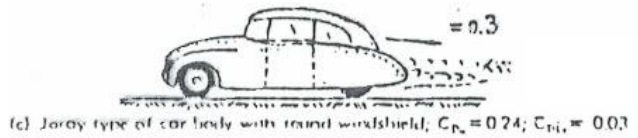
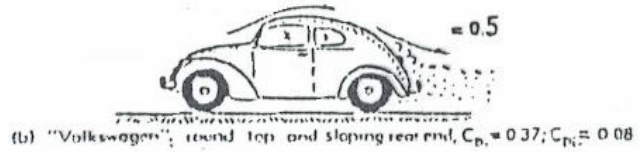
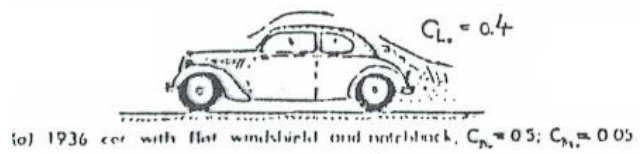


Figura 19 – Coeficientes de sustentação (na área frontal) para diversos tipos de carros de passeio.

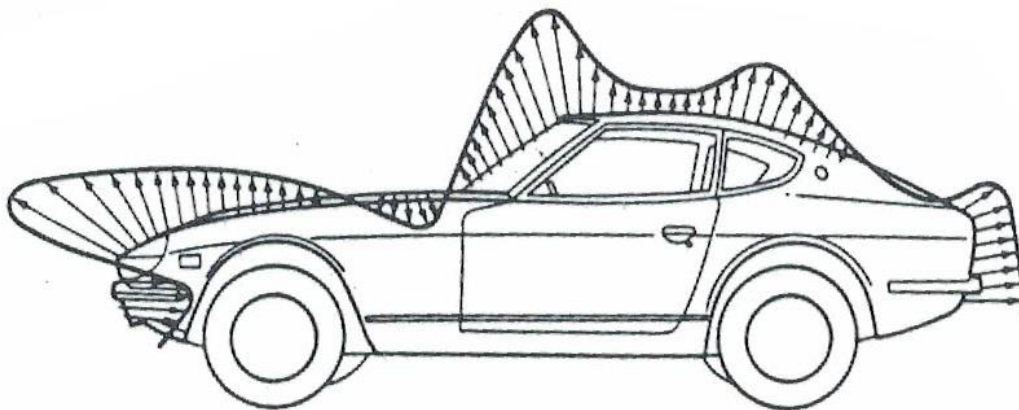


Figura 20 – Perfil de pressão em um automóvel

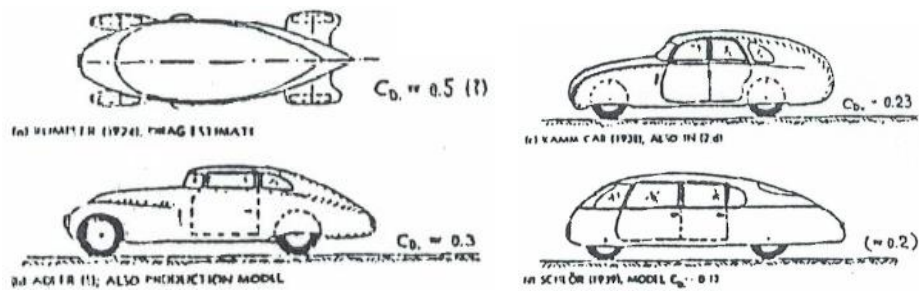
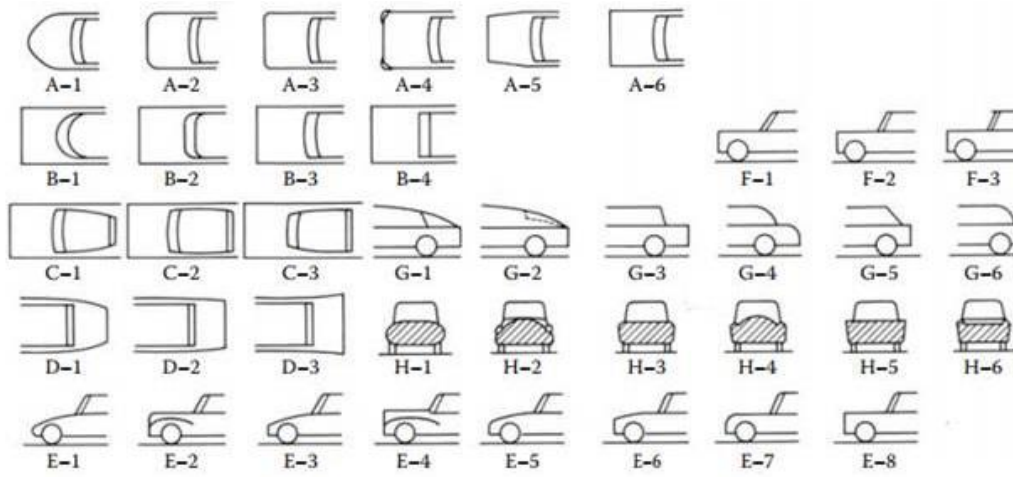


Figura 21 – Exemplos de formatos e coeficientes de arrasto de vários carros com design simplificado.

Tabelas 4 – Estimativas de coeficientes de arrasto automotivos



A. Plan view, front end

- A-1 Approximately semi circular (1)
- A-2 Well-rounded outer quarters (2)
- A-3 Rounded corners without protuberances (3)
- A-4 Rounded corners with protuberances (4)

- A-5 Squared tapering-in corners (5)
- A-6 Squared constant-width front (6)

B. Plan view, windshield

- B-1 Full wraparound (approximately semicircular) (1)
- B-2 Wraparound ends (2)
- B-3 Bowed (3)
- B-4 Flat (4)

C. Plan view, roof

- C-1 Well- or medium-tapered to rear (1)
- C-2 Tapering to front and rear (maximum width at BC post) or approximately constant width (2)
- C-3 Tapering to front (max. width at rear) (3)

D. Plan view, lower rear end

- D-1 Well- or medium-tapered to rear (1)
- D-2 Small taper to rear or constant width (2)
- D-3 Outward taper (or flared-out fins) (3)

E. Side elevation, front end

- E-1 Low, rounded front, sloping up (1)
- E-2 High, tapered, rounded hood (1)
- E-3 Low, squared front, sloping up (2)
- E-4 High, tapered, squared hood (2)

- E-5 Medium-height, rounded front, sloping up (3)

- E-6 Medium-height, squared front, sloping up (4)
- E-7 High, rounded front, with horizontal hood (4)
- E-8 High, squared front, with horizontal hood (5)

F. Side elevation, windshield peak

- F-1 Rounded (1)
- F-2 Squared (including flanges or gutters) (2)
- F-3 Forward-projecting peak (3)

G. Side elevation, rear roof/trunk

- G-1 Fastback (roofline continuous to tail) (1)
- G-2 Semi fastback (with discontinuity in line to tail) (2)
- G-3 Squared roof with trunk rear edge squared (3)
- G-4 Rounded roof with rounded trunk (4)

- G-5 Squared roof with short or no trunk (4)

- G-6 Rounded roof with short or no trunk (5)

H. Front elevation, cowl and fender cross section at wind-shield

- H-1 Flush hood and fenders, well-rounded body sides (1)
- H-2 High cowl, low fenders (2)
- H-3 Hood flush with rounded-top fenders (3)
- H-4 High cowl with rounded-top fenders (3)

- H-5 Hood flush with square-edged fenders (4)
- H-6 Depressed hood with high squared-edged fenders (5)

Source: Reprinted from Bolz, R.E. and Tuve, G.L. (eds.), *CRC Handbook of Tables for Applied Engineering Science*, 2nd ed., CRC Press, Cleveland, OH, 1973. With permission.

Note: Drag rating values in parentheses are for use in Equation 6.13.

Exemplo 4: Calcular a potência necessária para o fusca vencer a força de arrasto a 40km/h, 80km/h e 120km/h. Calcular também a força de sustentação para cada caso. Dados: $\rho_{ar} = 1,2\text{kg/m}^3$, $\nu = 1,5 \times 10^{-5}\text{m}^2/\text{s}$, $A = 1,6\text{m}^2$, $C_d = 0,45$, $C_l = 0,50$.

Resolução:

$V_1 = 11,1\text{m/s}$	$F_{d1} = 53,2\text{N}$	$\dot{W}_1 = 0,79\text{ HP}$	$F_{l1} = 59,1\text{N}$
$V_2 = 22,2\text{m/s}$	$F_{d2} = 213\text{N}$	$\dot{W}_2 = 6,3\text{ HP}$	$F_{l2} = 237\text{N}$
$V_3 = 33,3\text{m/s}$	$F_{d3} = 479\text{N}$	$\dot{W}_3 = 21,4\text{ HP}$	$F_{l3} = 532\text{N}$

→ **Bicicletas:**

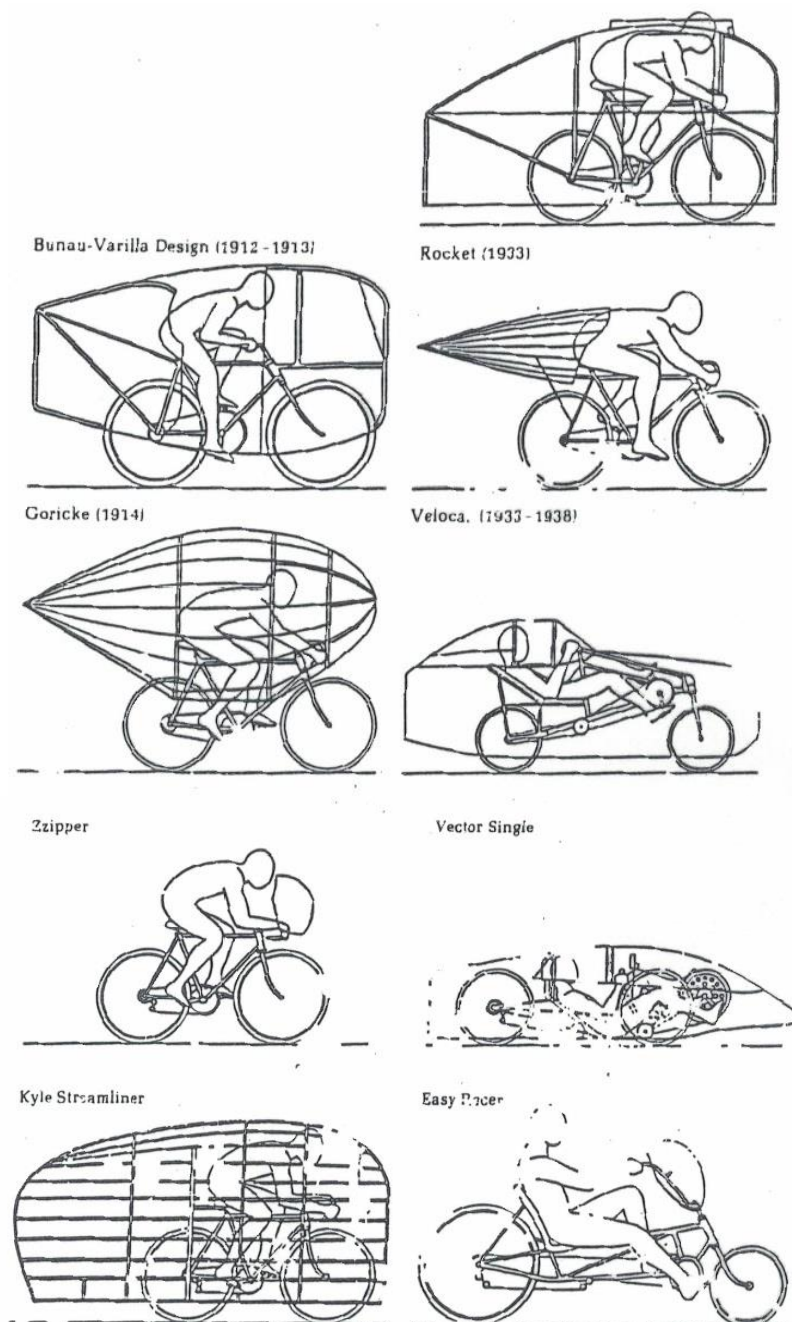


Figura 22 – Primeiros projetos de veículos carenados movidos por força humana.

Tabela 5 – Dados sobre resistência aerodinâmica e de rolamento para diversas configurações a 20mph.

Configuration	Description	Image	D_f Drag Force		Rolling Resistance		Drag Coefficient $C_D = \frac{D_f}{\frac{1}{2}\rho U_{\infty}^2 A}$	Frontal Area, A	
			lbf	N	lbf	N		ft ²	m ²
European Upright Commuter	40 lb. bike, 160 lb. rider, tires 27 in. dia., 40 psi		6.14	27.3	1.20	5.34	1.1	5.5	0.51
Touring (Arms Straight)	25 lb. bike, 160 lb. rider, tires: 27 in. dia., 90 psi		4.40	19.6	0.83	3.69	1.0	4.3	0.40
Racing (Fully Crouched)	20 lb. bike, 160 lb. rider, tires: 27 in. dia., 105 psi		3.48	15.5	0.54	2.4	0.88	3.9	0.36
Aerodynamic Components (Fully Crouched)	20 lb. bike, 160 lb. rider, tires: 27 in. dia., 105 psi		3.27	14.5	0.54	2.4	0.83	3.9	0.36
Partial fairing (Zipper, Crouched)	21 lb. bike, 160 lb. rider, tires: 27 in. dia., 105 psi		2.97	13.2	0.54	2.4	0.70	4.1	0.38
Recumbent (Easy Racer)	27 lb. bike, 160 lb. rider, tires: 20 in. front, 27 in. rear, 90 psi		2.97	13.2	0.94	4.2	0.77	3.8	0.35
Drafting (Closely Following Another Bicycle)	20 lb. bike, 160 lb. rider, tires: 27 in. dia., 105 psi		1.94	8.63	0.54	2.4	0.50	3.9	0.36
Blue Bell (Two Wheels, One Rider)	40 lb. bike, 160 lb. rider, tires: 20 in. front, 27 in. rear, 105 psi		0.61	2.7	0.8	4	0.12	5.0	0.46
Vector Single (Three Wheels)	66 lb. bike, 160 lb. rider, tires: 24 in. front, 27 in. rear		0.51	2.3	1.02	4.54	0.11	4.56	0.424

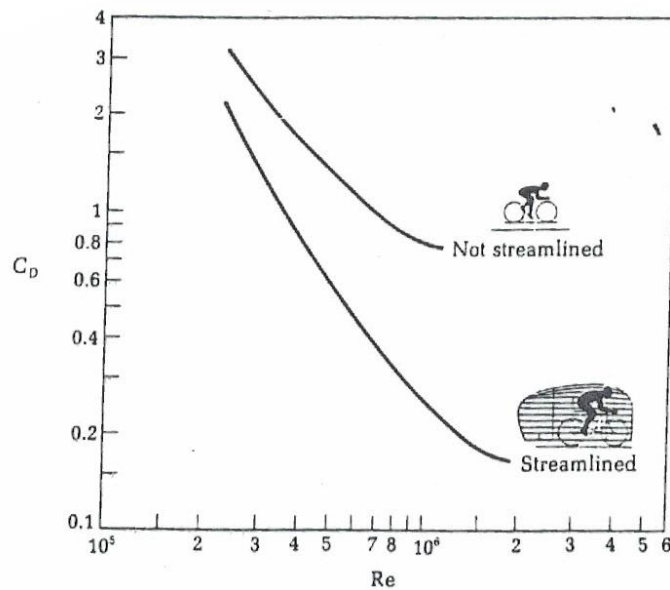


Figura 23 – Coeficiente de arrasto versus número de Reynolds para bicicletas carenadas e não carenadas.

→ **Projéteis:**

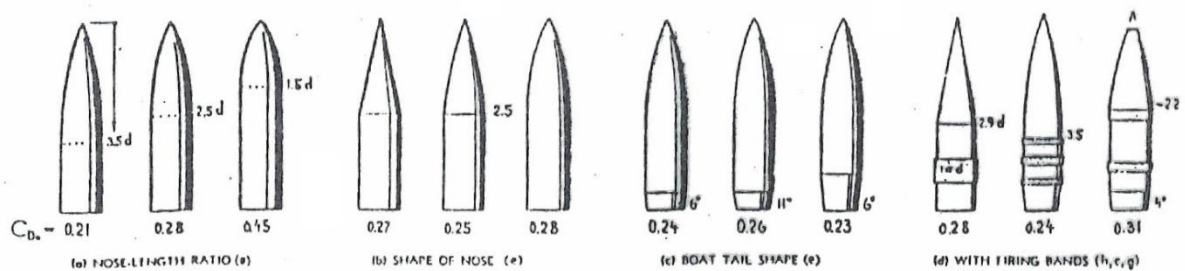
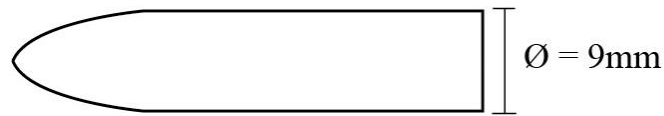


Figura 24 – Coeficiente de arrasto para vários projéteis de geometria suave. Testado para $M=2$.

Exemplo 5: Calcular a força de arrasto e a potência dissipada por um projétil voando a 680m/s. Dados: $M=2$, $\rho_{ar} = 1,2\text{kg/m}^3$, $C_d = 0,45$.

Resolução:



$$A = \frac{\pi D^2}{4} \cong 6,36 \times 10^{-5} \text{m}^2$$

$$F_d = C_d q A$$

$$F_d = C_d \frac{1}{2} V^2 \rho A = 0,45 \frac{1}{2} 680^2 \times 1,2 \times 6,36 \times 10^{-5} \cong 7,94 \text{N}$$

$$\dot{W} = F_d \times V \cong 7,2 \text{HP}$$

→ **Caminhões:**

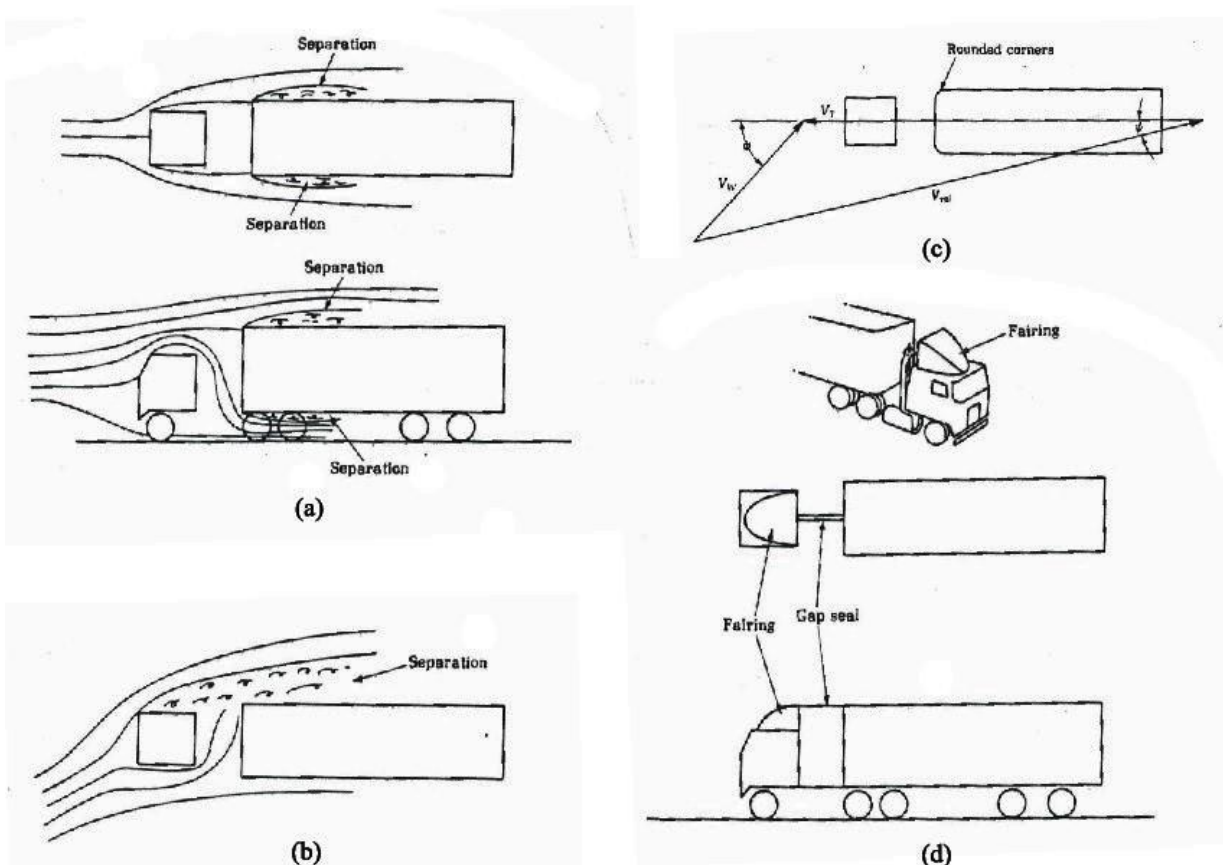


Figura 25 – (a) Vista plana e de perfil das linhas de fluxo sobre um caminhão com cabine sobre motor. (b) Vista plana do padrão de fluxo sobre caminhão orientado. (c) Diagrama de velocidade do vento para análise de fluxo sobre um caminhão. (d) Carenagem e vedação de espaço anexados a um caminhão.

Classificação dos escoamentos externos

- Escoamento hidrodinâmico: escoamentos que envolvam líquidos. Ex: submarinos.
- Escoamento aerodinâmico: escoamentos que envolvam gases. Ex: aviões.

Coefficiente de pressão (C_p) ou número de Euler (Eu)

É outro coeficiente muito empregado em escoamentos externos. É definido por:

$$C_p = \frac{p - p_\infty}{p_d} = \frac{p - p_\infty}{\frac{1}{2} \rho V_\infty^2} = Eu$$

Onde:

p_∞ = pressão estática do fluido que está à velocidade V_∞ ;

V_∞ = velocidade do fluido na região não perturbada pelo objeto, longe do objeto;

p = pressão estática do fluido em cada ponto ao longo da parede do objeto;

Enquanto o C_p é um coeficiente local, os coeficientes C_d e C_l são coeficientes globais.

Descolamento da camada limite

Quando as forças de pressão são maiores que as forças de inércia, o escoamento muda de sentido. Neste ponto, diz-se que o corre a **separação do escoamento** ou o **descolamento da camada limite**.

Na parte posterior dos objetos, geralmente existe uma região de baixa pressão formada devido ao descolamento da camada limite. Esta região é chamada de **esteira**.

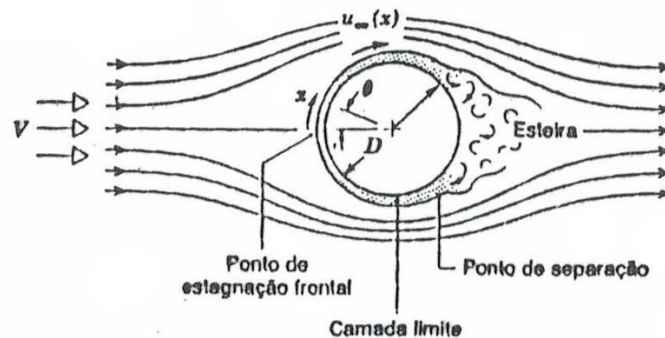


Figura 26 – Formação e separação da camada limite no escoamento cruzado sobre um cilindro circular.

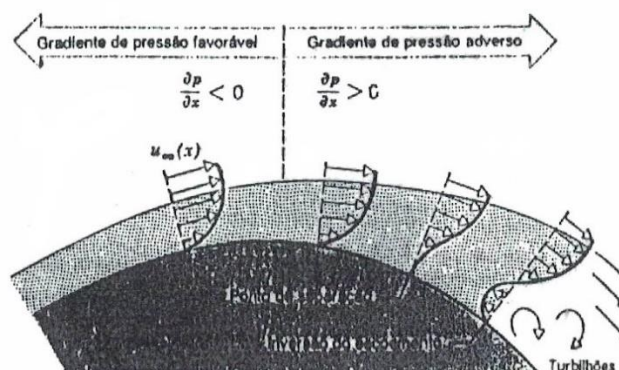
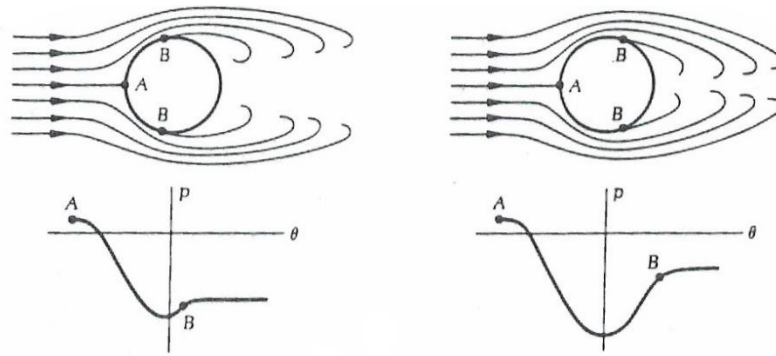


Figura 27 – Perfil de velocidade associado à separação, num cilindro circular com escoamento cruzado.



(a) Separation in laminar flow

(b) Separation in turbulent flow

Figura 28 – O efeito da turbulência sobre a separação.

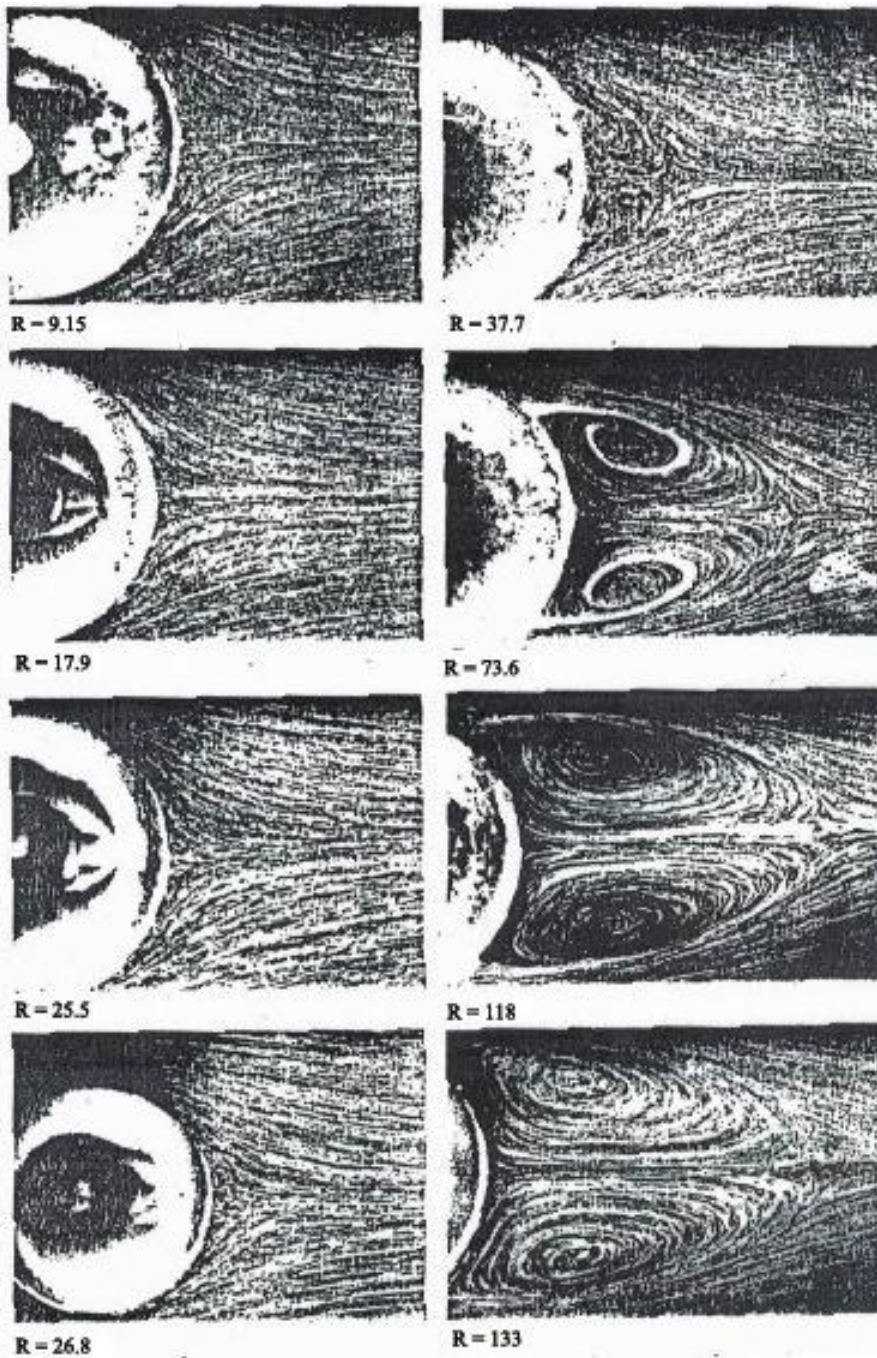
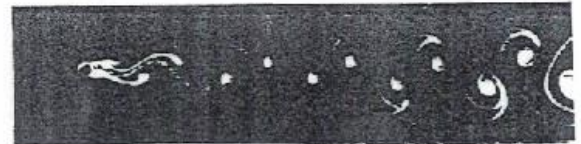


Figura 29 – Esteira formada atrás de um cilindro circular em uma corrente de fluido.



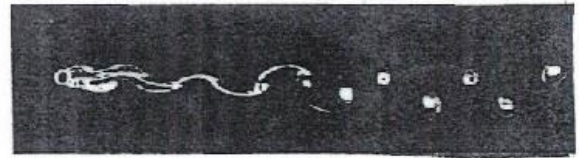
R = 32



R = 73



R = 55



R = 102



R = 65



R = 161

Figura 30 – Esteira formada atrás de um cilindro circular em uma corrente de óleo.

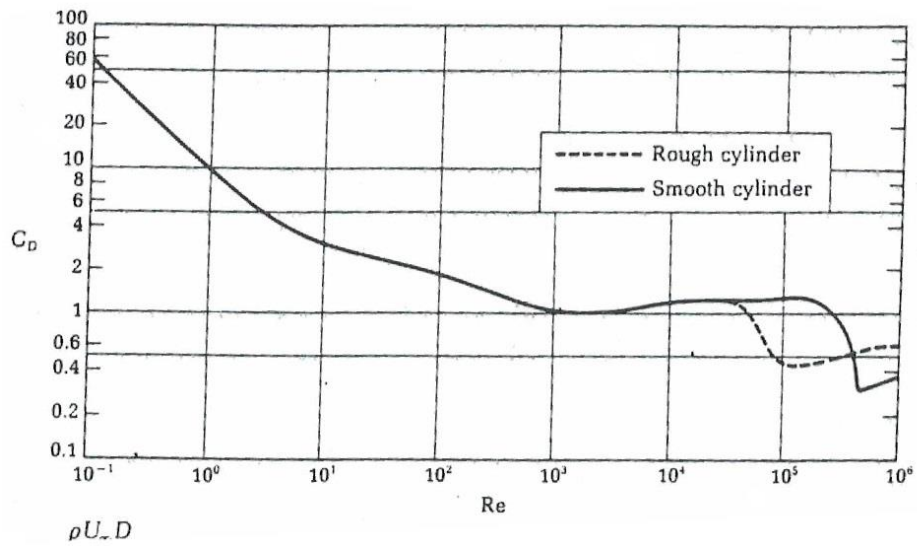


Figura 31 – Coeficiente de arrasto como uma função do número de Reynolds para cilindros circulares longos.

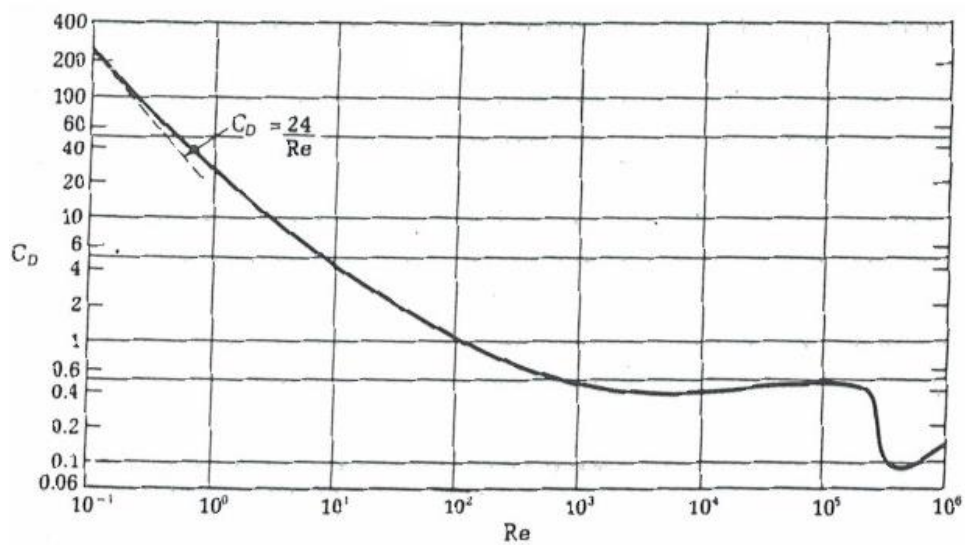


Figura 32 – Coeficiente de arrasto como uma função do número de Reynolds para esferas.

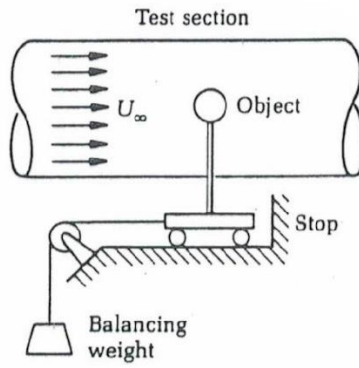


Figura 33 – Uma configuração experimental para medição de arrasto em um objeto imerso em um fluxo uniforme de velocidade constante U_∞ .

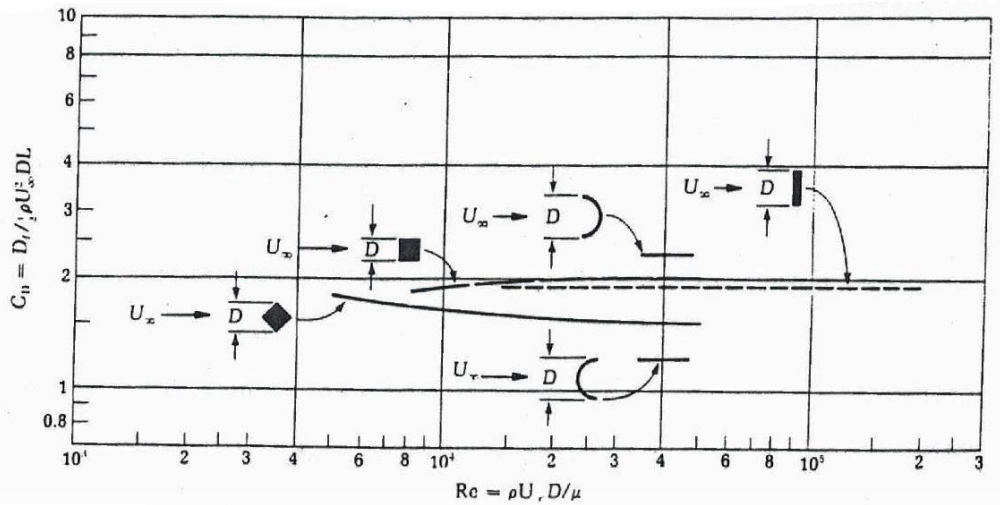


Figura 34 – Coeficiente de arrasto de vários corpos bidimensionais.

- Escoamento laminar: até $Re_{ed} \cong 2 \times 10^5$; separação em $\theta \approx 80^\circ$.
- Escoamento turbulento: separação em $\theta \approx 140^\circ$.

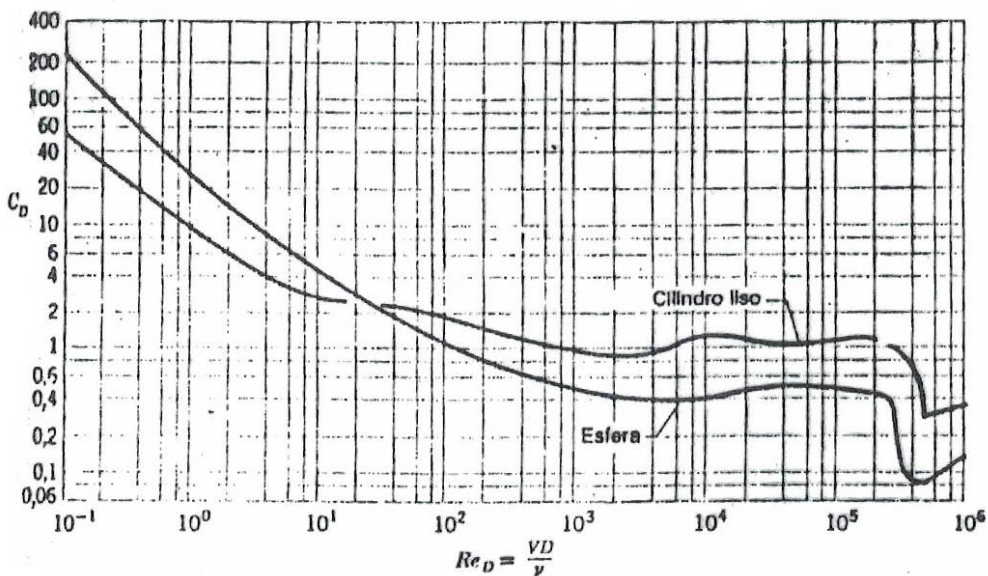


Figura 35 – Coeficiente de arrasto no escoamento transversal sobre um cilindro e no escoamento sobre uma esfera.

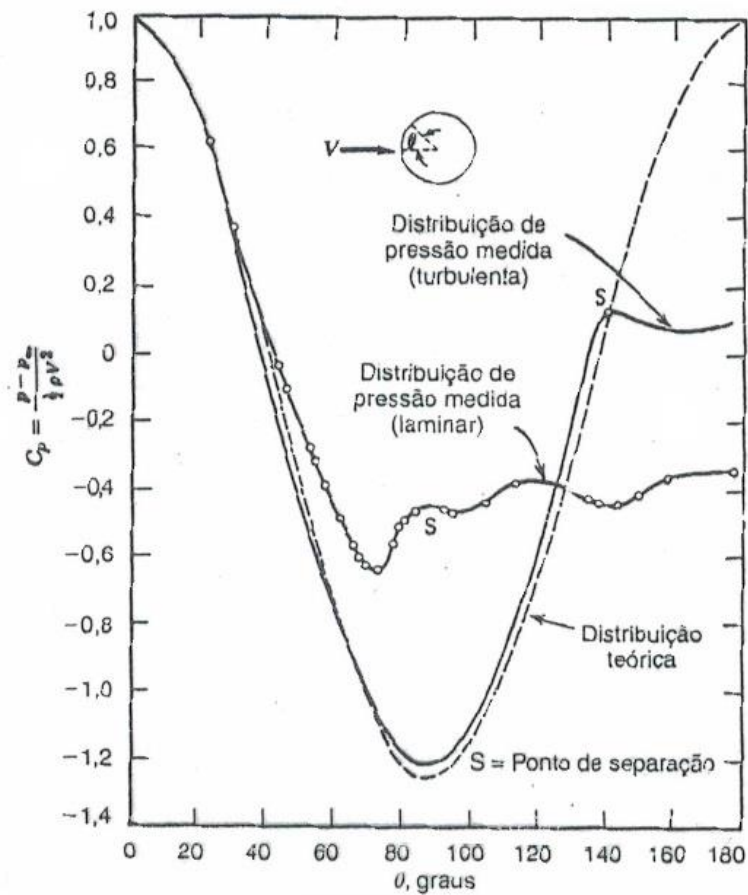


Figura 36 – Distribuição de pressão em volta de uma esfera lisa para escoamentos em camada-limite laminar e turbulenta, comparada com o escoamento não-viscoso.

Gradiente de pressão no sentido do escoamento

- Quando o gradiente de pressão diminui → favorável (a força da pressão aumenta a inércia do escoamento, facilitando o mesmo);
- Quando o gradiente de pressão aumenta → desfavorável (a força da pressão diminui a inércia do escoamento, dificultando o mesmo).

Escoamento sobre cilindro

Forças que atuam no fluido que escoar sobre o cilindro:

- Força de inércia: no sentido do escoamento ($\rho V^2 A$);
- Força de pressão: no sentido do escoamento ou contra (pA);
- Forças viscosas: no sentido contrário ao sentido do escoamento ($\tau_w A_w = \mu \frac{dV}{dn} A_w$).

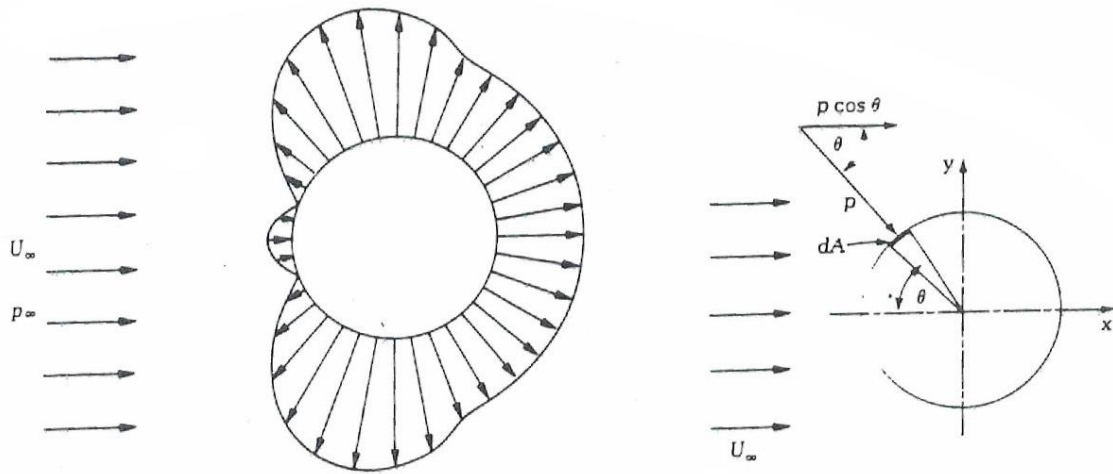


Figura 37 – (à esquerda) Diagrama polar da distribuição de pressão na superfície de um cilindro imerso em um fluxo uniforme. (à direita) Componente da pressão contribuindo para a força de arrasto.

→ **Aerofólios:**

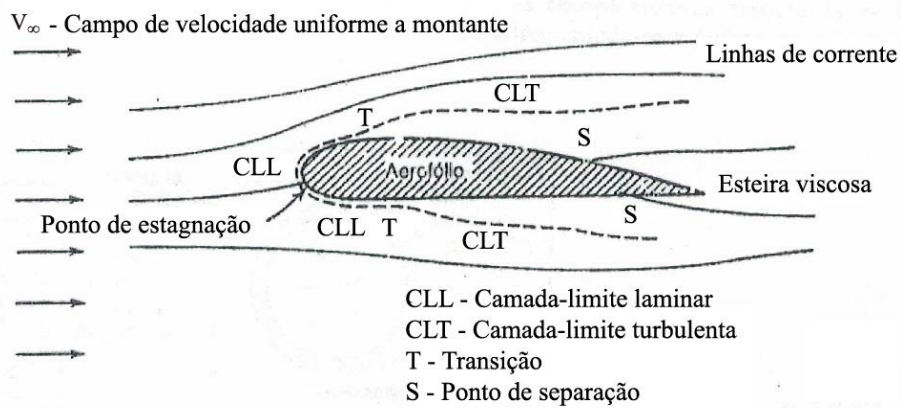


Figura 38 – Detalhes do escoamento viscoso em torno de um aerofólio.

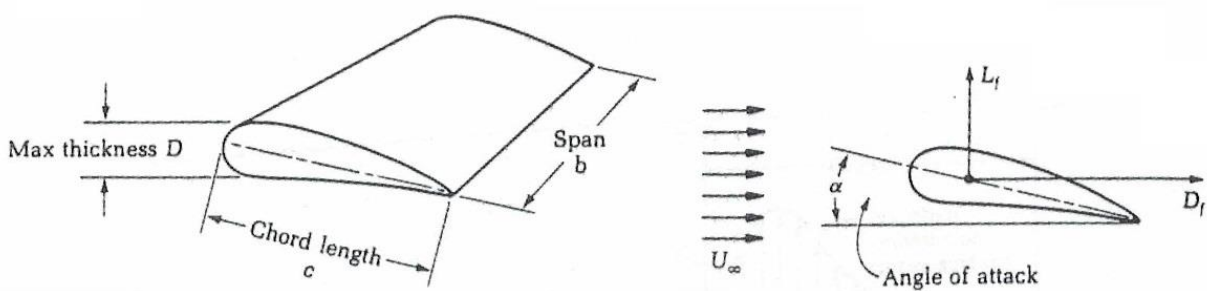


Figura 39 – Parâmetros dinâmicos e geométricos de aerofólios.

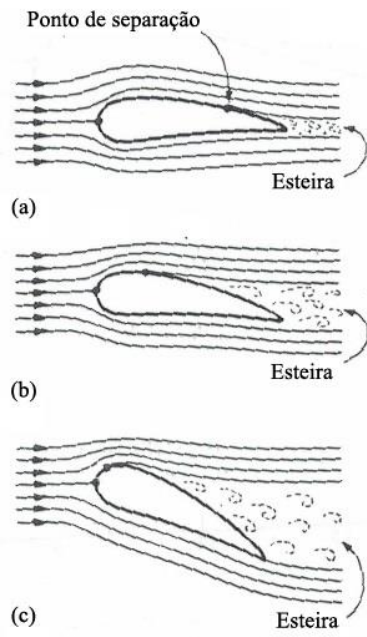


Figura 40 – Linhas de escoamento sobre um aerofólio em diferentes ângulos de ataque.

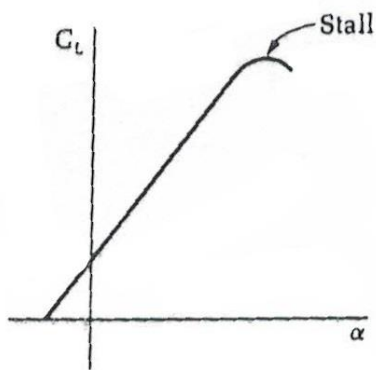


Figura 41 – Um típico diagrama de coeficiente de sustentação versus ângulo de ataque para um aerofólio.

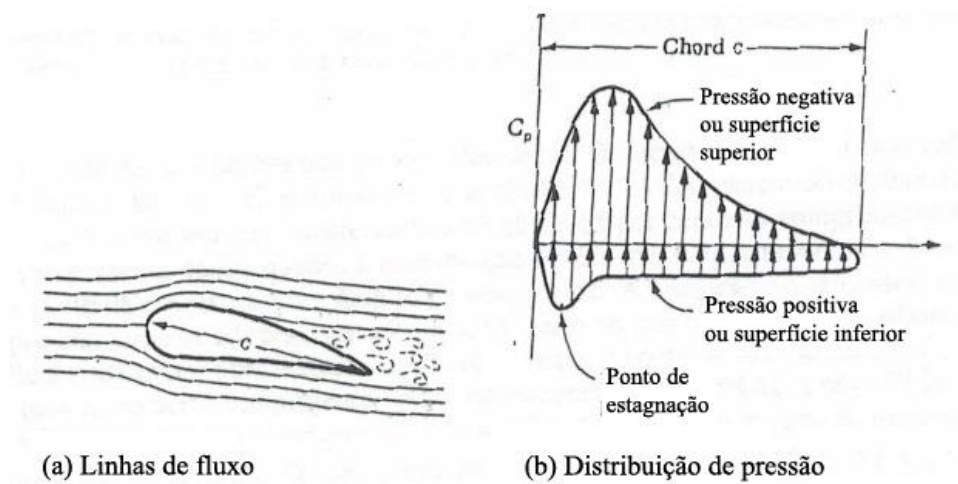


Figura 42 – Coeficiente de pressão versus comprimento de 'chord' para um aerofólio.

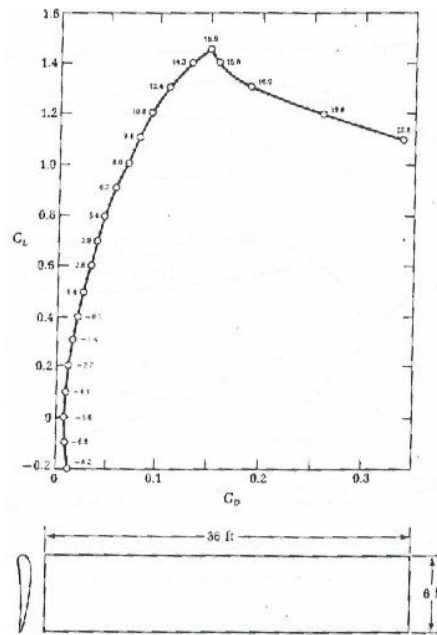


Figura 43 – Um diagrama polar para um aerofólio Clark Y.

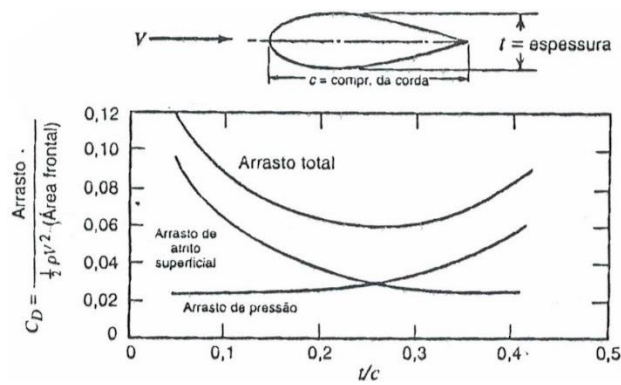


Figura 44 – Coeficiente de arrasto sobre um suporte estrutural carenado, como função da razão entre espessuras, mostrando relações do atrito superficial e da pressão no arrasto total.

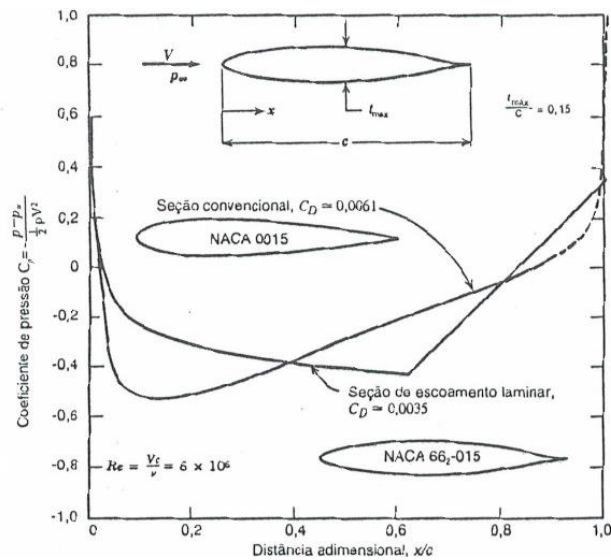
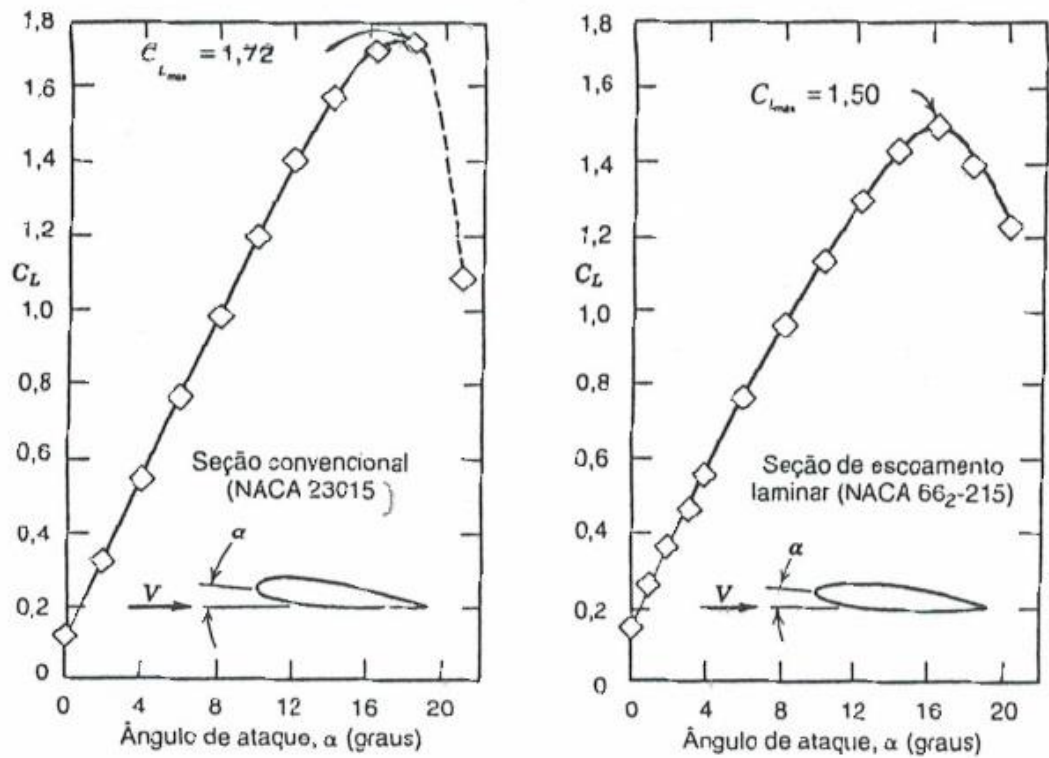
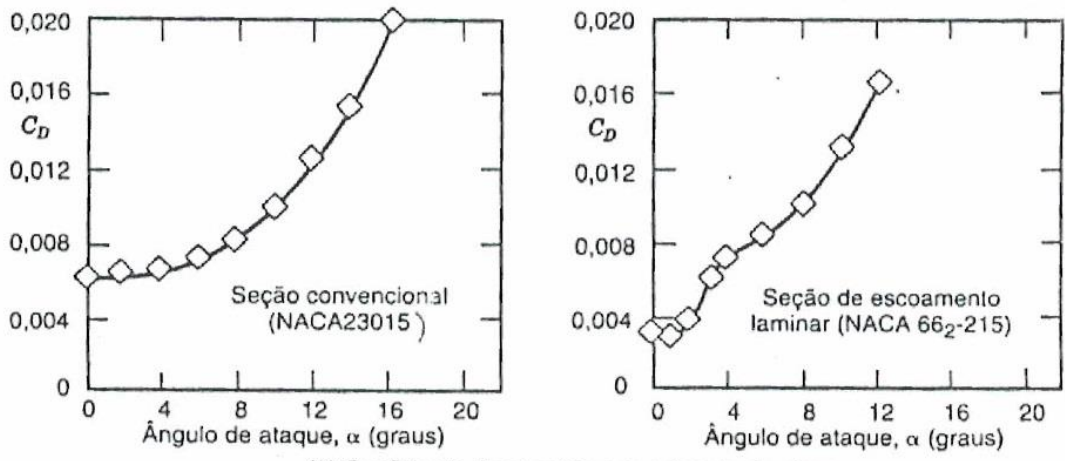


Figura 45 – Distribuições de pressão teóricas para ângulo de ataque zero, para duas seções simétricas de aerofólios, de 15 por cento de razão de espessuras.



(a) Coeficiente de sustentação versus ângulo de ataque



(b) Coeficiente de arrasto versus ângulo de ataque

Figura 46 – Coeficientes de sustentação e de arrasto versus ângulo de ataque para duas seções de aerofólios de razão entre espessuras de 15 por cento.

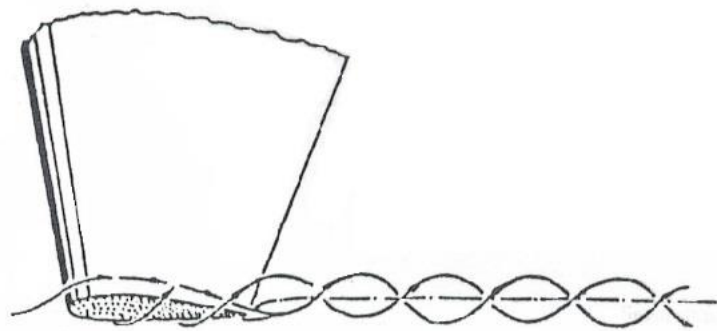


Figura 46 – Padrão de escoamento passado por uma ponta de asa, desenhado com base nas observações de fluxo em um túnel de água.

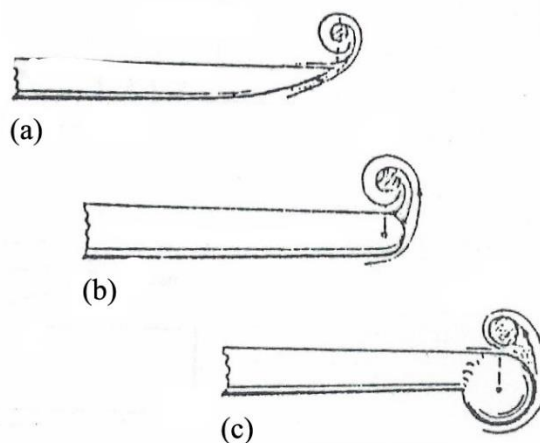


Figura 47 – Localização do núcleo do vórtice em relação à ponta da asa (a) com borda lateral afiada, (b) em asa com borda arredondada, (c) fluxo ao redor do tanque de ponta de asa.

→ **Casas:**

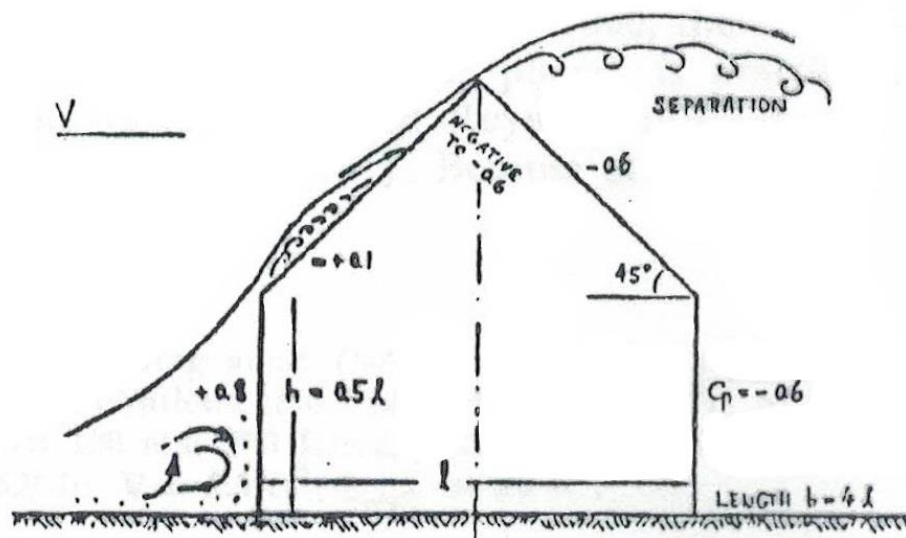


Figura 48 – Padrão de escoamento e de distribuição de pressão em uma casa de formato simples.

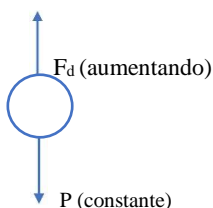
Velocidade terminal

Quando se larga um objeto em queda livre, se a velocidade de queda (V), inicialmente for nula, a única força que atua sobre o objeto é o peso (P). Quando $V > 0$, passa a existir a força de arrasto (F_d). À medida que V aumenta, aumenta também F_d , porém P continua constante. F_d aumentará até igualar-se a P . Neste momento é atingida a velocidade terminal, ou seja, a velocidade máxima que o objeto atingirá em queda livre.

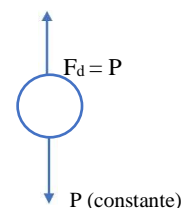
$V = 0$



V aumentando



V constante (terminal)



Para velocidade terminal:

$$P = F_d \quad F_d = \frac{1}{2} \rho V_{term}^2 A C_d \quad Mg = C_d \left(\frac{1}{2} \rho V_{term}^2 A \right)$$

$$V_{term}^2 = \frac{2Mg}{C_d \rho A} \quad V_{term} = \sqrt{\frac{2Mg}{C_d \rho A}}$$

→ Pessoas:

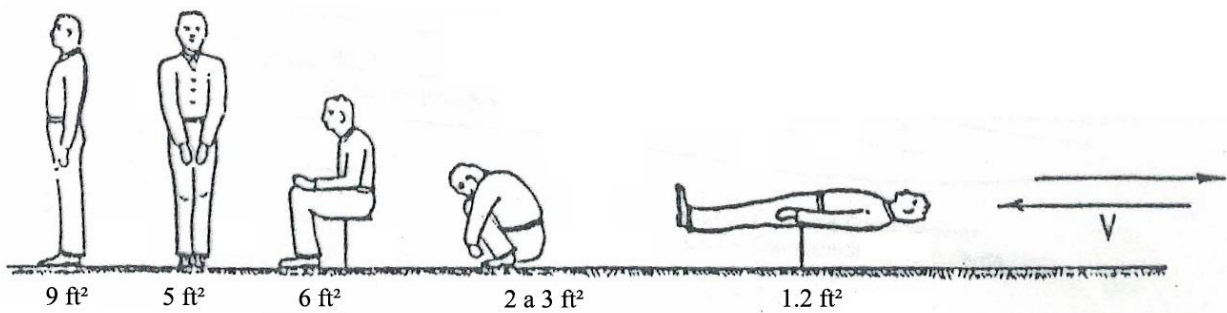


Figura 49 – Áreas de arrasto para um homem médio em várias posições, testadas em um túnel de vento.

Gol Olímpico

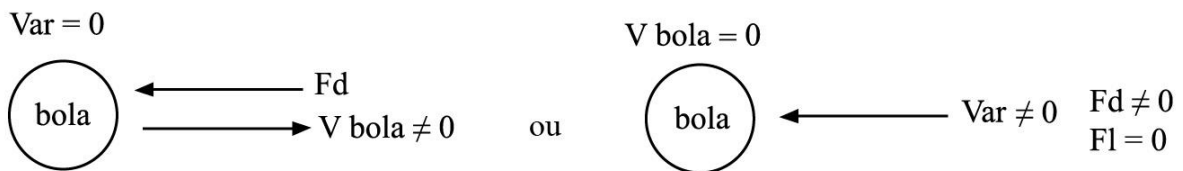


Figura 50 – Vista superior de um gol olímpico.

Efeito Magnus

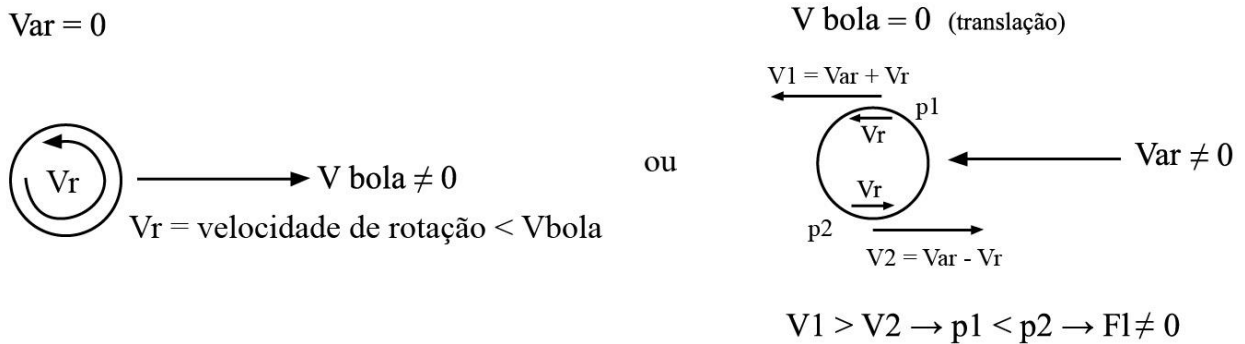


Figura 51 – Vista lateral do efeito Magnus.

Obtenção dos coeficientes C_d , C_l e C_p

As forças F_d e F_l são obtidas experimentalmente em túneis de vento usando-se dinamômetros ou extensômetros. Conhecendo-se a área de referência e a pressão dinâmica, mais as forças F_d e F_l , basta usar as equações (1) e (2) para obter C_d e C_l .

$$C_d = \frac{F_d}{qA} = \frac{F_d}{\left(\frac{1}{2}\rho V^2\right)A} \quad (1)$$

$$C_l = \frac{F_l}{qA} = \frac{F_l}{\left(\frac{1}{2}\rho V^2\right)A} \quad (2)$$

Já para obter o C_p é necessário medir-se a pressão em cada ponto do objeto e usar a seguinte equação:

$$C_p = \frac{p - p_\infty}{\left(\frac{1}{2}\rho V^2\right)}$$

Os coeficientes C_d , C_l e C_p também podem ser obtidos através de métodos numéricos resolvendo-se as equações que governam o escoamento.

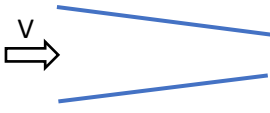
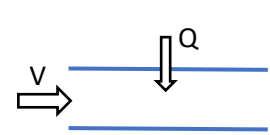
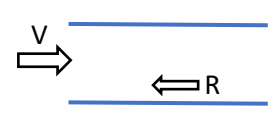
8. FLUIDOS COMPRESSÍVEIS

MOTIVAÇÃO

→ Estudar os efeitos dos escoamentos que atingem altas velocidades.

EFEITOS SOBRE FLUIDOS COMPRESSÍVEIS

Tabela 1 – Fatores que influenciam o escoamento de fluidos compressíveis

		M > 1	M < 1
Efeito da variação da área		$A \downarrow \rightarrow V \downarrow$	$A \downarrow \rightarrow V \uparrow$
Efeito da transferência de calor		$A = \text{cte}$ $Q > 0 \rightarrow V \downarrow$ $P \uparrow$	$V \uparrow$ $P \downarrow$
Efeito da fricção		$A = \text{cte}$ $V \downarrow \rightarrow P \uparrow$	$V \uparrow$ $P \downarrow$

Legenda:

V = alta velocidade

Q = calor transferido

R = força de atrito da parede sobre o fluido

Tabela 2 – Resumo dos efeitos da troca de calor sobre as propriedades dos fluidos

Propriedade	Aquecimento		Resfriamento		Obtida de:
	M < 1	M > 1	M < 1	M > 1	
Entropia, s	Aumento	Aumento	Diminuição	Diminuição	Segunda lei Primeira lei e $\Delta h_0 = c_p \Delta T_0$
Temperatura de estagnação, T_0	Aumento	Aumento	Diminuição	Diminuição	
Temperatura, T	$\left(M < \frac{1}{\sqrt{k}} \right)$ Aumento	Aumento	$\left(M < \frac{1}{\sqrt{k}} \right)$ Diminuição	Diminuição	Forma da linha de Rayleigh
	$\left(\frac{1}{\sqrt{k}} < M < 1 \right)$		$\left(\frac{1}{\sqrt{k}} < M < 1 \right)$		
Número de Mach, M	Diminuição Aumento	Diminuição	Diminuição Diminuição	Aumento	Tendência sobre a linha de Rayleigh
Pressão, P	Diminuição	Aumento	Aumento	Diminuição	
Velocidade, V	Aumento	Diminuição	Diminuição	Aumento	Equação da quantidade de movimento e efeito sobre p
Massa específica, ρ	Diminuição	Aumento	Aumento	Diminuição	
Pressão de estagnação, p_0	Diminuição	Diminuição	Aumento	Aumento	Equação da continuidade e efeito sobre V Fig. 13.16

COMPRESSIBILIDADE DOS FLUIDOS

→ **Fluido incompressível** (líquido ou gasoso):

- As partículas do fluido estão em contato e são rígidas;
- Qualquer perturbação (movimento do fluido ou aumento da pressão) numa partícula se propaga com velocidade infinita às demais partículas.



Figura 1 – Representação esquemática de um fluido incompressível

Efeito da temperatura: aumento do volume que cada partícula ocupa (convecção natural).

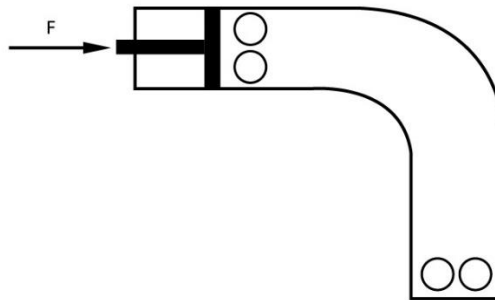


Figura 2 – Efeitos de perturbações em fluidos incompressíveis

→ **Fluido compressível:**

- É o fluido cuja massa específica (ρ) varia com a pressão (p) exercida sobre o mesmo: $\rho = \rho(p)$.
- Existe uma distância finita (Δx) entre as partículas.
- A perturbação imposta a uma partícula leva um determinado tempo para atingir a seguinte, portanto, a velocidade de perturbação é finita.
- Como a distância entre as partículas de um líquido é menor que a dos gases, a velocidade da perturbação é maior nos líquidos, e ainda maior nos sólidos.

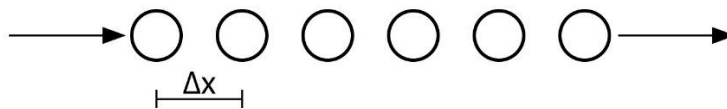


Figura 3 – Representação esquemática de um fluido compressível

- Líquidos e gases (em escoamentos a baixas velocidades) podem ser considerados fluidos incompressíveis.
- A área da Mecânica dos Fluidos que trata do escoamento de fluidos incompressíveis é chamada de Hidrodinâmica.
- A área da Mecânica dos Fluidos que trata do escoamento de fluidos compressíveis é chamada de Dinâmica dos Gases.

Qual a velocidade de uma perturbação no vácuo?

A velocidade com que uma perturbação viaja num meio contínuo é chamada de velocidade do som.

VELOCIDADE DO SOM

Motivação

→ Determinar a velocidade com a qual propaga-se uma perturbação num meio contínuo.

Analogia

→ Velocidade de propagação da onda produzida por uma pedra jogada num lago.

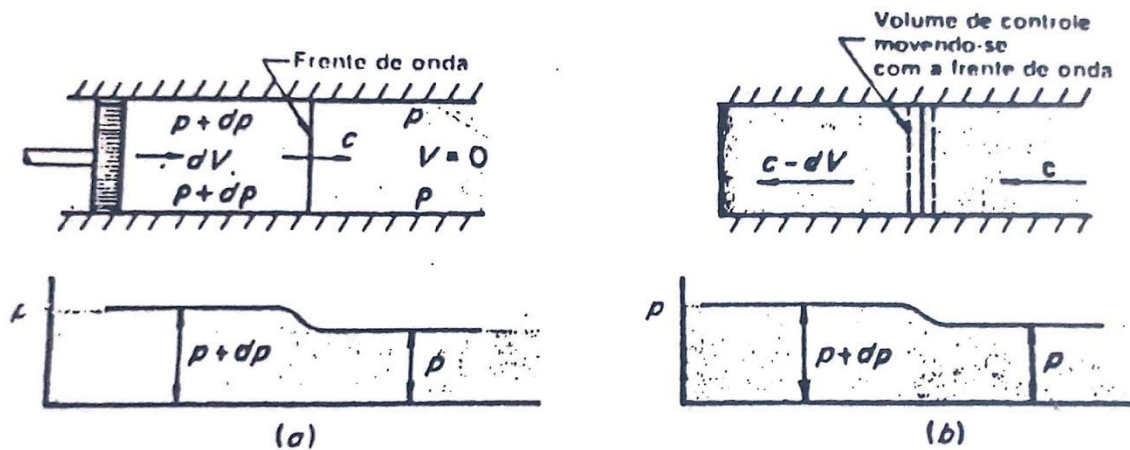


Figura 4 - Pistão comprimindo o ar dentro de um cilindro

- O problema “a” é transiente para o sistema de coordenada no cilindro.
- O problema “b” é permanente para o sistema de coordenadas na onda.

→ Condições iniciais do fluido: $p, \rho, v = 0$.

→ O pistão move-se com velocidade ΔV .

→ A onda de perturbação move-se com velocidade C .

→ Devido ao movimento do pistão, o fluido próximo a ele adquire as seguintes propriedades: $p + \Delta p, \rho + \Delta \rho, e \Delta V$.

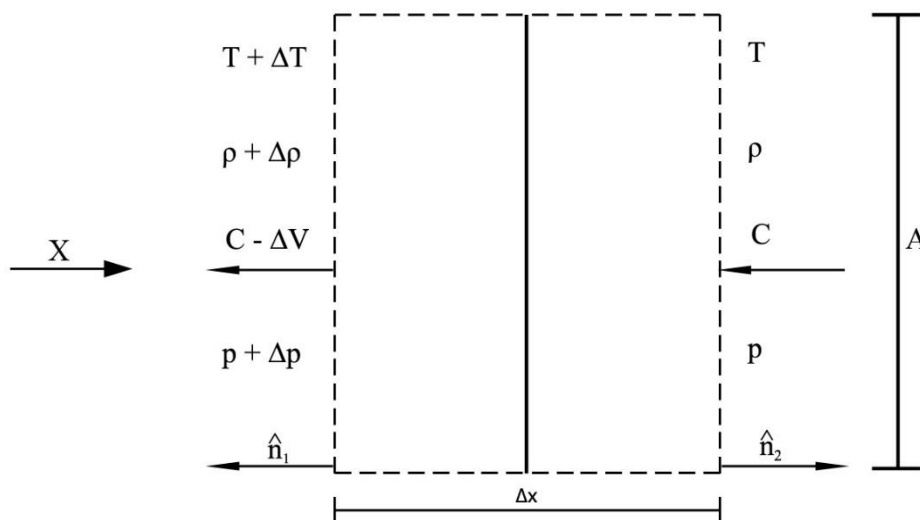


Figura 5 – Volume de controle em torno da frente de onda

Hipóteses:

- Escoamento unidimensional (1D).
- Escoamento sem atrito com as paredes do pistão.
- Escoamento em regime permanente.
- Escoamento sem troca de calor com o meio.

Equação de massa:

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{VC} \rho dV + \int_{SC} \rho \vec{V} \cdot \hat{n} dA = 0$$

$$(\rho + \Delta\rho)(C - \Delta V)A - \rho CA = 0 \quad (1)$$

$$\rho CA - \rho \Delta VA + \Delta\rho CA - \Delta\rho \Delta VA - \rho CA = 0 \quad \rightarrow \quad \rho \Delta V = \Delta\rho C$$

$$\lim \Delta V, \Delta\rho \rightarrow 0 \quad \rightarrow \quad \rho \partial V = C \partial \rho \quad (2)$$

Segunda Lei de Newton:

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{VC} \hat{V} \rho dV + \int_{SC} \hat{V} \rho \vec{V} \cdot \hat{n} dA = \vec{F}$$

$$-(C - \Delta V) \underbrace{(\rho + \Delta\rho)(C - \Delta V)A}_{\text{eq (1)} \rightarrow (\rho CA)} - C(-\rho CA) = (p + \Delta p)A - pA$$

$$\text{eq (1)} \rightarrow (\rho CA)$$

$$(-C - \Delta V)(\rho CA) + C\rho CA = pA + \Delta pA - pA$$

$$-C\rho CA + \Delta V\rho CA + C\rho CA = \Delta pA \quad \rightarrow \quad \Delta V\rho C = \Delta p$$

$$\lim \Delta V, \Delta p \rightarrow 0 \quad \rho \partial V = \frac{\partial p}{C} \quad (3)$$

Igualando-se as equações (2) e (3):

$$C \partial \rho = \frac{\partial p}{C} \quad C^2 = \frac{\partial p}{\partial \rho} \quad C = \sqrt{\left(\frac{\partial p}{\partial \rho}\right)_s} \quad (4)$$

A equação (4) é geral para a velocidade de propagação do som num meio contínuo.

Gases Perfeitos

Para um processo isentrópico, tem-se da termodinâmica:

$$\frac{p}{\rho k} = \text{constante} \quad (5)$$

$$\ln\left(\frac{p}{\rho k}\right) = \ln(\text{constante})$$

$$\ln(p) - k\ln(\rho) = \ln(\text{constante})$$

Diferenciando:

$$\frac{\partial p}{p} - \frac{k\partial\rho}{\rho} = 0 \qquad \frac{\partial p}{\partial\rho} = k\frac{p}{\rho} \qquad (6)$$

Equação de estado dos gases perfeitos:

$$p = \rho RT \qquad \frac{p}{\rho} = RT \qquad (7)$$

Com a equação (7) em (6):

$$\frac{\partial p}{\partial\rho} = kRT \qquad (8)$$

Com a equação (8) em (4):

$$C = \sqrt{kRT} \qquad (9)$$

Exemplos:

→ **Ar:** $k = 1,4$ e $R = 287 \text{ J/kgK}$.

- Atmosfera:

$$h = 0\text{m} \rightarrow T = 288\text{K}$$

$$C \approx 340 \text{ m/s} \approx 1220 \text{ km/h}$$

$$h = 10 \text{ km} \rightarrow 223\text{K}$$

$$C \approx 299 \text{ m/s} \approx 1080 \text{ km/h}$$

→ **Vapor d'água:** $k = 1,3$, $R = 961 \text{ J/kgK}$, $T = 288\text{K}$ e $C \approx 415 \text{ m/s} \approx 1500 \text{ km/h}$.

→ **Hidrogênio:** $k = 1,41$, $R = 9124 \text{ J/kgK}$, $T = 288\text{K}$ e $C \approx 1290 \text{ m/s} \approx 4640 \text{ km/h}$.

Líquidos

$$k_s = \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial\rho}{\partial p} \right)_s \qquad C = \sqrt{\frac{1}{\rho k_s}} \qquad (10)$$

k_s = compressibilidade isentrópica

Exemplos:

→ **Água:** $k_s = 5,1 \cdot 10^{-10} \text{ Pa}^{-1}$, $\rho = 1000 \text{ kg/m}^3$ e $C \approx 1400 \text{ m/s} \approx 5040 \text{ km/h}$.

Sólidos

$$\beta_s = \rho \left(\frac{\partial p}{\partial \rho} \right)_s \quad C = \sqrt{\frac{\beta_s}{\rho}} \quad (11)$$

β_s = módulo de elasticidade volumétrica

Exemplos:

→ **Cobre:** $\beta_s = 1,32 \cdot 10^{11}$ Pa, $\rho = 8950 \text{ kg/m}^3$ e $C \approx 3840$ m/s ≈ 13800 km/h.

REGIMES DE ESCOAMENTO

Tabela 3 – Diferenças entre os diversos regimes de escoamento

Regime	Mach	Aplicações	Características Físicas
Incompressível ($\rho = \text{cte}$)	$M_c \approx 0$	Convecção natural, escoamento de líquidos em dutos	$\rho = \text{cte}$ Variações insignificativas das propriedades (exceto V).
Subsônico	$0 < M_c \leq 0,8$	Automóveis, trens	Variações contínuas das propriedades (curvas suaves).
Transônico	$0,8 < M_c \leq 1,2$	Aviões comerciais (747)	Ocorrência de ondas de choque sobre o objeto. Variações abruptas das propriedades do escoamento.
Supersônico	$1,2 < M_c \leq 5$	Aviões supersônicos (F16)	Ocorrência de ondas de choque em frente ao objeto aquecimento superficial do objeto é significativo.
Hipersônico	$M_c > 5$	Foguetes e mísseis	Interação da onda de choque com a camada limite. Grande aquecimento superficial do objeto. Dissociação das moléculas e ionização dos átomos do fluido.

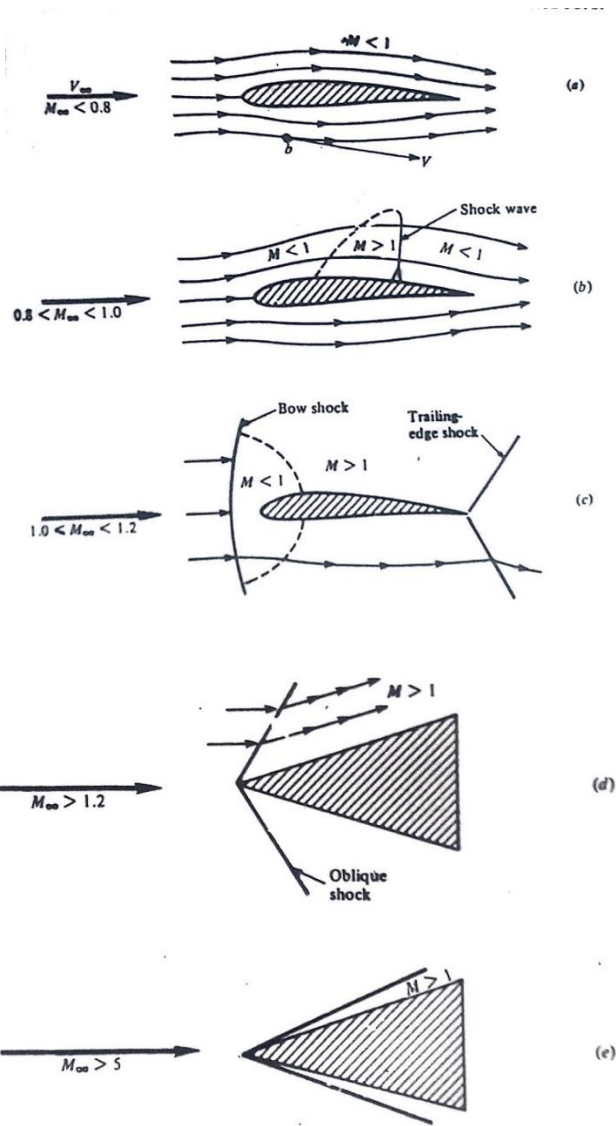


Figura 6 – Ilustração de diferentes regimes de escoamento

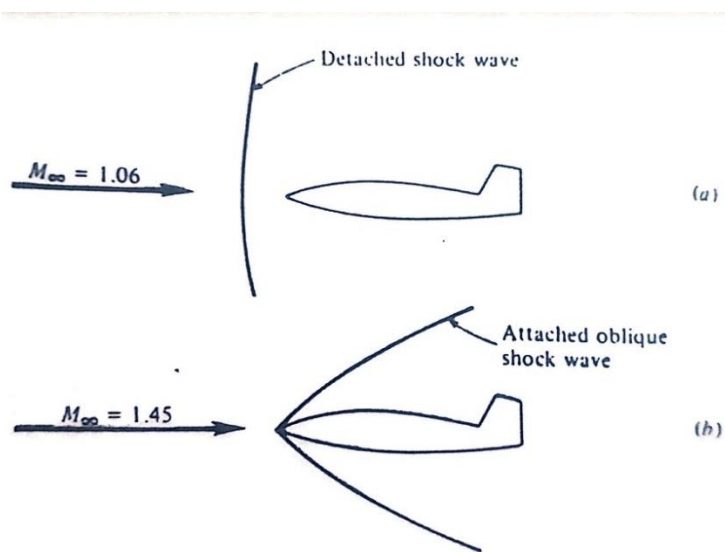


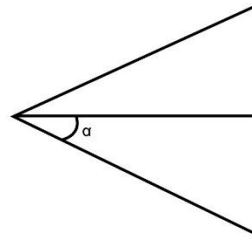
Figura 7 – Onda de choque destacada e anexada a um avião supersônico

CONE DE MACH

A partir de $M_c = 1$, surge o chamado cone de Mach que separa o espaço em duas regiões. Na primeira, chamada zona de ação, consegue-se ouvir a perturbação causada por um objeto, a turbina de um avião, por exemplo. Na segunda região, denominada zona de silêncio, não se ouve a perturbação causada pelo objeto.

Estas duas regiões são definidas pelo cone de Mach, cujo semiângulo é dado por:

$$\alpha = \arcsen\left(\frac{1}{M}\right)$$



Para mísseis V2:

- $V \approx 5000\text{km/h}$
 - $C = 1220\text{ km/h}$
- $M = 1,4 \rightarrow \alpha = 14^\circ$

Limites:

- $M = 1 \rightarrow \alpha = 90^\circ$
- $M = \infty \rightarrow \alpha = 0^\circ$

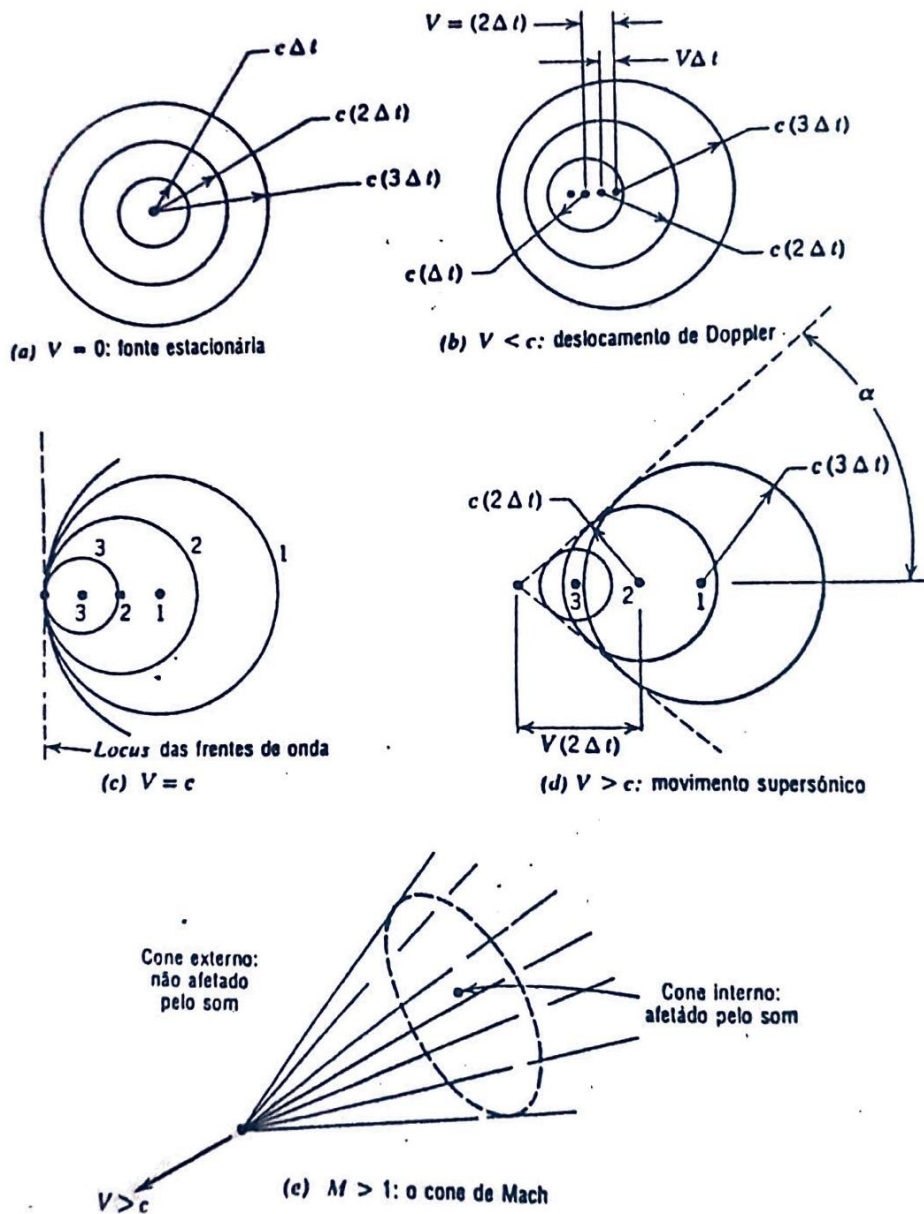


Figura 8 – Ilustração da formação do cone de Mach

OBSERVAÇÃO: A partir deste momento, todas as propriedades que estiverem marcadas com “*” se referem às propriedades críticas e as que estiverem marcadas com sub índice “0” se referem às propriedades de estagnação.

PROPRIEDADES DE ESTAGNAÇÃO (0)

Para escoamentos de fluidos **incompressíveis**, pode-se obter a seguinte equação:

$$p_0 = p + \frac{1}{2} \rho V^2 \quad (14)$$

Onde:

p = pressão estática.

ρ = massa específica.

V = velocidade do escoamento **no ponto** cuja pressão é p .

p_0 = pressão total ou de estagnação; pressão no ponto onde $V=0$.

Esta relação é muito útil na determinação da velocidade do escoamento. No estudo de escoamento de fluidos compressíveis, as propriedades de estagnação são ainda mais úteis.

Pode-se deduzir as seguintes equações:

$$p_0 = p(F)^{\frac{k}{k-1}} \quad T_0 = TF \quad \rho_0 = \rho(F)^{\frac{1}{k-1}} \quad F = 1 + \frac{(k-1)}{2}M^2$$

(15) (16) (17) (18)

- T , p e ρ correspondem às propriedades do fluido onde a velocidade é V e o número de Mach é M .
- T_0 , p_0 e ρ_0 correspondem às propriedades de estagnação, ou seja, onde a velocidade do fluido é nula.
- k representa a razão dos calores específicos (constante adiabática).

$$k = \frac{c_p}{c_v}$$

Exemplo 1. Na experiência do perfil de velocidades, a velocidade do escoamento do ar chegava a 50m/s. Considerando $T = 288\text{K}$, $\rho = 1.11\text{kg/m}^3$ e $R = 287\text{J/kgK}$, quais são as propriedades de estagnação do fluido?

Resolução:

$$c = 340\text{m/s}$$

$$k_{ar} = 1,4$$

$$p = 101\text{kPa}$$

$$M = \frac{V}{c} = \frac{50}{340} = 0,15$$

$$F = 1 + \frac{(k-1)}{2}M^2 = 1 + \frac{(1,4-1)}{2}0,15^2 = 1,0045$$

$$\rho_0 = \rho \left(F^{\frac{1}{k-1}} \right) = 1,11 \times \left(1,0045^{\frac{1}{1,4-1}} \right) = 1,011\rho$$

$$T_0 = TF = 1,0045T$$

$$p_0 = p(F)^{\frac{k}{k-1}} = 101 \times 10^3 \times (1,0045)^{\frac{1,4}{1,4-1}} = 1,016p$$

ou

$$p_0 = p + \frac{1}{2}\rho V^2 \quad \rightarrow \quad \frac{p_0}{p} = 1 + \frac{1}{2p}\rho V^2 \quad \rightarrow \quad p_0 = p \left(1 + \frac{1}{2p}\rho V^2 \right) = 1,015p$$

Exemplo 2. Calcular as condições de estagnação na frente de um trem que atinge 504km/h nas CNTP.

Resolução:

$$c = 340m/s \quad V = 504 \text{ km/h} = 140m/s \quad k_{ar} = 1,4 \quad T = 288K$$

$$M = \frac{V}{c} = \frac{140}{340} = 0,41$$

$$F = 1 + \frac{(k-1)}{2} M^2 = 1 + \frac{(1,4-1)}{2} 0,41^2 = 1,034$$

Assim:

$$p_0 = 1,12p$$

$$\Delta p = 12kPa$$

$$T_0 = 1,034T$$

$$\Delta T = 9,8K$$

$$\rho_0 = 1,087\rho$$

$$\Delta \rho = 0,10kg/m^3$$

CONDIÇÕES CRÍTICAS (*)

As condições críticas representam outro estado de referência, em escoamento de fluidos compressíveis, além das condições de estagnação.

As condições críticas (p^* , ρ^* , T^* e V^*) são definidas como as propriedades correspondentes ao escoamento sônico ($M=1$). Para se obter as propriedades críticas, basta considerar $M=1$ em todas as equações prévias. Assim:

$$p_0 = p^* \left(G \frac{k}{k-1}\right) \quad T_0 = T^* G \quad \rho_0 = \rho^* \left(G \frac{1}{k-1}\right) \quad G = 1 + \frac{(k-1)}{2} = \frac{k+1}{2}$$

(19) (20) (21) (22)

$$V^* = c = \sqrt{kRT^*}$$

(23)

Para o ar, cujo $k = 1,4$, as condições críticas resultam em:

$$p_0 = 1,89p^* \quad T_0 = 1,2T^* \quad \rho_0 = 1,58\rho^* \quad V^* = 340m/s$$

ou

$$p^* = 0,53p_0 \quad T^* = 0,83T_0 \quad \rho^* = 0,63\rho_0 \quad V^* = 340m/s$$

EFEITO DA VARIAÇÃO DE ÁREA

Vamos considerar o seguinte volume de controle:

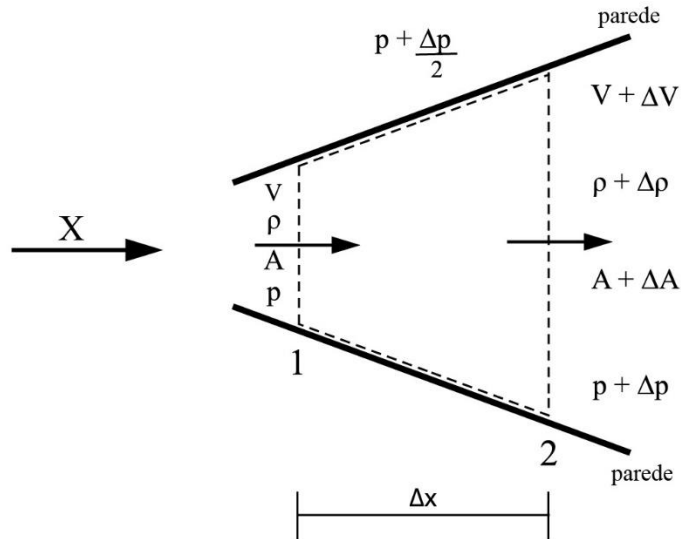


Figura 9 – Volume de controle para variação de área

Hipóteses:

- Escoamento unidimensional (1D).
- Escoamento sem atrito com as paredes do pistão.
- Escoamento em regime permanente.
- Escoamento sem troca de calor com o meio.

Equação de massa:

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{VC} \rho dV + \int_{SC} \rho \vec{V} \cdot \hat{n} dA = 0$$

$$\rho VA = \text{constante} = \dot{M}$$

$$\ln(\rho VA) = \ln(\dot{M})$$

$$\ln(\rho) + \ln(V) + \ln(A) = \ln(\dot{M})$$

Diferenciando:

$$\frac{d\rho}{\rho} + \frac{dV}{V} + \frac{dA}{A} = 0 \quad (24)$$

Segunda Lei de Newton:

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{VC} \hat{V} \rho dV + \int_{SC} \hat{V} \rho \vec{V} \cdot \hat{n} dA = \vec{F}$$

$$V(-\rho VA) + (V + \Delta V)(\rho VA) = pA + \left(p + \frac{\Delta p}{2}\right) \Delta A - (p + \Delta p)(A + \Delta A)$$

$$-\rho V^2 A + \rho V^2 A + \rho VA \Delta V = pA + p \Delta A + \frac{\Delta p \Delta A}{2} - pA - p \Delta A - \Delta p A - \Delta p \Delta A$$

$$\rho V \Delta V = -\Delta p$$

$$\lim \Delta V, \Delta p \rightarrow 0$$

$$\rho V dV = -dp$$

ou dividindo por ρV^2 :

$$\frac{\rho V dV}{\rho V^2} = -\frac{dp}{\rho V^2} \qquad \frac{dV}{V} = -\frac{dp}{\rho V^2} \qquad (25)$$

Com a equação (25) em (24):

$$\frac{d\rho}{\rho} - \frac{dp}{\rho V^2} + \frac{dA}{A} = 0 \qquad \frac{dA}{A} = \frac{dp}{\rho V^2} - \frac{d\rho}{\rho} \qquad \frac{dA}{A} = \frac{dp}{\rho V^2} \left(1 - \frac{V^2}{dp/d\rho} \right)$$

como $\frac{dp}{d\rho} = c^2$, tem-se:

$$\frac{dA}{A} = \frac{dp}{\rho V^2} (1 - M^2) \qquad dp = \frac{\rho V^2}{(1 - M^2)A} dA \qquad (26)$$

(Analisar os efeitos de M e dA sem p)

Com a equação (25) em (26):

$$\frac{dA}{A} = \frac{dV}{V} (M^2 - 1) \qquad dV = \frac{V}{(M^2 - 1)A} dA \qquad (27)$$

(Analisar os efeitos de M e dA sem V)

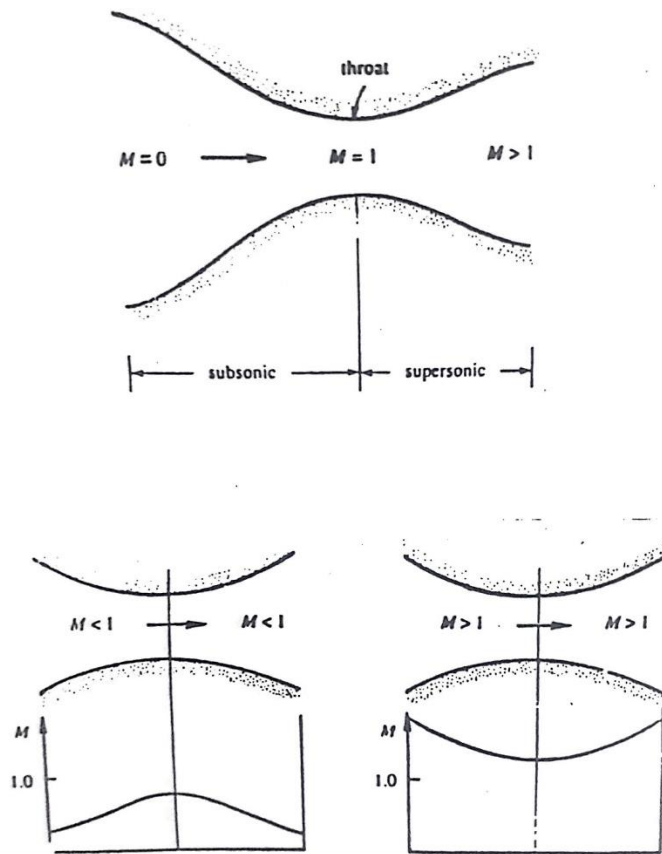


Figura 10 – Bocais convergente-divergente

Para passar do escoamento subsônico para supersônico, há uma área de seção mínima (A^*), chamada área da garganta, onde $M=1$. E vice-versa.

- **Bocal:** dispositivo que acelera o escoamento.
- **Difusor:** dispositivo que desacelera o escoamento.

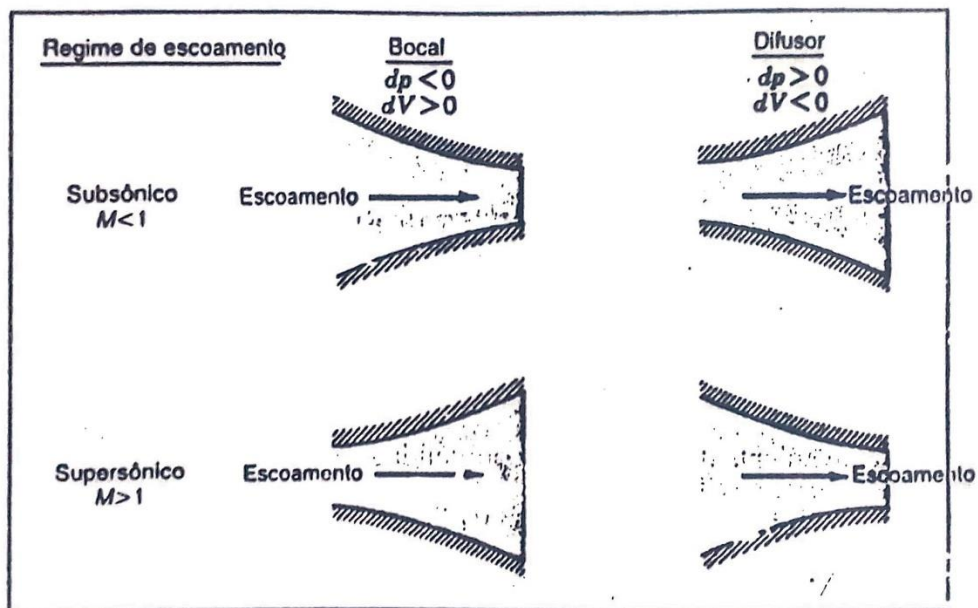


Figura 11 – Diferenças entre o escoamento subsônico e supersônico

Tabela 4 - Diferenças entre o escoamento subsônico e supersônico

M < 1	M > 1
se p↓ = A↓ , pois V↑	se p↓ = A↑, pois V↑
se p↑ = A↑ , pois V↓	se p↑ = A↓, pois V↓

Considerando um escoamento unidimensional em regime permanente:

Da equação da conservação de massa, tem-se $\rho AV = \text{constante} = \rho^* A^* V^*$; ou:

$$\frac{A}{A^*} = \frac{\rho^* V^*}{\rho V} = \frac{\rho^* C^*}{\rho MC} = \frac{1}{M} \frac{\rho^*}{\rho} \sqrt{\frac{kRT^*}{kRT}} = \frac{1}{M} \frac{\rho^*}{\rho} \sqrt{\frac{T^*}{T}} = \frac{1}{M} \frac{\rho^*/\rho_0}{\rho/\rho_0} \sqrt{\frac{T^*/T_0}{T/T_0}}$$

Das equações (20) e (16), tem-se:

$$\frac{T_0}{T^*} = 1 + \frac{(k-1)}{2} \quad \text{e} \quad \frac{T_0}{T} = 1 + \frac{(k-1)}{2} M^2$$

Das equações (21) e (17), tem-se:

$$\frac{\rho_0}{\rho^*} = \left[1 + \frac{(k-1)}{2} \right]^{1/(k-1)} \quad \text{e} \quad \frac{\rho_0}{\rho} = \left[1 + \frac{(k-1)}{2} M^2 \right]^{1/(k-1)}$$

Então:

$$\frac{A}{A^*} = \frac{1}{M} \frac{\left[1 + \frac{(k-1)M^2}{2} \right]^{1/(k-1)}}{\left[1 + \frac{(k-1)}{2} \right]^{1/(k-1)}} \frac{\left[1 + \frac{(k-1)M^2}{2} \right]^{1/2}}{\left[1 + \frac{(k-1)}{2} \right]^{1/2}}$$

ou

$$\frac{A}{A^*} = \frac{1}{M} \left[\frac{1 + \frac{(k-1)M^2}{2}}{1 + \frac{(k-1)}{2}} \right]^{(k+1)/2(k-1)} \quad (28)$$

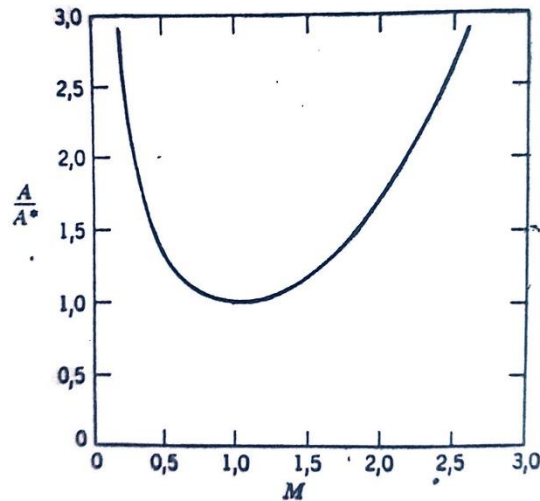


Figura 12 – Relação entre A/A^* e o número de Mach

Com as equações 15-18 e 28, pode-se construir uma tabela de p/p_0 , T/T_0 e A/A_0 em função do número de Mach e do k do gás.

Tabela 5 – Parâmetros para o escoamento isentrópico unidimensional para gases perfeitos, $k=1,4$.

M	p/p_0	T/T_0	A/A^*
0	1,0	1,0	∞
0,1	0,9930	0,9980	5,822
0,5	0,8430	0,9524	1,340
1,0	0,5283	0,8333	1,0
2,0	0,1278	0,5556	1,688
3,0	0,02722	0,3571	4,235
4,0	0,006586	0,2381	10,72
5,0	0,001890	0,1667	25,00
10,0	0,00002356	0,04762	539,9

ONDAS DE CHOQUE

As ondas de choque são, em termos práticos, descontinuidades nas propriedades do escoamento que ocorrem no regime supersônico.

Tipos:

- Normais ou planas;
- Oblíquas;
- Cônicas;
- Refletidas.

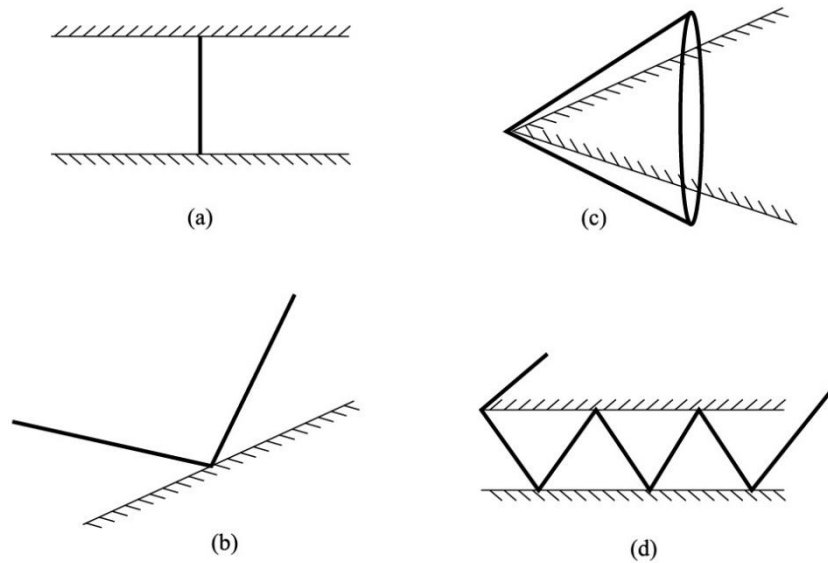


Figura 13 – Tipos de ondas de choque: (a) normal ou plana, (b) oblua, (c) cnica e (d) refletida

ONDAS NORMAIS

Resolvendo-se analiticamente as equaoes da massa, da energia, 2ª Lei de Newton, e equaao de estado, obtm-se para ondas de choque normais:

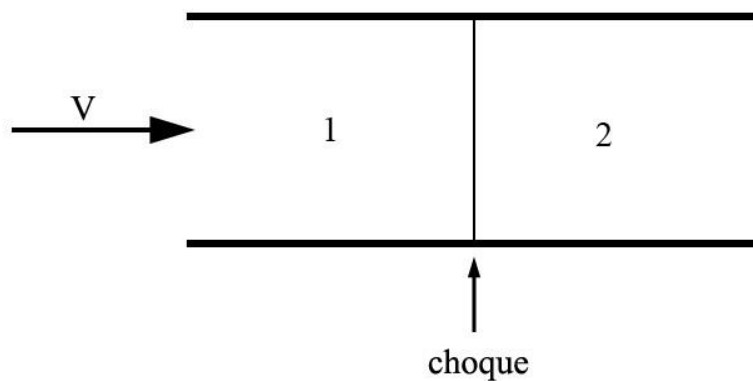


Figura 14 – Onda de choque normal

$$M_2^2 = \frac{M_1^2 + \frac{2}{(k-1)}}{\frac{2k}{(k-1)}M_1^2 - 1}$$

(30)

$$\frac{p_2}{p_1} = \frac{2k}{(k+1)}M_1^2 - \frac{(k-1)}{(k+1)}$$

(31)

$$\frac{T_2}{T_1} = \frac{1 + \frac{(k-1)}{2} M_1^2}{1 + \frac{(k-1)}{2} M_2^2}$$

(32)

$$\frac{p_{02}}{p_{01}} = \frac{\left[\frac{\frac{(k+1)}{2} M_1^2}{1 + \frac{(k-1)}{2} M_1^2} \right]^{k/(k-1)}}{\left[\frac{2k}{(k+1)} M_1^2 - \frac{(k-1)}{(k+1)} \right]^{1/(k-1)}}$$

(33)

$$T_{01} = T_{02}$$

(34)

Onde o subíndice 1 indica as propriedades a montante (antes do choque) e o subíndice 2, as propriedades a jusante (depois) do choque.

Tabela 6 – Relações entre as propriedades físicas de um escoamento com onda de choque (k=1,4)

M1	M2	p2/p1	T2/T1
1,0	1,0	1,0	1,0
1,1	0,9118	1,245	1,065
1,5	0,7011	2,458	1,320
2,0	0,5774	4,520	1,687
3,0	0,4752	10,33	2,679
4,0	0,4350	18,50	4,047
5,0	0,4152	29,00	5,800
10,0	0,3876	116,5	20,39

BOCAL CONVERGENTE

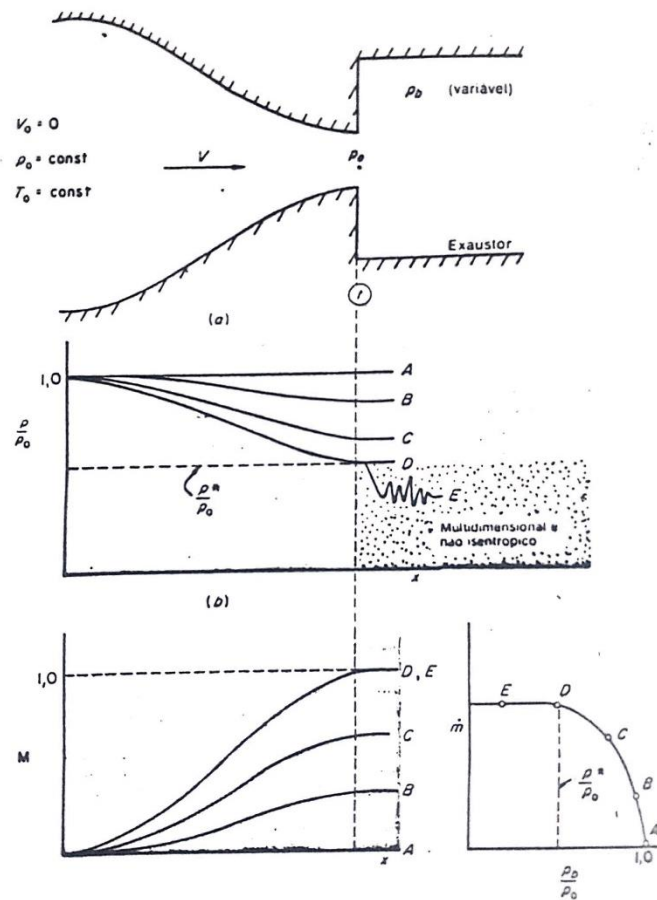


Figura 15 – Bocal convergente

→ A partir de $M_0 = 0$, $M_{\text{máximo}} = 1$ na garganta (saída) para:

$$\frac{p_e}{p_0} \leq \frac{p^*}{p_0}$$

Em que p_e = pressão de saída.

- Se $M > 1$ → escoamento bloqueado ($\dot{m} = \text{constante} = \text{máximo}$).
- Conforme p_b (pressão traseira) é reduzida, o fluxo de massa aumenta até $M = 1$. Para $M > 1$, $\dot{m} = \text{constante}$ e igual a $M = 1$.

Exemplo 3. Um reservatório contendo ar comprimido a $p = 5\text{bar}$ ($5 \cdot 10^5\text{Pa}$) e $T = 300\text{K}$. Determine o fluxo de massa descarregado na atmosfera ($p_{\text{atm}} = 100\text{kPa}$), para um bocal com área $A = 1\text{mm}^2$. Considerar $k = 1,4$ e $R_{\text{ar}} = 287\text{J/kgK}$.

Resolução:

Condições de estagnação:

$$p_0 = 500\text{kPa}$$

$$T_0 = 300\text{K}$$

$$V_0 = 0$$

$$m_0 = 0$$

$$p = \rho RT \qquad \rho_0 = \frac{p_0}{RT_0} \qquad \rho_0 = 5,81 \text{ kg/m}^3$$

Pressão fora do bocal:

$$p_b = 100 \text{ kPa}$$

Portanto:

$$\frac{p_b}{p_0} = \frac{100}{500} = 0,2$$

Analisando a tabela, percebe-se que:

$$\frac{p^*}{p_0} = 0,528$$

→ Como $0,2 < 0,528$, as condições críticas são atingidas na saída do bocal. Escoamento **bloqueado**.

Neste caso, utilizamos os dados para $M = 1$:

$$p_e = 0,528 p_0 = 0,528 \times 500 \times 10^3 = 264,5 \text{ kPa}$$

$$\frac{T_e}{T_0} = \frac{T^*}{T_0} = 0,8333 \qquad T_e = 0,8333 \times 300 = 250 \text{ K } (-23^\circ\text{C})$$

$$\dot{m} = \rho_e V_e A_e$$

$$\frac{\rho^*}{\rho_0} = 0,6339 = \frac{\rho_e}{\rho_0} \quad \rho_e = 0,6339 \rho_0 \quad \rho_e = 0,6339 \times 5,81 \quad \rho_e = 3,68 \text{ kg/m}^3$$

$$V_e = c_e = \sqrt{kRT_e} = \sqrt{1,4 \times 287 \times 250} = 317 \text{ m/s}$$

$$\dot{M} = \rho_e V_e A_e = 3,68 \times 317 \times 1 \times 10^{-6} = 1,17 \text{ g/s}$$

BOCAL CONVERGENTE-DIVERGENTE

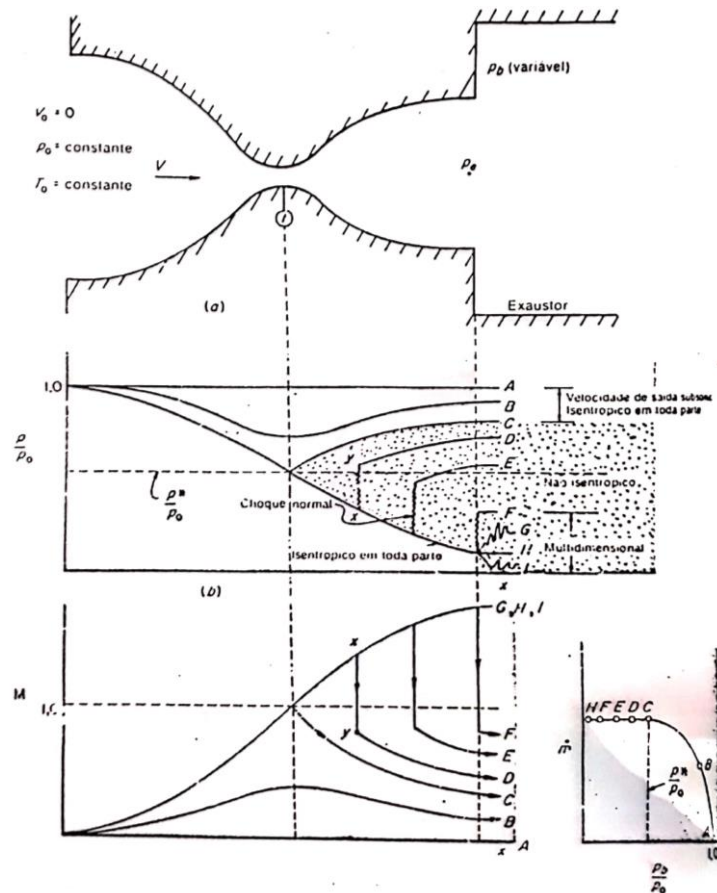


Figura 16 – Propriedades de um escoamento em bocal convergente-divergente (qualquer fluido)

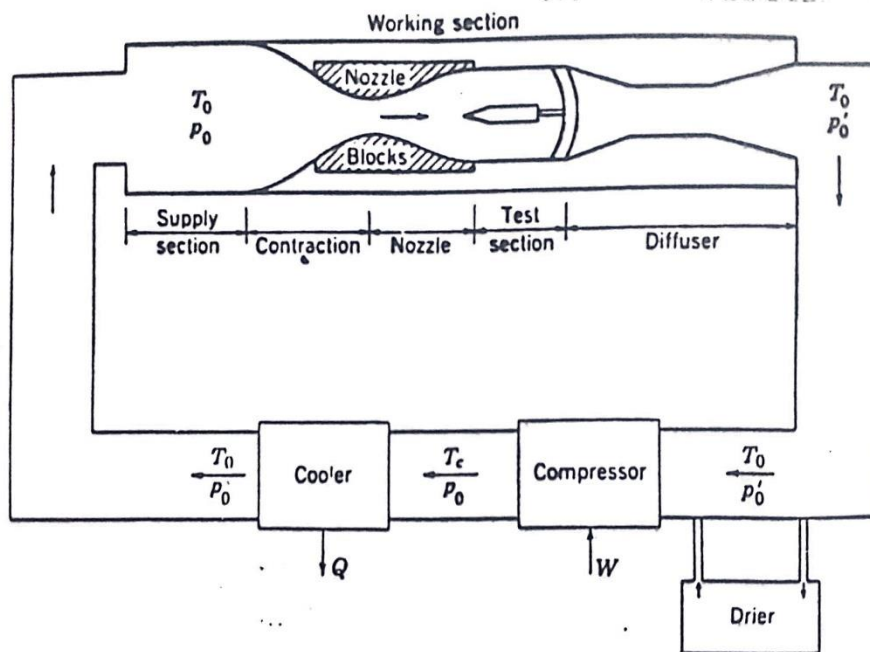


Figura 17 – Dispositivo para avaliação das propriedades de um escoamento em bocal convergente-divergente

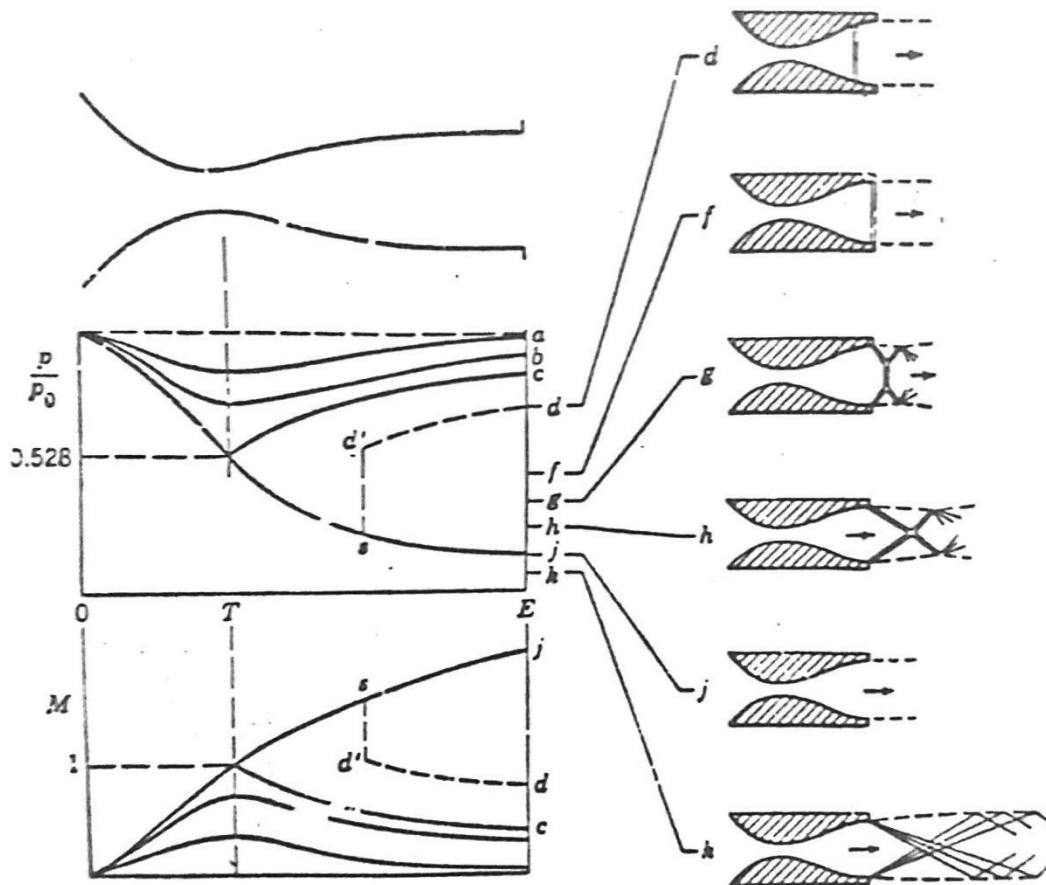


Figura 18 – Propriedades de um escoamento em bocal convergente-divergente (ar)

Exemplo 4. Resolver novamente o problema anterior, porém considerando que a pressão no reservatório seja de 160kPa.

Resolução:

Condições de estagnação:

$$p_0 = 160kPa \quad T_0 = 300K \quad V_0 = 0 \quad m_0 = 0$$

$$p = \rho RT \quad \rho_0 = \frac{p_0}{RT_0} \quad \rho_0 = 1,86 \text{ kg/m}^3$$

$$\frac{p_b}{p_0} = \frac{100 \times 10^3}{160 \times 10^3} = 0,625$$

Analisando a tabela, percebe-se que:

$$\frac{p^*}{p_0} = 0,528$$

→ Como $0,625 > 0,528$, as condições críticas não são atingidas na saída do bocal. Escoamento **não bloqueado**.

$$p_0 = p F^{\frac{k}{k-1}}$$

$$F = 1 + \frac{(k-1)}{2} M^2$$

$$\frac{p_0}{p_e} = \left[1 + \frac{(k-1)}{2} M_e^2 \right]^{\frac{k}{k-1}}$$

$$M_e = \sqrt{\left[\left(\frac{p_0}{p_e} \right)^{\frac{k-1}{k}} - 1 \right] \frac{2}{k-1}}$$

$$T_0 = T F$$

$$\frac{T_0}{T_e} = 1,14$$

$$\frac{T_0}{1,14} = \frac{300}{1,14} = T_e = 263K$$

$$p_0 = p F^{\frac{k}{k-1}}$$

$$\frac{\rho_0}{\rho_e} = 1,40$$

$$\rho_e = \frac{\rho_0}{1,40} = \frac{1,86}{1,40} = 1,33kg/m^3$$

$$M_e = \frac{V_0}{c_e}$$

$$V_e = M_e c_e = M_e \sqrt{kRT_e} \quad V_e = 0,848 \sqrt{1,4 \times 287 \times 263} = 276m/s$$

$$\dot{m} = \rho_e V_e A_e = 1,33 \times 276 \times 1 \times 10^{-6} = 0,367g/s$$

Se o choque ocorre depois da saída do bocal, ainda consideramos um escoamento supersônico. Se os choques ocorrem antes da saída, eles abaixam a velocidade do fluido e se tornam subsônicos.

O fluxo de massa se torna constante a partir de $M = 1$.

$$\dot{m} = \rho VA$$

$$p_b A_e$$

Exemplo 5. Motor-foguete dos ônibus espaciais da NASA, motor SSME. Dados:

Pressão na câmara de combustão:

$p_0 = 22,48MPa$.

Combustível: H_2 ;

Oxidante: O_2 ;

T de combustão: $T_b = 300K$;

\dot{W} bomba de $O_2 = 29430$ HP;

\dot{W} bomba de $H_2 = 77310$ HP;

Massa: 3200kg;

$L = 4,27m$;

$D_e = 2,4m$;

$p_b = 101,3kPa$;

$R = 831,4$ J/kgK;

$k = 1,4$;

$A_e/A^* = 77,5$.

Resolução:

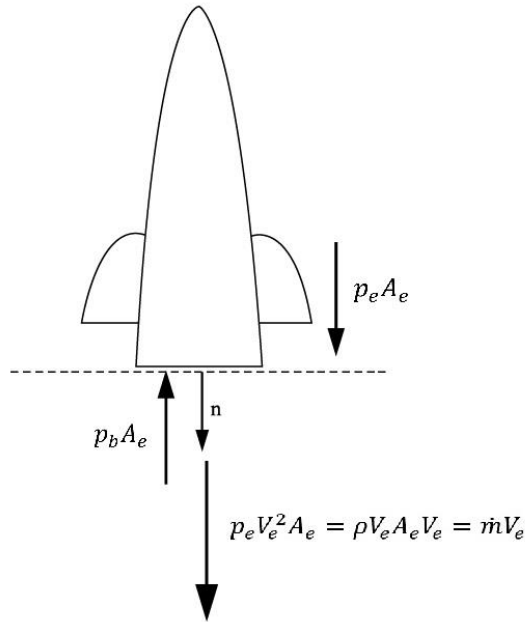


Figura 19 – Ilustração para o exemplo 5

Calcular o empuxo (E) produzido pelo motor SSME.

$$E = \dot{m}_e V_e + A_e(p_e - p_b)$$

$$\frac{A_e}{A^*} = 77,5$$

(eq. 28)
→

$$M_e = 6,546$$

$$\frac{p_0}{p_e} = 2711$$

(eq. 15 e 18)
→

$$p_e = 8292 \text{ Pa}$$

$$\frac{T_0}{T_e} = 9,570$$

$$T_e = 313,5 \text{ K}$$

$$V_e = C_e M_e = M_e \sqrt{kRT_e} = 3954 \text{ m/s}$$

$$\rho_e = \frac{p_e}{RT_e} = 0,03181 \text{ kg/m}^3$$

$$A_e = \frac{\pi D_e^2}{4} = 4,525 \text{ m}^2$$

$$\dot{M}_e = \rho_e V_e A_e = 569,0 \text{ kg/s}$$

$$E = \dot{M}_e V_e + A_e(p_e - p_0) = 2,245 \times 10^6 - 4,208 \times 10^5 = 1,824 \text{ MN} = 186,1 \text{ tf}$$

Exemplo 6. Motor-foguete do foguete Saturno V, motor F-1. Dados:

Pressão na câmara de combustão:
 $p_0 = 6,771 \text{ MPa}$.

Combustível: querosene (RP-1);
Oxidante: O_2 ;

$$\begin{aligned}
T_0 &= 3640 \text{ K;} \\
\text{Massa: } &8494 \text{ kg;} \\
L &= 5,59 \text{ m;} \\
D_e &= 3,5 \text{ m;}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
p_b &= 101,3 \text{ kPa;} \\
R &= 364,6 \text{ J/kgK;} \\
k &= 1,15; \\
A_e/A^* &= 16.
\end{aligned}$$

Empuxo = ?

Resolução:

$$E = \dot{m}_e V_e + A_e(p_e - p_b)$$

$$\frac{A_e}{A^*} = 16 \quad (\text{eq. 28}) \quad \rightarrow \quad M_e = 3,425$$

$$\frac{p_0}{p_e} = 126,5 \quad (\text{eq. 15 e 18}) \quad \rightarrow \quad p_e = 53530 \text{ Pa}$$

$$\frac{T_0}{T_e} = 1,880 \quad T_e = 1936 \text{ K}$$

$$V_e = C_e M_e = M_e \sqrt{kRT_e} = 3086 \text{ m/s} \quad \rho_e = \frac{p_e}{RT_e} = 0,07584 \text{ kg/m}^3$$

$$A_e = \frac{\pi D_e^2}{4} = 9,621 \text{ m}^2 \quad \dot{M}_e = \rho_e V_e A_e = 2252 \text{ kg/s}$$

$$E = \dot{M}_e V_e + A_e(p_e - p_0) = 6,950 \times 10^6 - 4,596 \times 10^5 = 6,490 \text{ MN} = 662,3 \text{ tf}$$

