

## O método dos elementos finitos

### 1.1. Um breve histórico

O método dos elementos finitos (MEF) surgiu lá pela quinta década do século XX, quando foram lançados os primeiros computadores. Os fundamentos matemáticos do MEF já eram conhecidos havia tempo, mas as ferramentas de cálculo então disponíveis inviabilizavam a sua implementação e utilização.

Inicialmente o MEF foi aplicado na análise de problemas da mecânica dos sólidos, mas logo a sua aplicação estendeu-se à análise de outros fenômenos físicos. Esta abrangência mais o sucesso do método propiciaram o estudo mais profundo e extenso dele. Da análise matemática do método resultaram estimadores de erro e critérios de estabilidade, que garantem aos resultados mais confiabilidade. Da análise estática passou-se à dinâmica; dos problemas inicialmente lineares passou-se aos não-lineares; da análise de um único fenômeno passou-se à de vários fenômenos simultâneos e interagentes; de interfaces computador-usuário pouco práticas passou-se às interfaces gráficas, mais amigáveis e intuitivas... No presente o MEF continua evoluindo nos seus diversos aspectos, conforme demonstra a quantidade de artigos científicos atualmente publicados em torno dele.

### 1.2. Mais um modelo

Dada a riqueza e complexidade do mundo físico, sempre se fica aquém ao querer entender e dominar a sua natureza. Quando se tenta prever o comportamento da realidade, recorre-se a uma simplificação dela, denominada modelo. O modelo admite uma gradação, no sentido de representar melhor ou pior ou de deixar à mostra um ou outro aspecto da realidade. Por exemplo, ao analisar mecanicamente um corpo sólido, pode-se deixar de lado fenômenos térmicos, elétricos e magnéticos, supondo que não interfiram na análise de que é objeto. Abstraindo-se destes, pode-se ainda considerar, ou não, a deformação do corpo sólido, levando respectivamente a um modelo de sólido deformável, ou a um de corpo rígido. Ao empregar um ou outro modelo, observam-se mais ou menos fenômenos. No caso da escolha de um modelo de corpo rígido, não é possível de modo algum observar a vibração que na realidade ele sofre, tal é o nível de simplificação deste modelo.



FIGURA 1.1. Sequência de modelos.

Há uma cadeia de modelos até se chegar ao modelo de elementos finitos de um fenômeno físico, conforme a Fig. 1.1. No início dela, à esquerda, está o modelo físico do fenômeno, que leva em conta a geometria, a constituição material e a interação do corpo com o meio circundante. Parte central nesta etapa de modelamento é a identificação das leis físicas envolvidas no fenômeno e da relevância de cada uma delas para a análise pretendida. Esta relevância é ditada pelo grau de complexidade

ou de acurácia desejado para ele. O modelo matemático é o seguinte na cadeia. Nele, em função do modelo físico, o fenômeno físico é representado por um problema a valores no contorno em que o sistema de equações diferenciais e as condições de contorno traduzem em linguagem matemática o comportamento do fenômeno com base na geometria, na interação com o meio circundante e nas leis físicas nele implicadas. Na seqüência está o modelo numérico, no qual o MEF se insere, Fig. 1.2. No modelo numérico a geometria geralmente sofre simplificações e o sistema de equações diferenciais é resolvido por meio de um método numérico. A forma final do modelo numérico é dada por meio de um sistema de equações algébricas lineares. No caso de se empregar como método numérico o MEF, este sistema é denominado modelo de elementos finitos. A Fig. 1.3 ilustra o encadeamento de modelos na aplicação de um fenômeno da mecânica dos sólidos.

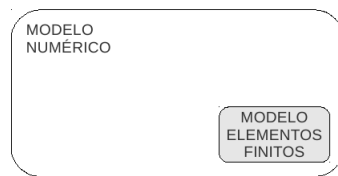


FIGURA 1.2. O método dos elementos finitos é mais um entre outros métodos robustos para a solução numérica do modelo matemático.

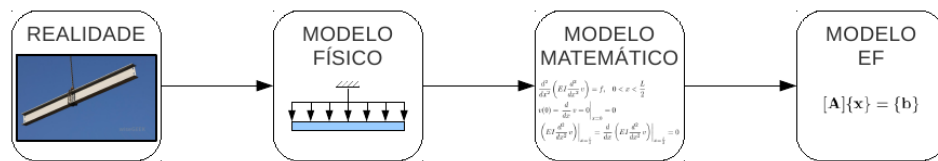


FIGURA 1.3. Sequência de modelos aplicada à viga.

### 1.3. Uma ferramenta robusta

O MEF se aplica a uma gama enorme de problemas relativos aos diversos fenômenos físicos sujeitos a uma grande variedade de interações com a vizinhança onde eles ocorrem. Além disso, a estabilidade e a acurácia do método estão bem estudadas e solidamente amparadas em teorias matemáticas, o que lhe confere robustez. Daí o seu largo emprego como ferramenta para análise em vários campos da ciência e da engenharia, Fig. 1.4.

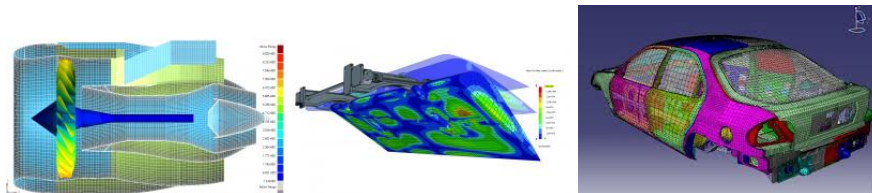


FIGURA 1.4. Análises de uma turbina (e), um flap (c) e um automóvel (d) pelo MEF.

Inicialmente, dada a precariedade da interface com o usuário, os pacotes computacionais do MEF não eram tão amigáveis como hoje. Então, a entrada de dados

era feita por meio de cartões perfurados; num estágio mais avançado, por terminal de computador, até a substituição dos computadores de “grande-porte”. Com o advento dos microcomputadores, a entrada de dados passou, inicialmente de um arquivo previamente editado contendo os dados, para as interfaces gráficas com o usuário (em inglês GUI, *graphical user interface*), Fig. 1.5, que emprega janelas, mouse, *touch-screen*, etc. para a comunicação da máquina com o usuário. É comum encontrar o MEF integrado a ferramentas CAE (*computer aided engineering*) ou pacotes de MEF que permitem importar dados de ferramentas CAD (*computer aided design*), Fig. 1.6.

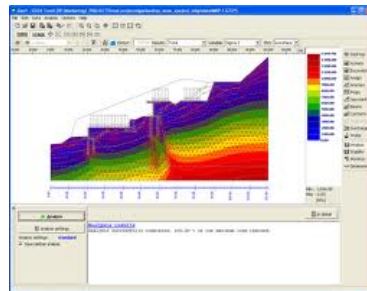


FIGURA 1.5. GUI: interface gráfica com o usuário.

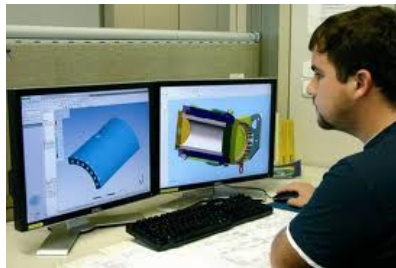


FIGURA 1.6. CAE: *computer aided engineering*.

No atual estágio, a apresentação gráfica é muito rica, permitindo visualizar o resultado das análises por meio de mapas de cores, animações gráficas em tempo real, seleção de cortes para visualização, etc.

#### 1.4. Considerações finais

Por trás das imagens mostradas acima, que impressionam quanto à facilidade de análise propiciada ao usuário, há uma série de definições e fundamentos matemáticos e programação computacional. As duas primeiras serão vistas ao longo do curso e o aluno terá contato com a última no trabalho que será proposto como parte da avaliação. Dada a exiguidade de tempo, o curso se restringirá somente a problemas unidimensionais.



## Formulações integrais

### 2.1. Fundamentos matemáticos

**2.1.1. Definições preliminares.** Algumas definições matemáticas prévias fazem-se necessárias para o bom entendimento dos fundamentos do método dos elementos finitos.

DEFINIÇÃO 2.1 (Notação de uma Equação Diferencial). *Uma equação diferencial linear é denotada de forma genérica como:*

$$Au + f = 0, \quad x \in \Omega \subset \mathbb{R}^n \quad (2.1)$$

e

$$u : x \rightarrow u(x) \quad (2.2a)$$

$$f : x \rightarrow f(x) \quad (2.2b)$$

onde  $A$  é um operador diferencial linear,  $u$  é a variável dependente e  $f$  a independente.

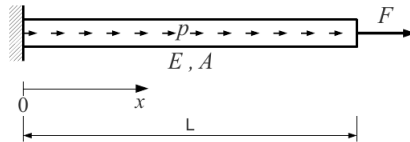


FIGURA 2.1. Barra axialmente carregada, restrita à esquerda e livre à direita.

EXEMPLO 2.1 (Operador diferencial). *Na barra mostrada na Fig. 2.1, a equação diferencial que rege o deslocamento axial é:*

$$EA \frac{d^2}{dx^2} u + p = 0 \quad (2.3)$$

o operador diferencial é  $EA \frac{d^2}{dx^2}$ , e  $f = p$ . ■

O símbolo  $\Omega$  denota o domínio da equação diferencial, ou seja, a região do espaço  $\mathbb{R}^n$  em que ela é válida.  $\Omega$  é um conjunto aberto, portanto exclui o seu contorno.

EXEMPLO 2.2 (Domínio). *Na mesma barra do exemplo anterior, o domínio é  $\Omega = ]0, L[$ . Num problema bidimensional o domínio seria, por exemplo, a região hachurada na Fig. 2.2. ■*

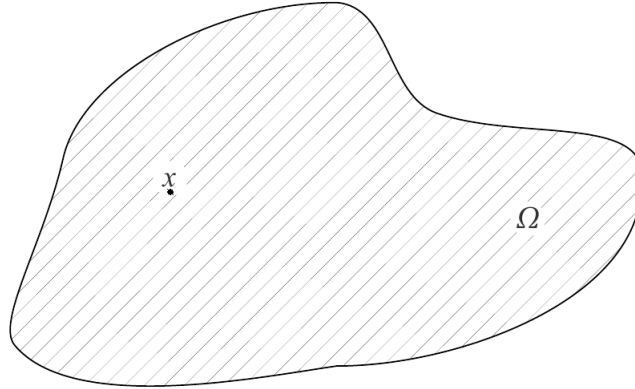


FIGURA 2.2. Domínio  $\Omega$  de um problema bidimensional qualquer.

DEFINIÇÃO 2.2 (Domínio Convexo e Simplesmente Conexo). *Um domínio convexo e simplesmente conexo é aquele no qual quaisquer dois pontos podem ser unidos por uma linha totalmente contida no domínio.*

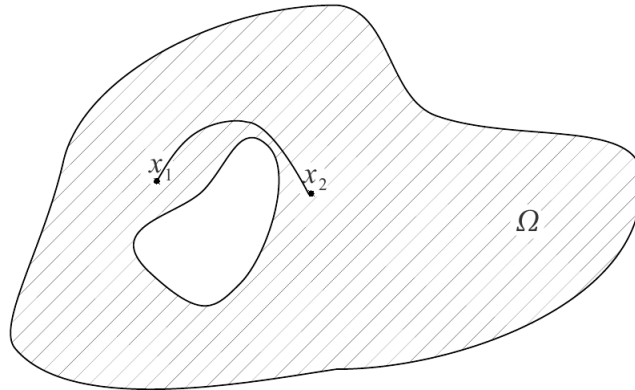


FIGURA 2.3. Domínio simplesmente conexo.

EXEMPLO 2.3 (Domínio convexo e simplesmente conexo).

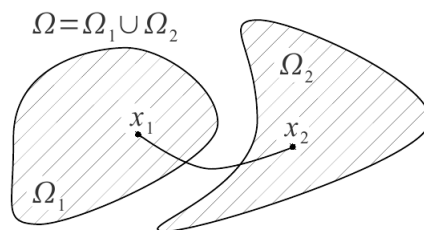


FIGURA 2.4. Domínio não convexo.

EXEMPLO 2.4 (Domínio não convexo e simplesmente conexo).

DEFINIÇÃO 2.3 (Contorno ou Fronteira). *O contorno ou fronteira de um domínio  $\Omega$ , denotado por  $\partial\Omega$ , é o seu fechamento, isto é, aqueles pontos que, não*

pertencendo ao domínio, possuem uma vizinhança  $\varepsilon$  na qual existe pelo menos um ponto pertencente a ele, conforme ilustrado na Fig. 2.5.

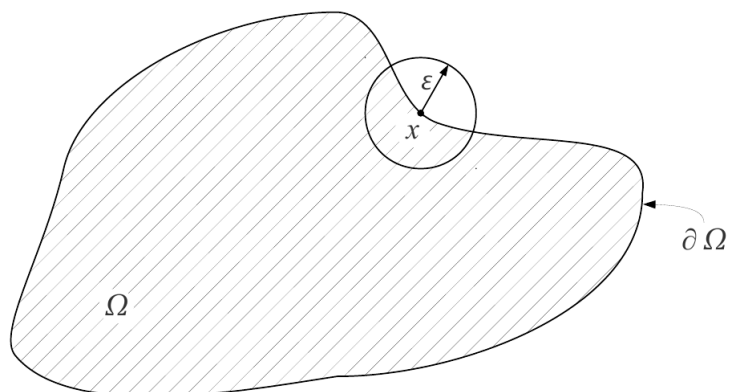


FIGURA 2.5. Ponto  $x$  sobre o contorno e a sua vizinhança  $\varepsilon$ .

DEFINIÇÃO 2.4 (Função Classe  $C^m(\Omega)$ ). Uma função de uma ou várias variáveis é de classe  $C^m(\Omega)$  se todas as suas derivadas parciais até a ordem  $m$ , inclusive, existem e são contínuas em  $\Omega$ .

EXEMPLO 2.5 (Função de classe  $C^0(\Omega)$ ). A função:

$$u(x) = \begin{cases} 1+x, & -1 < x \leq 0 \\ 1-x, & 0 < x < +1 \end{cases}$$

cujos gráfico pode ser visto na Fig. 2.6, é de classe  $C^0$  em  $\Omega = ]-1, +1[$  ■

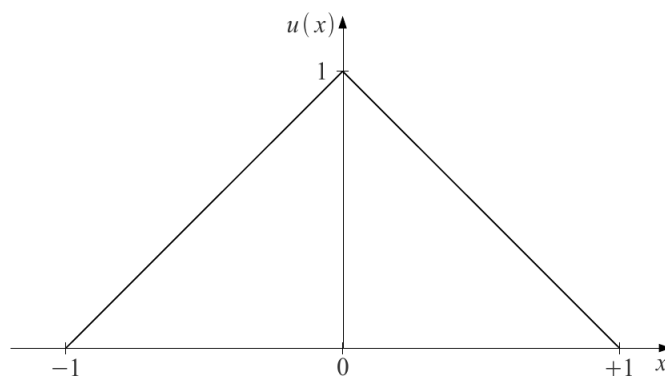


FIGURA 2.6. Função de classe  $C^0$  em  $] - 1, +1[$ .

DEFINIÇÃO 2.5 (Problema a Valores no Contorno). Um problema a valores no contorno é aquela equação diferencial cuja variável dependente ou suas derivadas têm seus valores prescritos no contorno  $\partial\Omega$ .

EXEMPLO 2.6 (Problema a Valores no Contorno).

$$EA \frac{d^2}{dx^2} u + p = 0, \quad x \in ]0, L[ \quad (2.4a)$$

$$u|_{x=0} = 0 \quad (2.4b)$$

$$N|_{x=L} = EA \frac{d}{dx} u \Big|_{x=L} = F \quad (2.4c)$$

DEFINIÇÃO 2.6 (Problema a Valores Iniciais). *Um problema a valores iniciais é aquela equação diferencial cuja variável dependente ou suas derivadas têm seus valores iniciais prescritos (em geral em  $t = 0$ ). Estes problemas são geralmente dependentes do tempo.*

EXEMPLO 2.7 (Problema a Valores Iniciais).

$$\frac{d^2}{dt^2} u + k u = f, \quad t \in ]0, T[ \quad (2.5a)$$

$$u|_{t=0} = u_0 \quad (2.5b)$$

$$\left. \frac{d}{dt} u \right|_{t=0} = v_0 \blacksquare \quad (2.5c)$$

EXEMPLO 2.8 (Problema a Valores no Contorno e Iniciais).

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( a \frac{\partial}{\partial x} u \right) + \rho \frac{\partial}{\partial t} u = f(x, t), \quad x \in ]0, L[ \text{ e } t \in ]0, T[ \quad (2.6a)$$

$$u(x, t)|_{x=0} = g_0(t) \quad (2.6b)$$

$$a \frac{\partial}{\partial x} u \Big|_{x=L} = h_0(t) \quad (2.6c)$$

$$u(x, t)|_{t=0} = u_0(x) \blacksquare \quad (2.6d)$$

DEFINIÇÃO 2.7. *Uma equação diferencial ou condição de contorno/inicial é dita homogênea se a variável independente for nula.*

EXEMPLO 2.9 (Equação diferencial homogênea).

$$\frac{d^2}{dx^2} u + k u = 0, \quad x \in ]0, L[$$

EXEMPLO 2.10 (Condição de contorno não homogênea).

$$u|_{\gamma} = g_0(x), \quad x \in \gamma$$

DEFINIÇÃO 2.8 (Problema de Auto-Valor). *Um problema de auto-valor é de forma geral dado da seguinte forma:*

$$A u = \lambda u, \quad x \in \Omega \quad (2.7a)$$

$$B u|_{\gamma_1} = 0 \quad (2.7b)$$

$$C u|_{\gamma_2} = 0 \quad (2.7c)$$

onde  $B$  e  $C$  são operadores diferenciais no contorno. O problema consiste em determinar os auto-valores  $\lambda$  e as respectivas auto-funções  $u_\lambda$  que satisfaçam a equação diferencial e as condições de contorno do problema.

EXEMPLO 2.11 (Problema de Auto-Valor). *Considere o problema de vibração axial de uma barra simplesmente apoiada:*

$$EA \frac{d^2}{dx^2} u + \rho \omega^2 u = 0, \quad x \in ]0, L[ \quad (2.8a)$$

$$u|_{x=0} = 0 \quad (2.8b)$$

$$EA \frac{d}{dx} u \Big|_{x=L} = 0 \blacksquare \quad (2.8c)$$

### 2.1.2. Relações integrais.



2.1.2.1. *Integração por partes.*

$$\int_a^b u \frac{d}{dx} v \, dx = (uv)|_a^b - \int_a^b \frac{d}{dx} u v \, dx \quad (2.9)$$

Alternativamente, fazendo  $v = \frac{d}{dx} w$  nesta última equação:

$$\int_a^b u \frac{d^2}{dx^2} w \, dx = \left( u \frac{d}{dx} w \right) \Big|_a^b - \int_a^b \frac{d}{dx} u \frac{d}{dx} w \, dx \quad (2.10)$$

Substituindo agora  $w = \frac{d^2}{dx^2} v$  na equação acima, obtém-se esta outra relação integral:

$$\begin{aligned} \int_a^b u \frac{d^4}{dx^4} v \, dx &= \left( u \frac{d^3}{dx^3} v \right) \Big|_a^b - \int_a^b \frac{d}{dx} u \frac{d^3}{dx^3} v \, dx \\ &= \left( u \frac{d^3}{dx^3} v \right) \Big|_a^b - \int_a^b \frac{d}{dx} u \frac{d}{dx} \left( \frac{d^2}{dx^2} v \right) \, dx \end{aligned} \quad (2.11)$$

Aplicando integração por partes no último termo da Eq. 2.11, obtém-se finalmente, após o rearranjo dos termos no segundo membro, a relação integral:

$$\int_a^b u \frac{d^4}{dx^4} v \, dx = \int_a^b \frac{d^2}{dx^2} u \frac{d^2}{dx^2} v \, dx + \left( u \frac{d^3}{dx^3} v \right) \Big|_a^b - \left( \frac{d}{dx} u \frac{d^2}{dx^2} v \right) \Big|_a^b \quad (2.12)$$

2.1.2.2. *Alguns operadores diferenciais.*

DEFINIÇÃO 2.9 (Gradiente de uma campo escalar). *Seja  $u : (x_1, x_2) \rightarrow u(x_1, x_2)$ ,  $(x_1, x_2) \in \Omega \subset \mathbb{R}^2$  um campo escalar. Define-se o gradiente de  $u$  como:*

$$\text{grad } u := \nabla u := \frac{\partial}{\partial x_1} u \vec{e}_1 + \frac{\partial}{\partial x_2} u \vec{e}_2 \quad (2.13)$$

onde  $\vec{e}_1$  e  $\vec{e}_2$  são vetores ortonormais orientados segundo os eixos  $x_1$  e  $x_2$ , respectivamente.

O gradiente é um vetor cujo módulo dá a taxa de variação do escalar na direção e sentido desse vetor. Além disto, o vetor gradiente aponta a direção da máxima variação do campo escalar no ponto.

DEFINIÇÃO 2.10 (Divergente de um campo vetorial). *Seja  $\vec{v} : (x_1, x_2) \rightarrow \vec{v}(x_1, x_2)$ ,  $(x_1, x_2) \in \Omega \subset \mathbb{R}^2$  um campo vetorial. Define-se o divergente de  $\vec{v} = v_1 \vec{e}_1 + v_2 \vec{e}_2$  como:*

$$\text{div } \vec{v} := \nabla \cdot \vec{v} := \frac{\partial}{\partial x_1} v_1 + \frac{\partial}{\partial x_2} v_2 \quad (2.14)$$

O divergente fornece o fluxo líquido do campo vetorial no contorno de um elemento infinitesimal envolvendo o ponto. O divergente de um campo escalar é um campo escalar.

DEFINIÇÃO 2.11 (Teorema do Gradiente). *Seja  $u : (x_1, x_2) \rightarrow u(x_1, x_2)$ ,  $(x_1, x_2) \in \Omega \subset \mathbb{R}^2$  um campo escalar diferenciável em  $\Omega$ . Então a seguinte relação integral é válida:*

$$\int_{\Omega} \nabla u \, d\Omega = \oint_{\gamma} \vec{n} u \, d\gamma \quad (2.15)$$

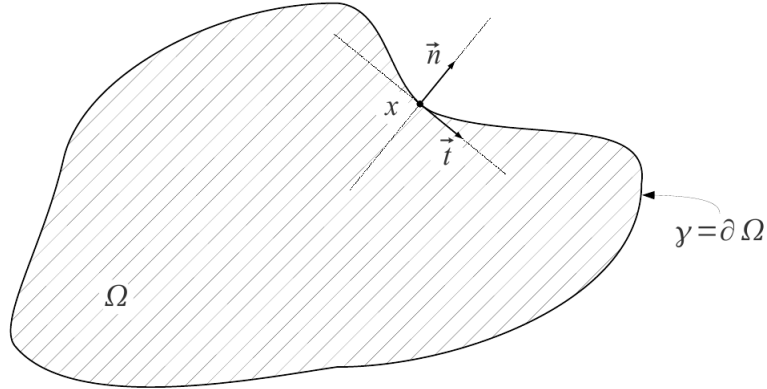


FIGURA 2.7. Ponto  $x$  sobre o contorno e os vetores unitários normal ( $\vec{n}$ ) e tangencial ( $\vec{t}$ ).

onde  $\vec{n}$  é a normal externa ao contorno  $\gamma$ , conforme indicado na Fig. 2.7. A expressão acima se desdobra ainda nestas duas seguintes:

$$\int_{\Omega} \frac{\partial}{\partial x_1} u \, d\Omega = \oint_{\gamma} n_1 u \, d\gamma \quad (2.16a)$$

$$\int_{\Omega} \frac{\partial}{\partial x_2} u \, d\Omega = \oint_{\gamma} n_2 u \, d\gamma \quad (2.16b)$$

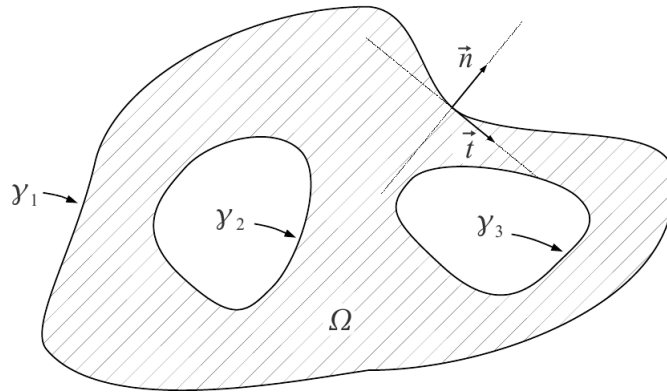


FIGURA 2.8. Domínio simplesmente conexo. Seu contorno  $\gamma$  é  $\gamma_1 \cup \gamma_2 \cup \gamma_3$ .

DEFINIÇÃO 2.12 (Teorema do Divergente). Seja  $\vec{v} : (x_1, x_2) \rightarrow \vec{v}(x_1, x_2)$ ,  $(x_1, x_2) \in \Omega \subset \mathbb{R}^2$  um campo vetorial diferenciável em  $\Omega$ . Então a seguinte relação integral é válida:

$$\int_{\Omega} \nabla \cdot \vec{v} \, d\Omega = \oint_{\gamma} \vec{n} \cdot \vec{v} \, d\gamma \quad (2.17a)$$

ou

$$\int_{\Omega} \left( \frac{\partial}{\partial x_1} v_1 + \frac{\partial}{\partial x_2} v_2 \right) d\Omega = \oint_{\gamma} (n_1 v_1 + n_2 v_2) \, d\gamma \quad (2.17b)$$

2.1.2.3. *Integração Dupla por Partes.* Sejam  $u$  e  $v$  duas funções escalares. É fácil mostrar que:

$$\nabla (uv) = (\nabla u) v + u (\nabla v) \quad (2.18)$$

Aplicando o *Teorema do Gradiente* à integral em  $\Omega$  da expressão acima resulta:

$$\int_{\Omega} \nabla (uv) d\Omega = \int_{\Omega} (\nabla u) v d\Omega + \int_{\Omega} u (\nabla v) d\Omega = \oint_{\gamma} \vec{n} uv d\gamma \quad (2.19a)$$

ou

$$\int_{\Omega} (\nabla u) v d\Omega = - \int_{\Omega} u (\nabla v) d\Omega + \oint_{\gamma} \vec{n} uv d\gamma \quad (2.19b)$$

que pode ser desdobrada em:

$$\int_{\Omega} v \frac{\partial}{\partial x_1} u d\Omega = - \int_{\Omega} u \frac{\partial}{\partial x_1} v d\Omega + \oint_{\gamma} n_1 uv d\gamma \quad (2.20a)$$

e:

$$\int_{\Omega} v \frac{\partial}{\partial x_2} u d\Omega = - \int_{\Omega} u \frac{\partial}{\partial x_2} v d\Omega + \oint_{\gamma} n_2 uv d\gamma \quad (2.20b)$$

2.1.2.4. *Laplaceano de uma função escalar.*

DEFINIÇÃO 2.13 (Laplaceano de uma Função Escalar). *Seja  $u$  uma função escalar. Defina-se o laplaceano de  $u$  como:*

$$\nabla^2 u = \nabla \cdot (\nabla u) := \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} u + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} u \quad (2.21)$$

Um resultado importante para os problemas bidimensionais vem a seguir. Fazendo  $u = \mu$  na Equação 2.20a e  $u = \nu$  na Equação 2.20b e em seguida somando-as, obtém-se:

$$\int_{\Omega} v \left( \frac{\partial}{\partial x_1} \mu + \frac{\partial}{\partial x_2} \nu \right) d\Omega = - \int_{\Omega} \left( \mu \frac{\partial}{\partial x_1} v + \nu \frac{\partial}{\partial x_2} v \right) d\Omega + \oint_{\gamma} (n_1 \mu + n_2 \nu) v d\gamma \quad (2.22)$$

Substituindo agora  $\mu$  por  $\frac{\partial}{\partial x_1} u$  e  $\nu$  por  $\frac{\partial}{\partial x_2} u$  nesta última equação tem-se:

$$\int_{\Omega} v \left( \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} u + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} u \right) d\Omega = - \int_{\Omega} \left( \frac{\partial}{\partial x_1} u \frac{\partial}{\partial x_1} v + \frac{\partial}{\partial x_2} u \frac{\partial}{\partial x_2} v \right) d\Omega + \oint_{\gamma} \left( n_1 \frac{\partial}{\partial x} u + n_2 \frac{\partial}{\partial y} u \right) v d\gamma \quad (2.23)$$

E empregando a notação de laplaceano definida acima, chega-se finalmente a:

$$- \int_{\Omega} v \nabla^2 u d\Omega = \int_{\Omega} \nabla v \cdot \nabla u d\Omega - \oint_{\gamma} v \nabla u \cdot \vec{n} d\gamma \quad (2.24)$$

onde  $\nabla u \cdot \vec{n} = \frac{\partial}{\partial n} u$  é a taxa de variação de  $u$  na direção da normal ao contorno  $\gamma$  no ponto, conforme indicado na Fig. 2.9.

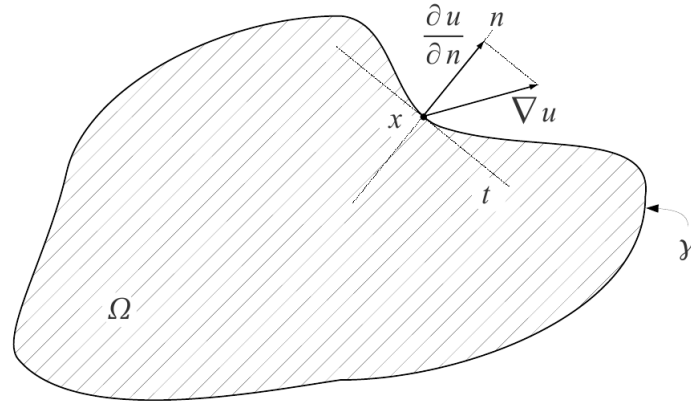


FIGURA 2.9. Taxa de variação de  $u$  na direção da normal externa no ponto  $x$  sobre o contorno.

#### 2.1.2.5. Funcionais.

DEFINIÇÃO 2.14 (Funcional). Funcional *a grosso modo* é uma função de função ou, mais rigorosamente, é um operador  $I$  que mapeia uma função  $u \in \mathcal{U}$  a um escalar  $I(u) \in \mathcal{V}$ , conforme o esquema mostrado na Fig. 2.10. Por exemplo:

$$I(u) = \int_a^b F(x, u, u') dx \quad (2.25)$$

onde  $F$  é uma função.

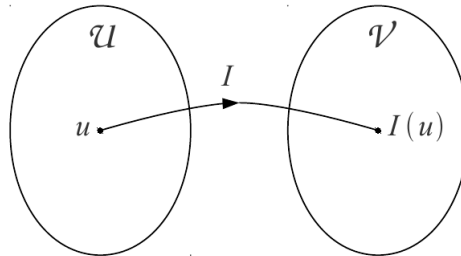


FIGURA 2.10. Descrição esquemática de um funcional.

DEFINIÇÃO 2.15 (Funcional Linear). Um funcional é linear se:

$$I(\alpha u + \beta v) = \alpha I(u) + \beta I(v) \quad (2.26)$$

para quaisquer que sejam os escalares  $\alpha$  e  $\beta$  e as funções  $u$  e  $v$ .

DEFINIÇÃO 2.16 (Funcional Bilinear). Um funcional  $B(u, v)$  é bilinear se for linear em cada um dos seus argumentos, isto é:

$$B(\alpha u + \beta w, v) = \alpha B(u, v) + \beta B(w, v) \quad (2.27a)$$

$$B(u, \alpha v + \beta w) = \alpha B(u, v) + \beta B(u, w) \quad (2.27b)$$

para quaisquer que sejam os escalares  $\alpha$  e  $\beta$  e as funções  $u, v$  e  $w$ .

DEFINIÇÃO 2.17 (Funcional Bilinear Simétrico). *Um funcional bilinear é simétrico se:*

$$B(u, v) = B(v, u) \quad (2.28)$$

para quaisquer que sejam as funções  $u$  e  $v$ .

#### 2.1.2.6. Cálculo Variacional.

DEFINIÇÃO 2.18. *O variacional de uma função  $u$  qualquer, denotada por  $\delta u$ , é a variação:*

$$\delta u = \alpha v \quad (2.29)$$

onde  $\alpha$  é uma constante escalar e  $v$  é uma função do mesmo espaço de  $u$ . A Fig. 2.11 ilustra uma possível variação da função  $u$  e o efeito do fator  $\alpha$  sobre a variação  $\delta u$ .

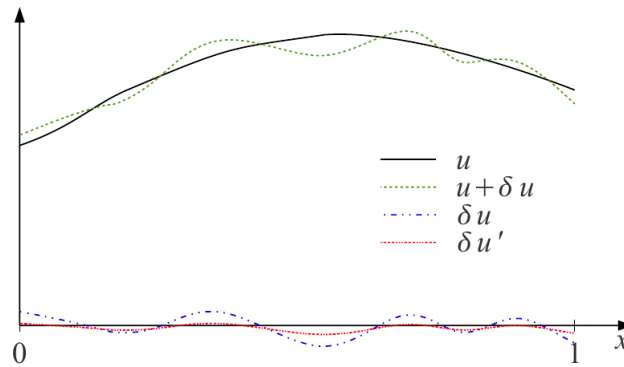


FIGURA 2.11. Variação de  $u$ :  $\delta u = \alpha_1 v$ . Variação  $\delta u' = \alpha_2 v$ , com  $\alpha_1 > \alpha_2$ .

O variacional  $\delta u$  representa uma variação admissível de  $u(x)$  num ponto fixo  $x$ . Se  $u$  é especificado no contorno, por exemplo, o variacional  $\delta u$  é nulo aí, ou seja, ele satisfaz aí uma condição de contorno homogênea.

Seja agora uma função  $F = F(x, u, u')$ . Em analogia ao diferencial de uma função de duas variáveis, a primeira variação de  $F$  é:

$$\delta F = \frac{\partial}{\partial u} F \delta u + \frac{\partial}{\partial u'} F \delta u' \quad (2.30)$$

onde:

$$\frac{\partial}{\partial u} F = \lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{F(x, u + \alpha v, u') - F(x, u, u')}{\alpha v} \quad (2.31)$$

De forma análoga define-se  $\frac{\partial}{\partial u'} F$ .

Por analogia ao cálculo de várias variáveis, pode-se obter as seguintes identidades para o operador variacional:

$$\text{i. } \delta (F_1 \pm F_2) = \delta F_1 \pm \delta F_2 \quad (2.32a)$$

$$\text{ii. } \delta (F_1 F_2) = F_2 \delta F_1 + F_1 \delta F_2 \quad (2.32b)$$

$$\text{iii. } \delta \left( \frac{F_1}{F_2} \right) = \frac{F_2 \delta F_1 - F_1 \delta F_2}{F_2^2} \quad (2.32c)$$

$$\text{iv. } \delta (F_1^n) = nF_1^{n-1} \delta F_1 \quad (2.32d)$$

O operador variacional admite a comutação com os operadores diferencial e integral. Seja  $u = \alpha v$ . Então:

$$\text{i. } \frac{d}{dx} \delta u = \frac{d}{dx} \alpha v = \alpha \frac{d}{dx} v = \alpha v' = \delta u' = \delta \left( \frac{d}{dx} u \right) \quad (2.33a)$$

$$\text{ii. } I(\delta u) = \int_a^b \delta u dx = \int_a^b \alpha v dx = \alpha \int_a^b v dx = \alpha I(v) = \delta I(u) = \delta \int_a^b u dx \quad (2.33b)$$

## 2.2. A forma fraca dos problemas a valores no contorno

O termo *forma fraca* refere-se a uma forma integral do problema a valores no contorno na qual a ordem do operador diferencial fica reduzida de  $2m$  para  $m$ . Há vários modos de se obter a forma fraca do problema a valores no contorno. São eles: o *método da integral ponderada*, o *método variacional* e o *método dos trabalhos virtuais*. Sendo este último mais apropriado a problemas da mecânica dos sólidos.

Na apresentação desses métodos vai-se recorrer à exemplificação, pois para cada operador diferencial obtém-se uma forma fraca própria, contudo os procedimentos de obtenção se assemelham.

Uma peculiaridade da forma fraca é que parte das condições de contorno ficam nela explícitas.

Para exemplificar o procedimento de aplicação dos três métodos, recorre-se ao mesmo problema a valores no contorno descrito a seguir (unidimensional a princípio, mas que pode ser facilmente estendido aos bi e tridimensionais):

$$-\frac{d}{dx} \left( a(x) \frac{d}{dx} u \right) = q(x), \quad x \in ]0, L[ \quad (2.34a)$$

$$u|_{x=0} = u_0 \quad (2.34b)$$

$$\left( a(x) \frac{d}{dx} u \right) \Big|_{x=L} = q_0 \quad (2.34c)$$

**2.2.1. Método da integral ponderada.** Passando o segundo membro da Equação 2.34a para o primeiro, multiplicando o primeiro membro a membro pela função de ponderação  $w(x)$  e finalmente integrando no domínio do problema, obtém-se:

$$\int_0^L \left( \frac{d}{dx} \left( a(x) \frac{d}{dx} u \right) + q(x) \right) w(x) dx = 0 \quad (2.35)$$

Observando esta última equação, só há uma única função  $u(x)$  que a satisfaz para qualquer que seja a função de ponderação,  $w$ , a mesma que satisfaz a Equação 2.34a.

Na prática procura-se para a Equação 2.35 uma solução aproximada da forma:

$$u = \sum_{j=1}^N c_j \phi_j + \phi_0 \quad (2.36)$$

onde  $\{\phi_j\}_{j=1}^N$  é o conjunto de funções de aproximação previamente escolhido satisfazendo a condição essencial<sup>1</sup> homogênea e  $\phi_0$  é uma função que satisfaz a condição de contorno essencial do problema. São necessárias  $N$  equações para determinar os coeficientes  $c_j$  da aproximação.

Voltando à Equação 2.35 e aplicando nela a integração por partes uma vez, obtém-se:

$$\begin{aligned} & \int_0^L \left( \frac{d}{dx} \left( a \frac{d}{dx} u \right) + q \right) w dx = \\ & - \int_0^L a \frac{d}{dx} u \frac{d}{dx} w dx + \left( a w \frac{d}{dx} u \right) \Big|_0^L + \int_0^L q w dx = 0 \end{aligned} \quad (2.37a)$$

ou:

$$\int_0^L a \frac{d}{dx} w \frac{d}{dx} u dx - \int_0^L q w dx - \left( a w \frac{d}{dx} u \right) \Big|_0^L = 0 \quad (2.37b)$$

Como não se conhece a priori  $\left( \frac{d}{dx} u \right) \Big|_{x=0}$  no problema tomado como exemplo, impõe-se que o peso  $w$  seja tal que  $w|_{x=0} = 0$ , restringindo as possibilidades para o conjunto de funções peso. Deste modo obtém-se finalmente a forma fraca do problema a valores no contorno original:

$$\int_0^L a \frac{d}{dx} w \frac{d}{dx} u dx - \int_0^L q w dx - q_0 w(L) = 0 \quad (2.38)$$

2.2.1.1. *Condições de contorno essenciais e naturais.* Cabe aqui uma breve pausa para expor a classificação dos tipos de condição de contorno. Observando, por exemplo, os termos da Equação 2.37b no contorno, os coeficientes da função peso denominam-se *variáveis secundárias*, e suas especificações no contorno chamam-se *condições de contorno naturais*; as variáveis dependentes expressas na mesma forma como a função peso se apresenta no termo de contorno denominam-se *variáveis primárias*, e suas especificações no contorno chamam-se *condições de contorno essenciais*.

Assim, no caso da citada equação,  $u$  é a variável primária e  $a \frac{d}{dx} u$  a secundária. Logo,  $u|_{x=0} = u_0$  e  $\left( a \frac{d}{dx} u \right) \Big|_{x=L} = q_0$  são respectivamente as condições de contorno essencial e natural do problema exemplificado.

**2.2.2. Método variacional.** A forma fraca pode-se obter também por meio da minimização de um funcional dentro de um espaço de funções válido para o problema a valores no contorno. Tal funcional não é em geral trivialmente obtido. No entanto, para problemas da mecânica dos sólidos, ele coincide com a energia potencial elástica do sólido.

Para ilustrar o método, tome-se o funcional associado ao problema a valores no contorno, Equações 2.34:

$$I(v) = \frac{1}{2} \int_0^L a \left( \frac{d}{dx} v \right)^2 dx - \int_0^L q v dx - v(L) q_0, \quad v \in \mathcal{V} \quad (2.39)$$

onde  $\mathcal{V} = \{v : v|_{x=0} = u_0\}$  é o espaço de funções admissíveis, ou seja, o conjunto de todas as funções que satisfazem a condição essencial do problema. A solução

<sup>1</sup>A definição de condição de contorno essencial e natural está mais abaixo, no item 2.2.1.1.

procurada é aquela que minimiza o funcional acima em  $\mathcal{V}$ . Seja  $u$  esta solução, então o variacional de  $I(v)$  em  $u$  é:

$$\delta I(v)|_{v=u} = 0 \quad (2.40a)$$

ou seja:

$$\int_0^L a \frac{d}{dx} \delta u \frac{d}{dx} u dx - \int_0^L \delta u q dx - \delta u(L) q_0 = 0 \quad (2.40b)$$

Nesta última equação foram aplicadas as relações variacionais apontadas na Eqs. 2.32 e 2.33

Fazendo  $\delta u = w$  nesta última equação, obtém-se finalmente a forma fraca (vide a Equação 2.38) na qual o variacional de  $u$  deve satisfazer a condição essencial homogênea em  $x = 0$ , isto é,  $\delta u|_{x=0} = w|_{x=0} = 0$ .

Em forma abstrata o primeiro membro da Equação 2.40b pode ser escrito como a diferença entre o funcional bilinear  $B(w, u)$  e o linear  $l(w)$ :

$$B(w, u) - l(w) = 0 \quad (2.41)$$

onde:

$$B(w, u) = \int_0^L a \frac{d}{dx} w \frac{d}{dx} u dx \quad (2.42a)$$

e:

$$l(w) = \int_0^L w q dx + w(L) q_0 \quad (2.42b)$$

Onde a Equação 2.41 é a representação abstrata da forma fraca.

Por sua vez, o funcional a ser minimizado é representado abstratamente como:

$$I(v) = \frac{1}{2} B(v, v) - l(v) \quad (2.43)$$

e o seu mínimo é dado pelo variacional:

$$\delta I(v)|_{v=u} = \frac{1}{2} \delta B(u, u) - \delta l(u) = B(\delta u, u) - l(\delta u) = 0 \quad (2.44)$$

que uma vez fazendo  $\delta u = w$ , resulta a forma fraca abstrata, Equação 2.41.

**COMENTÁRIO 2.1.** *O emprego do funcional é importante para demonstrar a existência e unicidade da solução da forma fraca.*

**2.2.3. Princípio dos trabalhos virtuais.** O princípio dos trabalhos virtuais é uma via de acesso à obtenção da forma fraca para problemas da mecânica dos sólidos lineares ou não lineares.

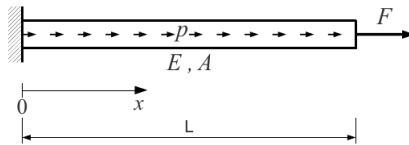


FIGURA 2.12. Barra axialmente carregada, restrita à esquerda e livre à direita.



Seja, por exemplo, uma barra com uma restrição axial na extremidade esquerda, um carregamento axialmente distribuído  $p$  e uma força axial  $F$  aplicada na extremidade direita, conforme ilustra a Fig. 2.12. Considere um deslocamento axial virtual  $w$  ao longo da barra compatível com a restrição axial à direita, ou seja,  $w|_{x=0} = 0$ . Igualando os trabalhos virtuais externo e interno sobre a barra obtém-se:

$$F w(L) + \int_0^L p w dx = \int_{\text{barra}} N dw = \int_0^L EA \frac{d}{dx} u \frac{d}{dx} w dx \quad (2.45)$$

onde  $N$  é a força axial,  $u$  é o deslocamento axial real e  $EA$  é a rigidez axial da barra.

Rearranjando os termos nesta última equação resulta a forma fraca do problema:

$$\int_0^L EA \frac{d}{dx} w \frac{d}{dx} u dx - \int_0^L w p dx - F w(L) = 0 \quad (2.46)$$

COMENTÁRIO 2.2. *O deslocamento virtual  $w$  faz o papel de função peso ou de variacional de  $u$ , conforme o método empregado na obtenção da forma fraca, e a rigidez  $EA$  o papel da função  $a$ .*

### 2.3. Métodos variacionais de aproximação

Uma vez visto como chegar à forma fraca, resta ver como obter a solução aproximada, Equação 2.36. Conforme o conjunto de funções escolhido para a função peso (ou variacional de  $v$ ) relativamente ao das funções de aproximação, define-se o método de obtenção da solução aproximada, como se verá a seguir.

**2.3.1. O método de Rayleigh-Ritz.** Os coeficientes  $c_j$  são obtidos substituindo a função peso  $w$  por uma das funções de aproximação  $\phi_i$ . Partindo da forma fraca abstrata:

$$B(w, u) = l(w)$$

no método de *Rayleigh-Ritz*, procura-se a solução:

$$u_N = \sum_{j=1}^N c_j \phi_j + \phi_0 \quad (2.47)$$

que a satisfaça. Para tanto é preciso determinar os coeficientes de Ritz,  $c_j$ , pela substituição do par  $u_N$  e  $\phi_i$  na forma fraca, ou seja:

$$B(\phi_i, \sum_{j=1}^N c_j \phi_j + \phi_0) = l(\phi_i), \quad i = 1, 2, 3, \dots, N \quad (2.48)$$

a qual, uma vez suposta a bilinearidade do operador  $B$ , torna-se:

$$\sum_{j=1}^N B(\phi_i, \phi_j) c_j = l(\phi_i) - B(\phi_i, \phi_0), \quad i = 1, 2, 3, \dots, N \quad (2.49a)$$

ou simplifcadamente, fazendo  $B_{ij} = B(\phi_i, \phi_j)$  e  $F_i = l(\phi_i) - B(\phi_i, \phi_0)$ :

$$\sum_{j=1}^N B_{ij} c_j = F_i, \quad i = 1, 2, 3, \dots, N \quad (2.49b)$$

---

<sup>2</sup>Este deslocamento virtual poderia ser, por exemplo, o causado por uma força virtual qualquer aplicada à barra.

Esta expressão representa um sistema de  $N$  equações algébricas a  $N$  incógnitas, os coeficientes  $c_j$ , cuja solução é única desde que a matriz  $[B_{ij}]$  seja inversível.

Um caminho alternativo para se chegar à forma discreta do problema, Equação 2.49a, parte da minimização do seguinte funcional:

$$I(v) = \frac{1}{2} B(v, v) - l(v) \quad (2.50)$$

com  $v$  restrita ao espaço gerado pelo conjunto  $\{\phi_i\}_{i=1}^N$ , isto é, assume-se que  $v$  seja da forma  $v = \sum_{j=1}^N v_j \phi_j + \phi_0$ . Nestes termos, tem-se:

$$\left. \frac{\partial}{\partial v_i} I \right|_{v_i=c_i} = 0, \quad i = 1, 2, \dots, N \quad (2.51)$$

e, supondo que o operador bilinear seja simétrico:

$$\left. \frac{\partial}{\partial v_i} I \right|_{v_i=c_i} = \sum_{j=1}^N B(\phi_i, \phi_j) c_j + B(\phi_i, \phi_0) - l(\phi_i), \quad i = 1, 2, 3, \dots, N \quad (2.52)$$

Logo, chega-se ao mesmo sistema de equações algébricas, Equação 2.49a.

As condições de contorno naturais estão implicitamente impostas na forma fraca. Já as essenciais são impostas por meio de uma escolha apropriada de  $\phi_j$  e  $\phi_0$ , ou seja, estas devem ser selecionadas de modo a verificar:

$$u|_{x=x_0} = u_0 = \phi_0(x_0) \quad (2.53a)$$

$$\phi_j|_{x=x_0} = 0, \quad j = 1, 2, 3, \dots, N \quad (2.53b)$$

Esta última exigência, Equação 2.53b, deve-se à necessidade da função peso ser homogênea no contorno essencial.

Outras exigências ao conjunto  $\{\phi_i\}_{i=1}^N$  são necessárias:

- (1) o conjunto deve ser suficientemente diferenciável para atender o operador bilinear  $B(\cdot, \cdot)$ ;
- (2) a matriz  $[B_{ij}]$  deve ser inversível;
- (3) o conjunto deve ser completo, ou seja, deve ser capaz de reproduzir qualquer elemento do espaço de função utilizado. Por exemplo, o conjunto de polinômios do segundo grau  $\{x, x^2\}$  não é completo no espaço de polinômios do segundo grau, pois não gera todo e qualquer polinômio desse espaço, por exemplo, o polinômio  $x^2 + x + 1$ .

**2.3.2. O método dos resíduos ponderados.** O método dos resíduos ponderados é uma generalização do método de Rayleigh-Ritz na qual as funções peso são escolhidas de um conjunto independente do das funções de aproximação  $\{\phi_i\}_{i=1}^N$ .

Partindo da equação diferencial do problema a valores no contorno, Equação 2.1, suponha que a solução aproximada para ela seja como na Equação 2.47. Substituindo esta última equação na penúltima obtém-se o resíduo:

$$r = A(u_N) - f = A\left(\sum_{j=1}^N c_j \phi_j + \phi_0\right) - f \neq 0 \quad (2.54)$$

Impõe-se finalmente que a integral ponderada do resíduo seja nula no domínio do problema:

$$\int_{\Omega} \psi_i r \, d\Omega = 0 \quad (2.55)$$

onde  $\psi_i$  é a função de ponderação, que é distinta das  $\phi_j$ .

As exigências para  $\phi_0$  e  $\phi_j$  é que tenham derivadas não identicamente nulas até a ordem do operador  $A$ , satisfaçam todas as condições de contorno, sejam linearmente independentes e sejam de uma classe de funções compatível com o operador diferencial da equação governante do problema. Na prática  $\phi_j$  satisfaz todas as condições de contorno homogêneas e  $\phi_0$  todas as não-homogêneas.

COMENTÁRIO 2.3. *Observe que as exigências de continuidade do método dos resíduos ponderados são mais severas que as do de Rayleigh-Ritz.*

2.3.2.1. *O método de Petrov-Galerkin.* Quando  $\psi_i \neq \phi_i$ , o método dos resíduos ponderados denomina-se método de Petrov-Galerkin.

Supondo que o operador diferencial  $A$  da Equação 2.47 seja linear, pode-se rescrever a Equação 2.55 como:

$$\sum_{j=1}^N \left[ \int_{\Omega} \psi_i A(\phi_j) \, d\Omega \right] c_j = \int_{\Omega} \psi_i (f - A(\phi_0)) \, d\Omega \quad (2.56a)$$

ou simplesmente:

$$\sum_{j=1}^N A_{ij} c_j = F_i \quad (2.56b)$$

onde:

$$A_{ij} = \int_{\Omega} \psi_i A(\phi_j) \, d\Omega \neq A_{ji} \quad (2.56c)$$

e:

$$F_i = \int_{\Omega} \psi_i (f - A(\phi_0)) \, d\Omega \quad (2.56d)$$

2.3.2.2. *O método de Galerkin.* Quando a função peso  $\psi_i$  é igual à função de aproximação  $\phi_i$ , o método dos resíduos ponderados é conhecido como método de Galerkin.

Fazendo as devidas adaptações às Equações 2.56, obtêm-se:

$$\sum_{j=1}^N A_{ij} c_j = F_i \quad (2.57a)$$

onde:

$$A_{ij} = \int_{\Omega} \phi_i A(\phi_j) \, d\Omega \neq A_{ji} \quad (2.57b)$$

e:

$$F_i = \int_{\Omega} \phi_i (f - A(\phi_0)) \, d\Omega \quad (2.57c)$$

Os métodos de Galerkin e de Rayleigh-Ritz diferem entre si quanto ao uso da integral ponderada. Enquanto no primeiro a solução aproximada é imposta diretamente na integral ponderada, no segundo ela é introduzida na forma fraca. Logo, o método de Galerkin tem exigências mais severas quanto à ordem de diferenciação

das funções  $\phi_i$ . Cabe observar também que no método de Galerkin as funções  $\phi_i$  devem satisfazer todas as condições de contorno homogêneas e  $\phi_0$  todas as não-homogêneas.

Ambos os métodos, Rayleigh-Ritz e Galerkin, obtêm a mesma solução quando:

- (1) ambos utilizam as mesmas funções de aproximação  $\phi_i$ ; e
- (2) as condições de contorno são só essenciais.

2.3.2.3. *O método dos mínimos quadrados.* Neste método obtêm-se os coeficientes  $c_i$  da solução aproximada minimizando a integral do quadrado do resíduo no domínio do problema, a qual se torna uma função  $N$ -dimensional:

$$F(c_i) = \int_{\Omega} r^2 d\Omega \quad (2.58)$$

Logo, procuram-se os coeficientes  $c_i$  que satisfaçam:

$$\frac{\partial}{\partial c_i} F = 2 \int_{\Omega} r \frac{\partial}{\partial c_i} r d\Omega = 0 \quad (2.59)$$

ou simplesmente:

$$\int_{\Omega} r \frac{\partial}{\partial c_i} r d\Omega = 0 \quad (2.60)$$

Observe a semelhança entre as Equações 2.60 e 2.55. A diferença está em que a função peso é específica na primeira, a derivada do resíduo em relação ao coeficiente  $c_i$ , enquanto nesta última ela é qualquer desde que respeitadas as restrições do método dos resíduos ponderados.

Após substituir a aproximação expressa pela Equação 2.47 na Equação 2.60, supondo que o operador diferencial  $A$  seja linear e observando que:

$$\psi_i = \frac{\partial}{\partial c_i} r = A(\phi_i) \quad (2.61)$$

pode-se rescrever a Equação 2.60 como:

$$\sum_{j=1}^N c_j \int_{\Omega} A(\phi_i) A(\phi_j) d\Omega = \int_{\Omega} A(\phi_i) (f - A(\phi_0)) d\Omega \quad (2.62)$$

ou em forma compacta:

$$\sum_{j=1}^N A_{ij} c_j = F_i \quad (2.63)$$

onde:

$$A_{ij} = A_{ji} = \int_{\Omega} A(\phi_i) A(\phi_j) d\Omega \quad (2.64)$$

e:

$$F_i = \int_{\Omega} A(\phi_i) (f - A(\phi_0)) d\Omega \quad (2.65)$$

COMENTÁRIO 2.4. *A matriz  $[A_{ij}]$  é simétrica e a ordem do operador diferencial na Equação 2.64 é a própria do operador  $A$ , isto é, o método dos mínimos quadrados exige suavidade mais severa para as funções  $\phi_i$  do que o método de Rayleigh-Ritz.*

2.3.2.4. *O método da colocação.* O método da colocação é um caso particular do método dos resíduos ponderados no qual a função peso é a função delta de Dirac:

$$\psi_i = \delta(x - x_i) \quad (2.66)$$

cujas uma de suas propriedades é:

$$\int_{\Omega} f(x) \delta(x - x_i) d\Omega = f(x_i), \quad x_i \in \Omega \quad (2.67)$$

Logo, substituindo no método dos resíduos ponderados a função peso pela função delta de Dirac tem-se:

$$\int_{\Omega} \delta(x - x_i) r(x) d\Omega = r(x_i) = 0 \quad (2.68)$$

Aplicando a aproximação dada pela Equação 2.47 nesta última resulta:

$$A \left( \sum_{j=1}^N \phi_j(x_i) c_j + \phi_0(x_i) \right) - f(x_i) = 0 \quad (2.69)$$

Caso o operador  $A$  seja linear, tem-se:

$$\sum_{j=1}^N A(\phi_j(x_i)) c_j = f(x_i) - A(\phi_0(x_i)) \quad (2.70)$$

ou simplificadamente:

$$\sum_{j=1}^N A_{ij} c_j = F_i \quad (2.71)$$

COMENTÁRIO 2.5. *Observe que  $A_{ij} = A(\phi_j(x_i)) \neq A(\phi_i(x_j)) = A_{ji}$ , isto é,  $A_{ij}$  não é simétrica. Além do mais,  $\phi_i$  deve ser diferenciável até a ordem do operador  $A$ .*



## Problemas a valores no contorno de 2ª ordem

### 3.1. Introdução

No capítulo anterior foram apresentados os métodos de Rayleigh-Ritz e de Galerkin na solução de problemas a valores no contorno. Então, a solução aproximada foi obtida a partir de uma base de funções analíticas. Entretanto, o uso destas limita a abrangência, pois torna-se difícil muitas vezes ajustá-las à geometria e às condições de contorno.

As funções de elementos finitos, pelo contrário, como se verá, são facilmente ajustáveis à geometria e às condições de contorno.

Este capítulo apresenta as funções de elementos finitos unidimensionais e as aplica ao método de Rayleigh-Ritz.

### 3.2. Implementação básica do método dos elementos finitos (MEF)

Considere o problema unidimensional a valores no contorno genérico:

$$-\frac{d}{dx} \left( a \frac{d}{dx} u \right) + c u - q = 0, \quad x \in ]0, L[ \quad (3.1a)$$

submetido às condições de contorno:

$$u|_{x=0} = u_0, \quad (3.1b)$$

$$\left( a \frac{d}{dx} u \right) \Big|_{x=L} = q_0 \quad (3.1c)$$

A seguir serão apresentadas as etapas a se percorrerem na implementação do MEF.

**3.2.1. 1ª Etapa: Obtenção da forma fraca.** A forma fraca do problema a valores no contorno, Equação 3.1, é:

$$\int_0^L \left( a \frac{d}{dx} w \frac{d}{dx} u + c w u \right) dx - \int_0^L w q dx - w(L) q_0 = 0 \quad (3.2)$$

cujas variáveis primária e secundária são respectivamente  $u$  e  $\frac{d}{dx} u$ . A primeira formando parte da condição de contorno essencial do problema e a segunda da natural.

Em  $x = 0$ , onde ocorre a condição de contorno essencial, exige-se que a função peso  $w$  seja nula, pois não se conhece a priori  $\frac{d}{dx} u$  aí.

*COMENTÁRIO 3.1. Observe mais uma vez a redução da ordem de diferenciação da forma forte, Equação 3.1a, para a forma fraca.*

Rescrevendo a Equação 3.2 nas formas bilinear e linear, obtém-se o problema variacional associado:

$$B(w, u) - l(w) = 0 \quad (3.3)$$

**3.2.2. 2ª Etapa: Aproximação da solução.** Dividindo o domínio do problema a valores no contorno exemplificado, intervalo  $]0, L[$ , em  $N$  sub-intervalos, chamados elementos e ilustrados nas Figs. 3.1 e 3.2, neles definem-se funções aproximadoras (ou funções interpolantes ou funções de forma), que fundamentam o MEF como método aproximado para os problemas a valores no contorno.

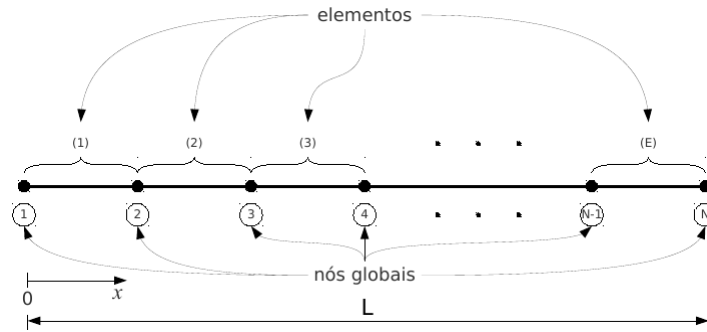


FIGURA 3.1. Malha de elementos finitos unidimensional: distribuição de elementos e nós e coordenada global  $x$ .

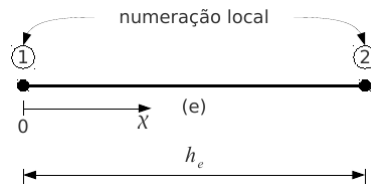


FIGURA 3.2. Elemento finito unidimensional: distribuição de nós, comprimento  $h_e$  e coordenada local  $\chi$ .

### 3.2.2.1. Funções de aproximação locais.

3.2.2.1.1. Funções lineares. Considere a aproximação linear da solução  $u^e$  num elemento  $e$  qualquer obtida com o auxílio da Fig. 3.3 e após um rearranjo dos termos:

$$u^e = \frac{x_2^e - x}{h_e} u_1^e + \frac{x - x_1^e}{h_e} u_2^e \quad (3.4)$$

Na equação acima aparecem as assim chamadas funções de interpolação locais lineares associadas aos nós 1 e 2 do elemento  $e$ , Fig. 3.4:

$$\psi_1^e = \frac{x_2^e - x}{h_e} \quad (3.5a)$$

e

$$\psi_2^e = \frac{x - x_1^e}{h_e} \quad (3.5b)$$

de modo que pode-se rescrever a Equação 3.4 como:



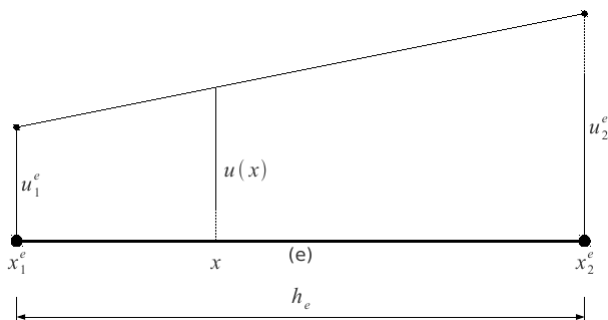


FIGURA 3.3. Elemento finito linear unidimensional: aproximação linear da variável dependente  $u$  em coordenadas globais  $x$ .

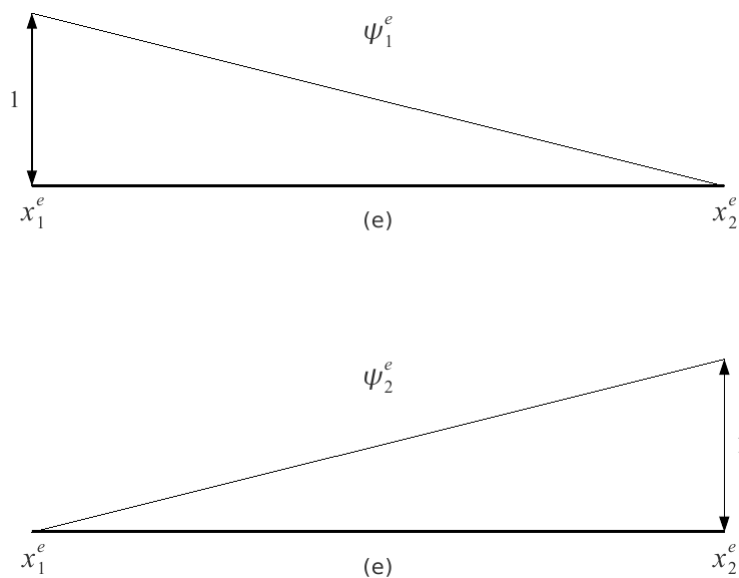


FIGURA 3.4. Elemento finito linear unidimensional genérico  $e$ : funções de forma  $\psi_1^e(x)$  e  $\psi_2^e$  associadas aos valores nodais  $u_1^e$  e  $u_2^e$ .

$$u^e = \psi_1^e u_1^e + \psi_2^e u_2^e \tag{3.6}$$

3.2.2.1.1.1. Derivadas. Faz-se necessário conhecer a derivada das funções de forma lineares locais, pois assim o exige a forma fraca do problema a valores no contorno. Logo, tomando as derivadas das Eqs. 3.5a e 3.5b obtêm-se:

$$\frac{d}{dx} \psi_1^e = \psi_1^{e'} = -\frac{1}{h_e} \tag{3.7a}$$

e

$$\frac{d}{dx} \psi_2^e = \psi_2^{e'} = \frac{1}{h_e} \tag{3.7b}$$

cujos gráficos estão ilustrados na Fig. 3.5.

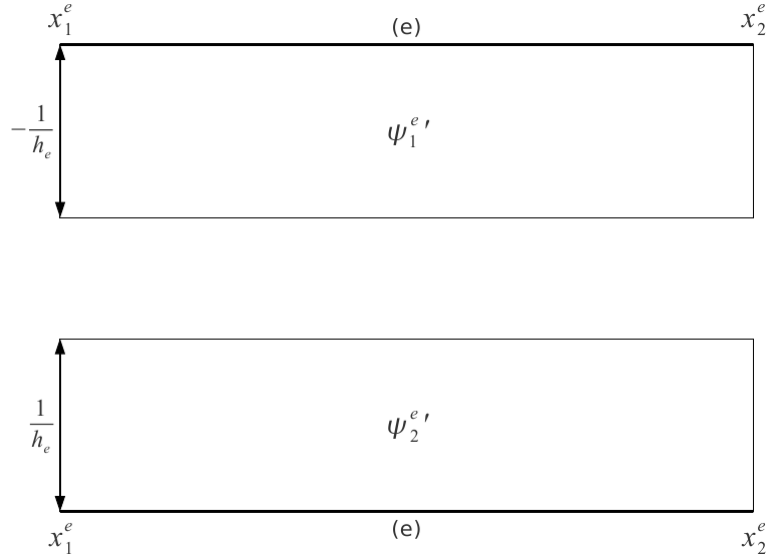


FIGURA 3.5. Elemento finito linear unidimensional genérico  $e$ : derivada das funções de forma  $\psi_1^e(x)$  e  $\psi_2^e$  associadas aos valores nodais  $u_1^e$  e  $u_2^e$ .

COMENTÁRIO 3.2. As funções  $\psi_1^e$  e  $\psi_2^e$  verificam:

$$\psi_1^e(x) + \psi_2^e(x) = 1, \quad \forall x \in [x_1^e, x_2^e] \quad (3.8a)$$

e:

$$\psi_1^e(x_1^e) = \psi_2^e(x_2^e) = 1 \quad (3.8b)$$

$$\psi_1^e(x_2^e) = \psi_2^e(x_1^e) = 0 \quad (3.8c)$$

3.2.2.1.2. Funções quadráticas. Apresentaram-se as funções de interpolação lineares unidimensionais. Agora é a vez de apresentar as quadráticas. Para isto considere novamente a subdivisão do domínio em elementos, Fig. 3.1. O elemento finito quadrático possui 3 nós, conforme ilustrado na Fig. 3.6. Procura-se um polinômio quadrático  $u^e$  que interpole uma função  $u$  qualquer nesses 3 nós, isto é,  $u(x_i) = u^e(x_i)$ . Uma forma de obtê-lo é por meio dos polinômios de Lagrange de grau 2:

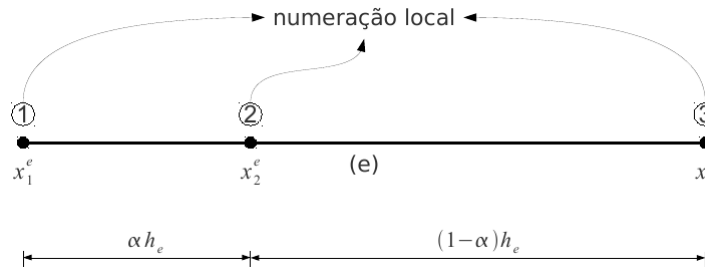


FIGURA 3.6. Elemento quadrático unidimensional genérico  $e$ : disposição e numeração nodais locais.

$$u^e(x) = \psi_1^e(x) u(x_1^e) + \psi_2^e(x) u(x_2^e) + \psi_3^e(x) u(x_3^e) \quad (3.9a)$$

onde as funções de forma  $\psi_i^e(x)$  são os polinômios de Lagrange expressos a seguir e ilustrados na Fig. 3.7:

$$\psi_1^e(x) = \frac{(x - x_2^e)(x - x_3^e)}{(x_1^e - x_2^e)(x_1^e - x_3^e)} = \left(1 - \frac{x - x_1^e}{h_e}\right) \left(1 - \frac{1}{\alpha} \frac{x - x_1^e}{h_e}\right) \quad (3.9b)$$

$$\psi_2^e(x) = \frac{(x - x_1^e)(x - x_3^e)}{(x_2^e - x_1^e)(x_2^e - x_3^e)} = \frac{1}{\alpha(1 - \alpha)} \frac{x - x_1^e}{h_e} \left(1 - \frac{x - x_1^e}{h_e}\right) \quad (3.9c)$$

$$\psi_3^e(x) = \frac{(x - x_1^e)(x - x_2^e)}{(x_3^e - x_1^e)(x_3^e - x_2^e)} = -\frac{\alpha}{(1 - \alpha)} \frac{x - x_1^e}{h_e} \left(1 - \frac{1}{\alpha} \frac{x - x_1^e}{h_e}\right) \quad (3.9d)$$

onde  $\alpha$  está indicado na Fig. 3.6. No caso específico em que o nó 2 local está no centro do elemento (ou  $\alpha = 1/2$ ), as funções de forma tornam-se:

$$\psi_1^e(x) = \left(1 - \frac{x - x_1^e}{h_e}\right) \left(1 - 2\frac{x - x_1^e}{h_e}\right) \quad (3.10a)$$

$$\psi_2^e(x) = 4\frac{x - x_1^e}{h_e} \left(1 - \frac{x - x_1^e}{h_e}\right) \quad (3.10b)$$

$$\psi_3^e(x) = -\frac{x - x_1^e}{h_e} \left(1 - 2\frac{x - x_1^e}{h_e}\right) \quad (3.10c)$$

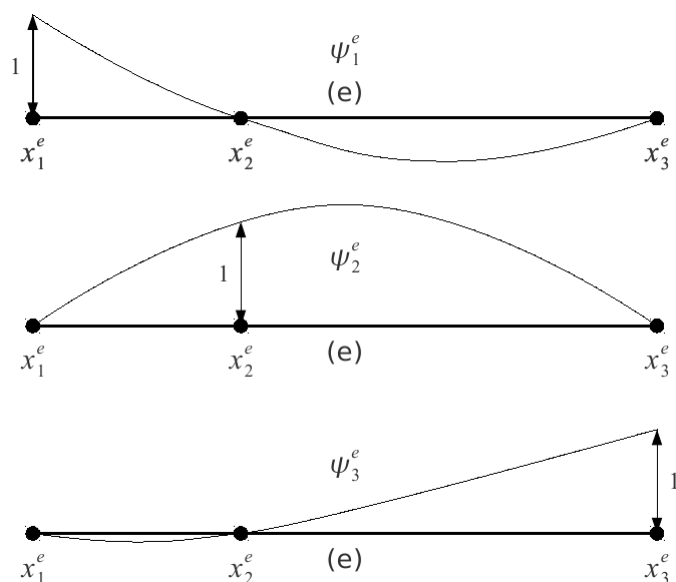


FIGURA 3.7. Elemento quadrático unidimensional genérico  $e$ : gráficos das funções de forma locais  $\psi_1^e$ ,  $\psi_2^e$  e  $\psi_3^e$ .

3.2.2.1.2.1. Derivadas. As derivadas das funções de forma quadráticas locais são:

$$\frac{d}{dx} \psi_1^e = \psi_1^{e'} = \frac{2x - x_2^e - x_3^e}{(x_1^e - x_2^e)(x_1^e - x_3^e)} = \frac{2}{\alpha} \frac{1}{h_e} \left( \frac{x - x_1^e}{h_e} - 1 - \alpha \right) \quad (3.11a)$$

e

$$\frac{d}{dx} \psi_2^e = \psi_2^{e'} = \frac{2x - x_1^e - x_3^e}{(x_2^e - x_1^e)(x_2^e - x_3^e)} = \frac{1}{\alpha(1-\alpha)} \frac{1}{h_e} \left( 1 - 2 \frac{x - x_1^e}{h_e} \right) \quad (3.11b)$$

$$\frac{d}{dx} \psi_3^e = \psi_3^{e'} = \frac{2x - x_1^e - x_2^e}{(x_3^e - x_1^e)(x_3^e - x_2^e)} = -\frac{\alpha}{1-\alpha} \frac{1}{h_e} \left( 1 - \frac{2}{\alpha} \frac{x - x_1^e}{h_e} \right) \quad (3.11c)$$

cujos gráficos estão ilustrados na Fig. 3.8. No caso específico em que o nó 2 local está no centro do elemento (ou  $\alpha = 1/2$ ), as funções de forma tornam-se:

$$\psi_1^{e'} = \frac{4}{h_e} \left( \frac{x - x_1^e}{h_e} - \frac{3}{4} \right) \quad (3.12a)$$

e

$$\psi_2^{e'} = \frac{4}{h_e} \left( 1 - 2 \frac{x - x_1^e}{h_e} \right) \quad (3.12b)$$

$$\psi_3^{e'} = -\frac{1}{h_e} \left( 1 - 4 \frac{x - x_1^e}{h_e} \right) \quad (3.12c)$$

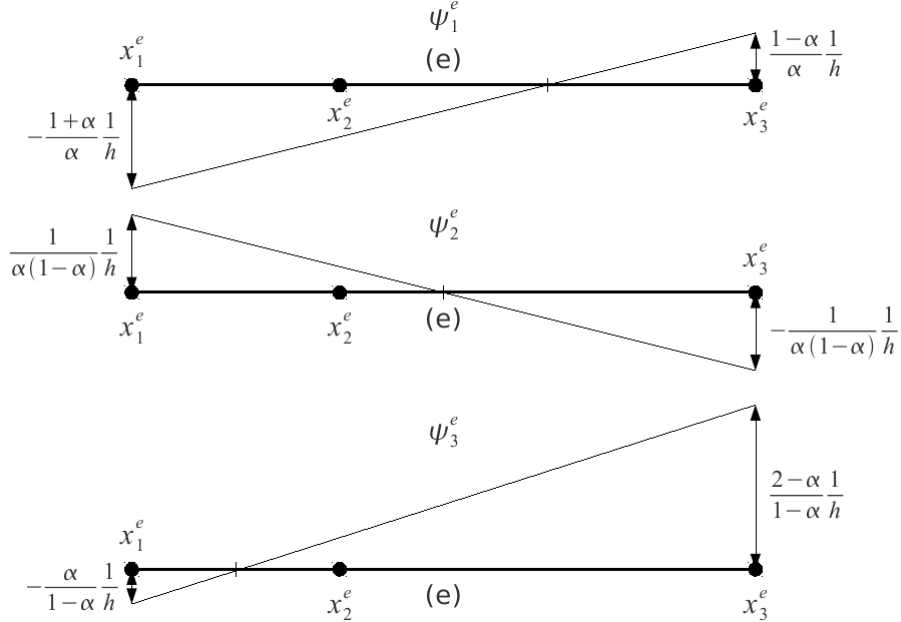


FIGURA 3.8. Elemento quadrático unidimensional genérico  $e$ : gráficos das derivadas das funções de forma locais.

COMENTÁRIO 3.3. As funções de forma quadráticas  $\psi_i^e(x)$  verificam:

$$\psi_1^e + \psi_2^e + \psi_3^e = 1, \quad \forall x \in [x_1^e, x_3^e] \quad (3.13a)$$

$$\psi_1^e x_1^e + \psi_2^e x_2^e + \psi_3^e x_3^e = x, \quad \forall x \in [x_1^e, x_3^e] \quad (3.13b)$$

$$\psi_1^e (x_1^e)^2 + \psi_2^e (x_2^e)^2 + \psi_3^e (x_3^e)^2 = x^2, \quad \forall x \in [x_1^e, x_3^e] \quad (3.13c)$$

e, além do mais:

$$\psi_1^e(x_1) = \psi_2^e(x_2) = \psi_3^e(x_3) = 1 \quad (3.13d)$$

$$\psi_1^e(x_2) = \psi_1^e(x_3) = \psi_2^e(x_1) = \psi_2^e(x_3) = \psi_3^e(x_1) = \psi_3^e(x_2) = 0 \quad (3.13e)$$

3.2.2.2. *Propriedades das funções de forma locais.* Os comentários 3.2 e 3.3 apontam para umas propriedades comuns às duas funções de forma apresentadas, a linear e a quadrática, que podem ser estendidas ainda a outras.

3.2.2.2.1. Propriedade delta de Kronecker. Exige-se que as funções de forma de elementos finitos sejam interpolantes justamente nos nós  $x_j^e$  do elemento. Deste modo, dado um elemento finito unidimensional com  $N_e$  nós e um conjunto de igual número de funções de forma a ele associadas,  $\{\psi_i^e\}_{i=1}^{N_e}$ , tem-se:

$$\psi_i^e(x_j^e) = \delta_{ij}, \quad \forall x_j^e \in \{x_1^e, x_2^e, \dots, x_{N_e}^e\} \quad (3.14)$$

onde  $\delta_{ij}$  é o delta de Kronecker, cuja simbologia se interpreta do seguinte modo:

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{se } i = j \\ 0, & \text{se } i \neq j \end{cases} \quad (3.15)$$

Isto se justifica por que a função aproximada  $u^e$ , por ser interpolante, verifica necessariamente:

$$u(x_i^e) = u^e(x_i^e) \quad \forall x_i^e \in \{x_1^e, x_2^e, \dots, x_{N_e}^e\} \quad (3.16)$$

3.2.2.3. *Coordenadas locais.* Proximamente será necessário realizar integrações sobre cada elemento, decorrentes da forma fraca. Para tanto e para uma representação mais elegante dessas integrais, convém empregar em cada elemento um sistema de coordenadas locais  $\chi$ , conforme ilustrado na 3.9. A transformação de coordenada do sistema global  $x$  para o local  $\chi$  é, portanto:

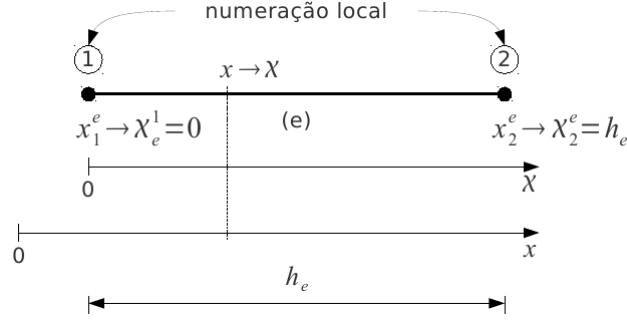
$$\chi = x - x_i^e \quad (3.17a)$$

ou do sistema local para o global:

$$x = \chi + x_i^e \quad (3.17b)$$

Sendo assim, as *funções de interpolação lineares locais* se descrevem em termos da coordenada local como:

$$\psi_1^e(\chi) = 1 - \frac{\chi}{h_e} \quad (3.18a)$$

FIGURA 3.9. Coordenadas locais  $\chi$  do elemento genérico  $e$ .

$$\psi_2^e(\chi) = \frac{\chi}{h_e} \quad (3.18b)$$

e as *quadráticas* como:

$$\psi_1^e(\chi) = \left(1 - \frac{\chi}{h_e}\right) \left(1 - \frac{\chi}{\alpha h_e}\right) \quad (3.19a)$$

$$\psi_2^e(\chi) = \frac{1}{\alpha(1-\alpha)} \frac{\chi}{h_e} \left(1 - \frac{\chi}{h_e}\right) \quad (3.19b)$$

$$\psi_3^e(\chi) = \frac{\alpha}{1-\alpha} \frac{\chi}{h_e} \left(1 - \frac{\chi}{\alpha h_e}\right) \quad (3.19c)$$

onde o fator  $\alpha$  se explica pela 3.6.

No caso em que  $\alpha = 1/2$ , tem-se:

$$\psi_1^e(\chi) = \left(1 - \frac{\chi}{h_e}\right) \left(1 - 2 \frac{\chi}{h_e}\right) \quad (3.20a)$$

$$\psi_2^e(\chi) = 4 \frac{\chi}{h_e} \left(1 - \frac{\chi}{h_e}\right) \quad (3.20b)$$

$$\psi_3^e(\chi) = -\frac{\chi}{h_e} \left(1 - 2 \frac{\chi}{h_e}\right) \quad (3.20c)$$

**3.2.3. 3ª Etapa: O modelo de elementos finitos.** Nesta última etapa a solução aproximada  $u^e$  é aplicada à forma fraca de cada elemento. As equações algébricas daí resultantes são posteriormente compatibilizadas mediante condições de continuidade e equilíbrio nos nós comuns dos elementos, resultando um sistema de equações algébricas cujas incógnitas são variáveis nodais primárias ou secundárias.

3.2.3.1. *Elemento linear.* Considere o elemento finito linear  $e$  ilustrado na 3.2, cujas funções de forma são dadas pelas Equações 3.18a e 3.18b e suas respectivas derivadas por:

$$\frac{d}{d\chi} \psi_1^e = -\frac{1}{h_e} \quad (3.21a)$$

$$\frac{d}{d\chi} \psi_2^e = \frac{1}{h_e} \quad (3.21b)$$

Restringindo o problema a valores no contorno, Equações 3.1, ao elemento  $e$  acima tem-se em coordenadas locais, após algumas adaptações:

$$-\frac{d}{d\chi} \left( a \frac{d}{d\chi} u \right) + c u - q = 0, \quad \chi \in ]0, h_e[ \quad (3.22a)$$

submetido às condições de contorno naturais nos nós:

$$-Q_1^e = \left( a \frac{d}{d\chi} u \right) \Big|_{\chi=0}, \quad (3.22b)$$

$$Q_2^e = \left( a \frac{d}{d\chi} u \right) \Big|_{\chi=h_e} \quad (3.22c)$$

A forma fraca deste problema, genericamente dada por  $B(w, u) = l(w)$ , é:

$$\int_0^{h_e} \left( a \frac{d}{d\chi} w \frac{d}{d\chi} u + c w u \right) d\chi = \int_0^{h_e} w q d\chi + w(0) Q_1^e + w(h_e) Q_2^e \quad (3.23a)$$

onde:

$$B(w, l) = \int_0^{h_e} \left( a \frac{d}{d\chi} w \frac{d}{d\chi} u + c w u \right) d\chi \quad (3.23b)$$

$$l(w) = \int_0^{h_e} w q d\chi + w(0) Q_1^e + w(h_e) Q_2^e \quad (3.23c)$$

Admitindo como solução uma função localmente (no elemento) aproximada de elementos finitos  $u^e$ , isto é, da forma representada pela Equação 3.6, e tomando por funções peso as próprias funções de forma do elemento finito  $e$ , obtém-se da substituição na forma fraca:

$$B(\psi_1^e, \psi_1^e u_1^e + \psi_2^e u_2^e) = l(\psi_1^e) \quad (3.24a)$$

$$B(\psi_2^e, \psi_1^e u_1^e + \psi_2^e u_2^e) = l(\psi_2^e) \quad (3.24b)$$

ou, tendo em conta a linearidade do operador bilinear:

$$B(\psi_1^e, \psi_1^e) u_1^e + B(\psi_1^e, \psi_2^e) u_2^e = l(\psi_1^e) \quad (3.24c)$$

$$B(\psi_2^e, \psi_1^e) u_1^e + B(\psi_2^e, \psi_2^e) u_2^e = l(\psi_2^e) \quad (3.24d)$$

e, finalmente, em forma matricial:

$$\begin{bmatrix} K_{11}^e & K_{12}^e \\ K_{21}^e & K_{22}^e \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1^e \\ u_2^e \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_1^e \\ F_2^e \end{Bmatrix} \quad (3.24e)$$

onde:

$$K_{11} = B(\psi_1^e, \psi_1^e) = \int_0^{h_e} \left( a \frac{d}{d\chi} \psi_1^e \frac{d}{d\chi} \psi_1^e + c \psi_1^e \psi_1^e \right) d\chi \quad (3.25a)$$

$$K_{12} = K_{21} = B(\psi_1^e, \psi_2^e) = \int_0^{h_e} \left( a \frac{d}{d\chi} \psi_1^e \frac{d}{d\chi} \psi_2^e + c \psi_1^e \psi_2^e \right) d\chi \quad (3.25b)$$

$$K_{22} = B(\psi_2^e, \psi_2^e) = \int_0^{h_e} \left( a \frac{d}{d\chi} \psi_2^e \frac{d}{d\chi} \psi_2^e + c \psi_2^e \psi_2^e \right) d\chi \quad (3.25c)$$

$$\begin{aligned} F_1^e &= l(\psi_1^e) = \int_0^{h_e} \psi_1^e q d\chi + \psi_1^e(0) Q_1^e + \psi_1^e(h_e) Q_2^e \\ &= \int_0^{h_e} \psi_1^e q d\chi + Q_1^e = f_1^e + Q_1^e \end{aligned} \quad (3.25d)$$

$$\begin{aligned} F_2^e &= l(\psi_2^e) = \int_0^{h_e} \psi_2^e q d\chi + \psi_2^e(0) Q_1^e + \psi_2^e(h_e) Q_2^e \\ &= \int_0^{h_e} \psi_2^e q d\chi + Q_2^e = f_2^e + Q_2^e \end{aligned} \quad (3.25e)$$

A Equação 3.24e é denominada de *modelo de elementos finitos local*, e uma maneira simplificada de representá-lo é por meio da notação:

$$[K^e] \{u^e\} = \{F^e\} \quad (3.26)$$

onde  $[K^e]$  é chamada de *matriz de rigidez local (ou do elemento)*;  $\{u^e\}$  é o *vetor de deslocamentos nodais do elemento (ou local)*;  $\{F^e\}$  é o *vetor de carregamentos nodais do elemento (ou local)*, que por sua vez se desdobra nos *vetores de carregamento distribuído  $\{f^e\}$  e concentrado  $\{Q^e\}$  locais (ou do elemento)*.

3.2.3.1.1. Conectividade dos elementos. Para formar o *modelo de elementos finitos global* é necessário conectar os modelos locais entre si. Isto se faz observando umas condições nos nós comuns entre os elementos:

- (1) *Condição de continuidade*: a variável primária é contínua em qualquer nó da malha (Fig. 3.10):

$$u_i = u_2^e = u_1^{e+1} \quad (3.27)$$

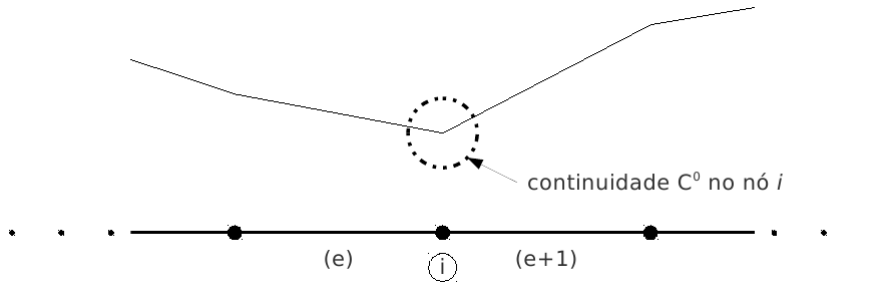


FIGURA 3.10. Continuidade da variável primária em qualquer nó da malha.



(2) *Condição de equilíbrio*: em cada nó se verifica o balanço da variável secundária (Fig. 3.11):

$$Q_2^e + Q_1^{e+1} = \begin{cases} 0, & \text{se nenhuma "força" externa é aplicada no nó } i. \\ Q_i, & \text{se uma "força" externa é aplicada no nó } i. \end{cases} \quad (3.28)$$

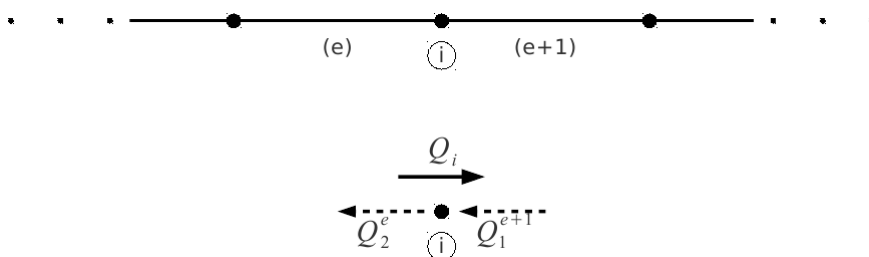


FIGURA 3.11. Balanço da variável secundária em qualquer nó da malha.

COMENTÁRIO 3.4. *O termo Equilíbrio na segunda condição é mais apropriado para o caso em que as variáveis secundárias são forças ou momentos. No caso em que elas sejam fluxos, como em problemas de transferência de calor, a segunda condição torna-se um balanço de fluxos de entrada e saída no nó provenientes dos elementos adjacentes ou de fonte ou sorvedor localizado nesse mesmo nó.*

Tomem-se agora dois elementos finitos adjacentes ao nó  $i$  de uma malha, conforme indicado na 3.12. As equações do modelo de elementos finitos dos dois elementos,  $e$  e  $e + 1$ , associadas ao nó comum  $i$  são:

$$K_{21}^e u_1^e + K_{22}^e u_2^e = f_2^e + Q_2^e \quad (3.29a)$$

$$K_{11}^{e+1} u_1^{e+1} + K_{12}^{e+1} u_2^{e+1} = f_1^{e+1} + Q_1^{e+1} \quad (3.29b)$$

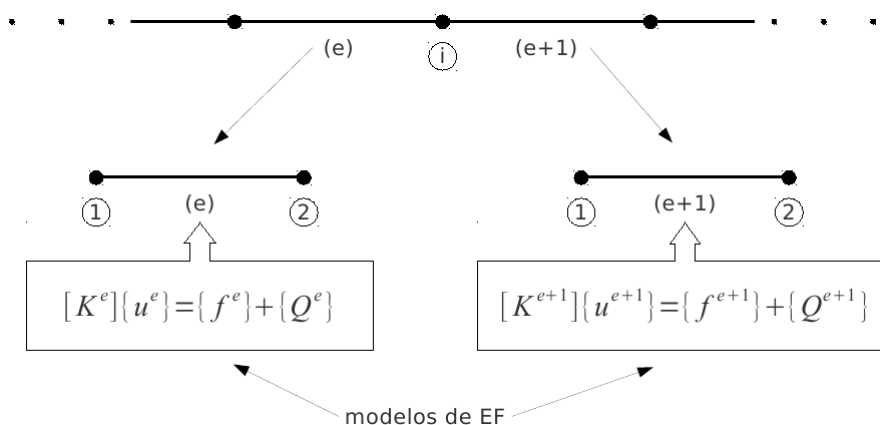


FIGURA 3.12. Modelos de elementos finitos de dois elementos adjacentes ao nó  $i$ .

Somando estas duas equações:

$$K_{21}^e u_1^e + K_{22}^e u_2^e + K_{11}^{e+1} u_1^{e+1} + K_{12}^{e+1} u_2^{e+1} = f_2^e + f_1^{e+1} + Q_2^e + Q_1^{e+1} \quad (3.30a)$$

Tendo em conta agora as duas condições acima obtém-se:

$$K_{21}^e u_{i-1} + (K_{22}^e + K_{11}^{e+1}) u_i + K_{12}^{e+1} u_{i+1} = f_2^e + f_1^{e+1} + Q_i \quad (3.30b)$$

Para os nós extremos da malha tem-se as duas seguintes equações, obtidas da aplicação do modelo de elementos finitos aos elementos extremos da malha, 1 e  $e + 1$ :

$$K_{11}^1 u_1^1 + K_{12}^1 u_2^1 = f_1^1 + Q_1^1 \quad (3.31a)$$

$$K_{21}^E u_1^E + K_{22}^E u_2^E = f_2^E + Q_2^E \quad (3.31b)$$

que, após aplicar as duas condições, a de continuidade e de equilíbrio, resultam nestas duas outras equações:

$$K_{11}^1 u_1 + K_{12}^1 u_2 = f_1^1 + Q_1 \quad (3.31c)$$

$$K_{21}^E u_{E-1} + K_{22}^E u_E = f_2^E + Q_E \quad (3.31d)$$

As Equações 3.30b, 3.31c e 3.31d formam o seguinte sistema de  $N$  equações algébricas, onde  $N$  é o número de nós da malha:

$$[K]\{u\} = \{F\} \quad (3.32)$$

onde:

$$[K] = \begin{bmatrix} K_{11}^1 & K_{12}^1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ K_{21}^1 & K_{22}^1 + K_{11}^2 & K_{12}^2 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & K_{21}^2 & K_{22}^2 + K_{11}^3 & K_{12}^3 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & K_{21}^3 & K_{22}^3 + K_{11}^4 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & K_{22}^{E-1} + K_{11}^E & K_{12}^E \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & K_{21}^E & K_{22}^E \end{bmatrix} \quad (3.33a)$$

$$\{u\} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ \vdots \\ u_E \end{bmatrix} \quad (3.33b)$$

$$\{F\} = \begin{bmatrix} f_1^1 + Q_1^1 \\ f_2^1 + f_1^2 + Q_2^1 + Q_1^2 \\ f_2^2 + f_1^3 + Q_2^2 + Q_1^3 \\ \vdots \\ f_2^{E-1} + f_1^E + Q_2^{E-1} + Q_1^E \\ f_2^E + Q_2^E \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1^1 + Q_1 \\ f_2^1 + f_1^2 + Q_2^2 \\ f_2^2 + f_1^3 + Q_3^3 \\ \vdots \\ f_2^{E-1} + f_1^E + Q_{N-1} \\ f_2^E + Q_N \end{bmatrix} \quad (3.33c)$$

Estas equações correspondem à matriz de rigidez, vetor de deslocamentos e vetor de carregamentos globais do modelo de elementos finitos de uma malha unidimensional cujos nós são enumerados sequencialmente de 1 até  $N = E + 1$ .

Note-se a sobreposição das  $E$  matrizes de rigidez e vetores de carregamentos locais. Cada coeficiente de um ou outro se sobrepõe a um da matriz ou vetor global. Desta forma a matriz de rigidez ou vetor de deslocamentos global pode ser obtida a partir dos seus correspondentes locais e da matriz de conectividade  $[B]$  dos nós dos elementos da malha. Esta matriz é formada de tal modo que a  $e$ -ésima linha se compõe dos  $N_e$  índices numéricos globais dos nós locais do elemento  $e$ . Por exemplo, a matriz de conectividade de uma malha unidimensional de  $E$  elementos finitos lineares seria formada a partir das duas últimas colunas da Tabela 3.2, fornecendo:

		Numeração local	
Elemento	❶	❷	
1	1	2	← numeração global →
2	2	3	
3	3	4	
⋮	⋮	⋮	
$N - 1$	$N - 1$	$N$	

TABELA 3.1. Formação da matriz de conectividade: em cada linha da tabela tem-se a numeração global dos nós 1 e 2 locais de cada elemento.

$$[B] = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \\ 3 & 4 \\ \vdots & \vdots \\ N - 1 & N \end{bmatrix} \tag{3.34}$$

Para ilustrar melhor o papel da matriz de conectividade, considere o elemento número 11 de uma malha composta de elementos lineares (portanto, com 2 nós por elemento). A linha correspondente da matriz de conectividade será constituída pelos índices 9 e 15, significando que o nó 1 local desse elemento corresponde ao nó 9 global e o nó 2 local ao 15 global, Figura 3.13. Deste modo o coeficiente  $K_{11}^{11}$  da matriz de rigidez local se sobreporia ao coeficiente  $K_{99}$  da matriz global; o  $K_{12}^{11}$  ao  $K_{915}$ ; o  $K_{21}^{11}$  ao  $K_{159}$ ; e o  $K_{22}^{11}$  ao  $K_{1515}$ , Figura 3.14. De igual forma o coeficiente  $f_1^{11}$  do vetor de carregamento distribuído local se sobreporia ao coeficiente  $f_9$  do vetor global e o  $f_2^{11}$  ao  $f_{15}$ , Figura 3.15.

3.2.3.2. *Elemento quadrático.* Considere o elemento quadrático  $e$  de uma malha de elementos finitos, Fig. 3.6. No sistema de coordenadas locais as funções de forma quadráticas são dadas pelas Eqs. 3.19. O problema a valores no contorno restrito ao elemento torna-se:

$$-\frac{d}{d\chi} \left( a \frac{d}{d\chi} u \right) + cu - q = 0, \quad \chi \in ]0, h_e[ \tag{3.35a}$$

submetido às condições de contorno naturais nos nós:

$$-Q_1^e = \left( a \frac{d}{d\chi} u \right) \Big|_{\chi=0}, \tag{3.35b}$$

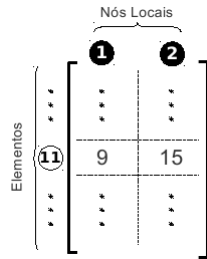


FIGURA 3.13. Matriz de conectividade  $[B]$ : destaque para a numeração global dos nós do elemento 11.

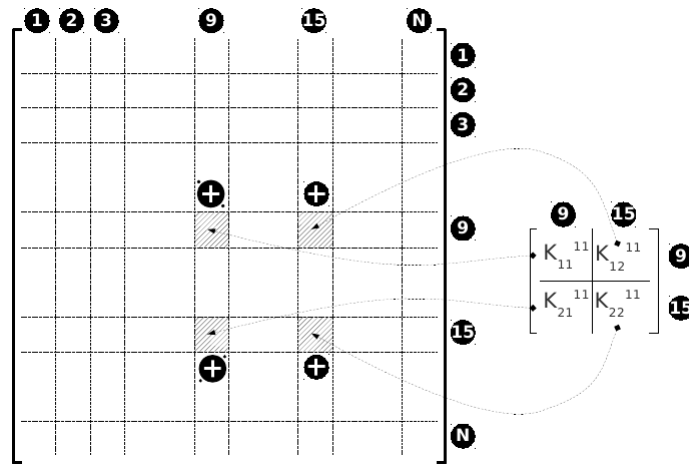


FIGURA 3.14. Ilustração da conectividade da matriz de rigidez local  $[K^{11}]$  na matriz de rigidez global  $[K]$ .

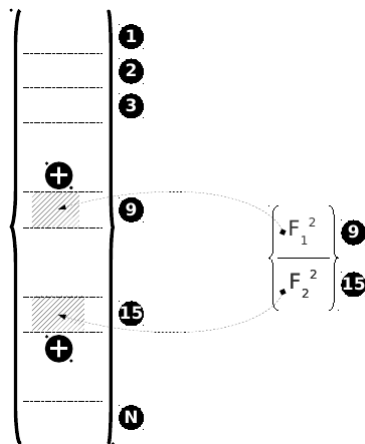


FIGURA 3.15. Ilustração da conectividade do vetor de carregamento local  $[F^{11}]$  no vetor de carregamento global  $[F]$ .

$$Q_3^e = \left( a \frac{d}{d\chi} u \right) \Big|_{\chi=h_e} \tag{3.35c}$$

A solução aproximada no elemento  $e$  adquire a forma:

$$u^e = \psi_1^e u_1^e + \psi_2^e u_2^e + \psi_3^e u_3^e \quad (3.36)$$

A forma fraca do problema restrita ao elemento, genericamente dada por  $B(w, u) = l(w)$ , é:

$$\int_0^{h_e} \left( a \frac{d}{d\chi} w \frac{d}{d\chi} u + c w u \right) d\chi = \int_0^{h_e} w q d\chi + w(0) Q_1^e + w(h_e) Q_3^e \quad (3.37a)$$

onde:

$$B(w, l) = \int_0^{h_e} \left( a \frac{d}{d\chi} w \frac{d}{d\chi} u + c w u \right) d\chi \quad (3.37b)$$

$$l(w) = \int_0^{h_e} w q d\chi + w(0) Q_1^e + w(h_e) Q_3^e \quad (3.37c)$$

As funções de ponderação são as mesmas das de aproximação pelo fato de se estar utilizando o método de *Rayleigh-Ritz* e das condições de contorno serem essenciais:  $\{\psi_i^e\}_{i=1}^3$ . Substituindo, pois, a solução aproximada e as funções de ponderação uma a uma na forma fraca obtêm-se:

$$B(\psi_1^e, \psi_1^e) u_1^e + B(\psi_1^e, \psi_2^e) u_2^e + B(\psi_1^e, \psi_3^e) u_3^e = l(\psi_1^e) \quad (3.38a)$$

$$B(\psi_2^e, \psi_1^e) u_1^e + B(\psi_2^e, \psi_2^e) u_2^e + B(\psi_2^e, \psi_3^e) u_3^e = l(\psi_2^e) \quad (3.38b)$$

$$B(\psi_3^e, \psi_1^e) u_1^e + B(\psi_3^e, \psi_2^e) u_2^e + B(\psi_3^e, \psi_3^e) u_3^e = l(\psi_3^e) \quad (3.38c)$$

ou matricialmente:

$$\begin{bmatrix} K_{11}^e & K_{12}^e & K_{13}^e \\ K_{21}^e & K_{22}^e & K_{23}^e \\ K_{31}^e & K_{32}^e & K_{33}^e \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1^e \\ u_2^e \\ u_3^e \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_1^e \\ F_2^e \\ F_3^e \end{Bmatrix} \quad (3.39)$$

onde:

$$K_{ij}^e = B(\psi_i^e, \psi_j^e) = \int_0^{h_e} \left( a \frac{d}{d\chi} \psi_i^e \frac{d}{d\chi} \psi_j^e + c \psi_i^e \psi_j^e \right) d\chi \quad (3.40)$$

e:

$$F_i^e = l(\psi_i^e) = \int_0^{h_e} \psi_i^e q d\chi + \psi_i^e(0) Q_1^e + \psi_i^e(h_e) Q_3^e \quad (3.41)$$

Em razão da propriedade *delta de Kronecker*, esta última desdobra-se em:

$$F_1^e = \int_0^{h_e} \psi_1^e q d\chi + Q_1^e \quad (3.42a)$$

$$F_2^e = \int_0^{h_e} \psi_2^e q d\chi \quad (3.42b)$$

$$F_3^e = \int_0^{h_e} \psi_3^e q d\chi + Q_3^e \quad (3.42c)$$

A Eq. 3.39 escreve-se simplificadamente como:

$$[K^e] \{u^e\} = \{F^e\} \quad (3.43)$$

que é o *modelo de elementos finitos local* de um elemento quadrático genérico. Observe que a matriz de rigidez, o vetor deslocamento e o vetor de carregamento locais têm dimensão  $3 \times 3$ ,  $3 \times 1$  e  $3 \times 1$ , respectivamente.

3.2.3.2.1. Conectividade dos elementos. Sobre a conectividade dos elementos quadráticos, observe que agora são 3 nós, sendo dois nas extremidades e um interno ao elemento. Este último não se conecta com outro elemento além daquele ao qual ele pertence. Só os nós extremos efetivamente conectam-se a outros elementos.

A matriz de conectividade do elemento quadrático é muito semelhante ao do elemento linear. As linhas correspondem a cada um dos elementos e as colunas, que agora são 3, a cada um dos nós locais do elemento. A Tab. 3.2 ilustra a formação da matriz de conectividade de uma malha de  $E$  elementos quadráticos (observe a ordem não sequencial de enumeração dos nós globais), a partir da qual obtém-se:

$$[B] = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 6 \\ 8 & 9 & 7 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ N-5 & N-3 & N \end{bmatrix} \quad (3.44)$$

Elemento	Numeração local		
	❶	❷	❸
1	1	4	5
2	2	3	6
3	8	9	7
⋮	⋮	⋮	⋮
$E$	$N-5$	$N-3$	$N=2E+1$

TABELA 3.2. Formação da matriz de conectividade: em cada linha da tabela tem-se a numeração global dos nós 1, 2 e 3 locais de cada elemento.

A matriz de rigidez e o vetor de carregamento locais, por exemplo, do elemento 2 da malha referida acima se distribuiriam pelas respectivas matriz de rigidez e vetor de carregamento globais conforme ilustra as Figs. 3.16 e 3.17.

### 3.2.4. Imposição das condições de contorno.

3.2.4.1. *Imposição das variáveis primárias.* A variável primária prescrita no contorno é imposta diretamente no vetor de deslocamento  $\{u\}$ , dado que os seus valores nodais são facilmente determinados por interpolação, ou seja:

$$u_2^e = u_1^{e+1} = u_i = u(x_i) \quad (3.45)$$

A fim de ilustrar a imposição das variáveis primárias no contorno, tome como exemplo o problema ilustrado na Fig 3.18. Na malha proposta tem-se deslocamentos nulos prescritos nos nós 1 e 5, ou seja, tem-se conhecidos os valores da variável primária nestes nós:  $u_1 = u_5 = 0$ . As demais variáveis primárias são incógnitas do problema.

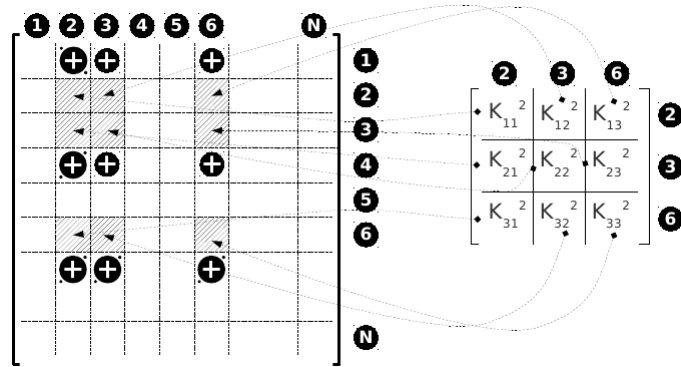


FIGURA 3.16. Ilustração da conectividade da matriz de rigidez local  $[K^2]$  na matriz de rigidez global  $[K]$ .

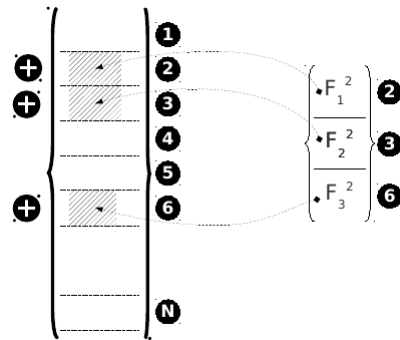


FIGURA 3.17. Ilustração da conectividade do vetor de carregamento local  $[F^2]$  no vetor de carregamento global  $[F]$ .

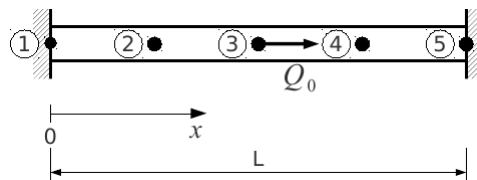


FIGURA 3.18. Barra bi-apoiada axialmente carregada.

3.2.4.2. *Imposição das variáveis secundárias: fluxos ou forças concentradas externas.* Os fluxos ou forças concentradas externas, se houver, são inseridos no vetor de carregamento concentrado  $\{Q\}$ . Quanto à localização do ponto fonte ou de aplicação para se analisar: ponto coincidente num nó extremo e ponto não coincidente num nó extremo do elemento. Antes porém, será visto como tratar fluxos e forças concentradas como um caso particular de distribuição dos mesmos.

3.2.4.2.1. Fluxo ou forças concentradas como distribuição. Uma força ou fluxo concentrado podem ser representados por meio de uma distribuição especial, mais especificamente, como o produto da intensidade da força ou fluxo pela função *delta de Dirac* definida na Eq. 3.46 a seguir e ilustrada na Fig. 3.19:

$$\delta(x - x_0) := \begin{cases} 0, & x \neq x_0 \\ \infty, & x = x_0 \end{cases} \quad (3.46a)$$

e:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x - x_0) dx := \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{1}{2\Delta x} 2\Delta x = 1 \quad (3.46b)$$

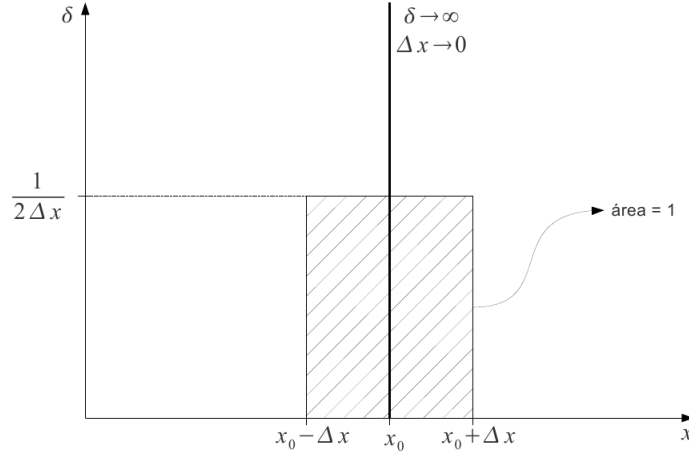


FIGURA 3.19. Função *delta de Dirac* no ponto  $x_0$ .

Decorre desta definição a seguinte propriedade:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \delta(x - x_0) dx = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \frac{1}{2|x - x_0|} 2|x - x_0| = f(x_0) \quad (3.47)$$

para toda função  $f : x \mapsto f(x)$ ,  $\mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ , definida em  $x_0$ .

Uma força ou um fluxo concentrado pode ser definido como a distribuição dada por  $q = Q \delta(x - x_0)$ , onde  $x_0$  é a coordenada do ponto fonte ou de aplicação e  $Q$  é a sua intensidade. Logo, ao realizar, num elemento  $e$  qualquer, a integral no termo  $l(\psi_i^e)$  da forma fraca para este tipo de distribuição, decorre da propriedade acima que:

$$l(\psi_i^e) = \int_0^{h_e} q \psi_i^e d\chi = \int_0^{h_e} Q_0 \delta(\chi - \chi_0) \psi_i^e d\chi = Q_0 \psi_i^e(\chi_0) \quad (3.48)$$

3.2.4.2.2. Ponto fonte ou de aplicação coincidente num nó extremo de elemento. Neste caso tem-se pelo balanço de fluxos ou equilíbrio de forças no nó, por exemplo,  $i$  (Fig 3.20):

$$Q_N^e + Q_1^{(e+1)} = Q_0 \quad (3.49)$$

onde  $Q_0$  é a intensidade do fluxo ou força no nó.

3.2.4.2.3. Ponto fonte ou de aplicação não coincidente num nó extremo de elemento. Neste caso, supondo que o ponto esteja no interior do elemento  $e$  da malha (Fig. 3.21), o termo  $l(\psi_i^e)$  correspondente à distribuição *delta de Dirac* da fonte ou força concentrada  $Q_0$  no ponto  $\chi_0$  é:

$$l(\psi_i^e) = f_i^e = \int_0^{h_e} Q_0 \delta(\chi - \chi_0) \psi_i^e d\chi = Q_0 \psi_i^e(\chi_0) \quad (3.50)$$

Se no elemento ainda houver o carregamento ou fluxo distribuído  $q$ , tem-se:



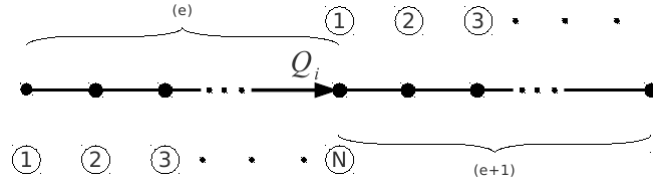


FIGURA 3.20. Ponto fonte ou de aplicação coincidente com o nó extremo tanto do elemento e como do e + 1.

$$l(\psi_i^e) = \int_0^{h_e} (q + Q_0\delta(\chi - \chi_0)) \psi_i^e d\chi = f_i^e + Q_0 \psi_i^e(\chi_0) \quad (3.51)$$

Um caso particular é o do ponto fonte ou de aplicação coincidente com um nó interno do elemento, ou seja,  $\chi_0 = \chi_j$ :

$$l(\psi_i^e) = \int_0^{h_e} Q_0\delta(\chi - \chi_j) \psi_i^e d\chi = Q_0\psi_i^e(\chi_j) = Q_0\delta_{ij} = \begin{cases} Q_0, & \text{se } \chi_i = \chi_j \\ 0, & \text{se } \chi_i \neq \chi_j \end{cases} \quad (3.52)$$

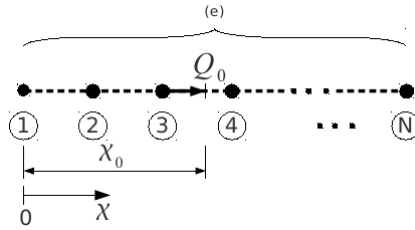


FIGURA 3.21. Ponto fonte ou de aplicação não coincidente com o nó extremo do elemento e.

No exemplo ilustrado na Fig. 3.18, o vetor de carregamento concentrado global tem conhecidas as componentes:  $Q_2 = Q_5 = 0$  e  $Q_3 = Q_0$ , e as demais,  $Q_1$  e  $Q_5$ , incógnitas, as quais correspondem às forças reativas nos apoios.

3.2.4.3. *Solução do sistema de equações algébricas.* Nesta altura o modelo de elementos finitos global se encontra na forma de um sistema de equações algébricas lineares em que parte das incógnitas se encontra no primeiro membro (variáveis primárias) e outra no segundo membro (variáveis secundárias).

Uma forma elegante e prática de resolver tal sistema é rearranjar as suas linhas e colunas de tal maneira a obter dois subsistemas de equações, um desacoplado e outro acoplado. Explica-se a seguir este rearranjo.

Partindo do sistema algébrico, Eq. 3.32, sejam  $\{u^1\}$  o vetor das variáveis primárias conhecidas,  $\{u^2\}$  o das variáveis primárias incógnitas,  $\{Q^1\}$  o das variáveis secundárias incógnitas e  $\{Q^2\}$  o das variáveis secundárias conhecidas. Deste modo resulta o sistema rearranjado:

$$\begin{bmatrix} [K^{11}] & [K^{12}] \\ [K^{21}] & [K^{22}] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{u^1\} \\ \{u^2\} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \{f^1\} \\ \{f^2\} \end{Bmatrix} \quad (3.53)$$

cujos subsistemas citados são respectivamente:

$$[K^{11}]\{u^1\} + [K^{12}]\{u^2\} = \{f^1\} \quad (3.54a)$$

e:

$$[K^{21}]\{u^1\} + [K^{22}]\{u^2\} = \{f^2\} \quad (3.54b)$$

Observe que o primeiro subsistema tem como incógnitas os vetores  $\{u^2\}$  e  $\{f^1\}$  e o segundo apenas o vetor  $\{u^2\}$ . Além disso, este último é determinado, ou seja:

$$\{u^2\} = [K^{22}]^{-1} (\{f^2\} - [K^{21}]\{u^1\}) \quad (3.55)$$

Levando este resultado ao outro subsistema, obtém-se o vetor incógnito  $\{f^1\}$ :

$$\{f^1\} = [K^{11}]\{u^1\} + [K^{12}][K^{22}]^{-1} (\{f^2\} - [K^{21}]\{u^1\}) \quad (3.56)$$

COMENTÁRIO 3.5. *As soluções acima são apenas teóricas. Na prática não convém inverter matrizes, principalmente no MEF, pois a matriz a inverter é geralmente de dimensões entre médias a grandes, elevando sobremaneira o custo computacional. Há técnicas bem menos custosas para a solução de sistema de equações algébricas.*

3.2.4.4. *Pós-processamento da solução.* No pós-processamento os resultados são apresentados para análise. Consequentemente, para cada tipo de problema abordado as informações e as formas de apresentá-las são próprias. No entanto, algumas são comuns aos diversos problemas e são apresentadas a seguir.

As variáveis primárias ou secundárias podem ser apresentadas na forma de *tabela*, *gráfico* ou *mapa de cores*, conforme ilustrado na Tab. 3.3 e Figs. 3.22 e 3.23, respectivamente.

nó	$u$ [m]	$N$ [N]
1	$0,000E+0$	$6,326E+3$
2	$1,895E-4$	$4,049E+2$
3	$3,044E-4$	$2,278E+2$
4	$3,635E-4$	$1,013E+2$
5	$3,852E-4$	$2,550E+1$
6	$3,883E-4$	$0,000E+0$

TABELA 3.3. Deslocamentos ( $u$ ) e forças axiais ( $N$ ) nodais.

Para o gráfico ou mapa de cores da variável primária ou secundária, faz-se necessário empregar a solução local elemento a elemento e assim compor a solução global e sua derivada em toda a malha para futuras análises:

$$u = \begin{cases} u^1 = \sum_{j=1}^{n_1} \psi_j^1 u_j^1 \\ u^2 = \sum_{j=1}^{n_2} \psi_j^2 u_j^2 \\ \vdots \\ u^E = \sum_{j=1}^{n_E} \psi_j^E u_j^E \end{cases} \quad (3.57a)$$

e:

$$u' = \begin{cases} u^{1'} = \sum_{j=1}^{n_1} \psi_j^{1'} u_j^1 \\ u^{2'} = \sum_{j=1}^{n_2} \psi_j^{2'} u_j^2 \\ \vdots \\ u^{E'} = \sum_{j=1}^{n_E} \psi_j^{E'} u_j^E \end{cases} \quad (3.57b)$$

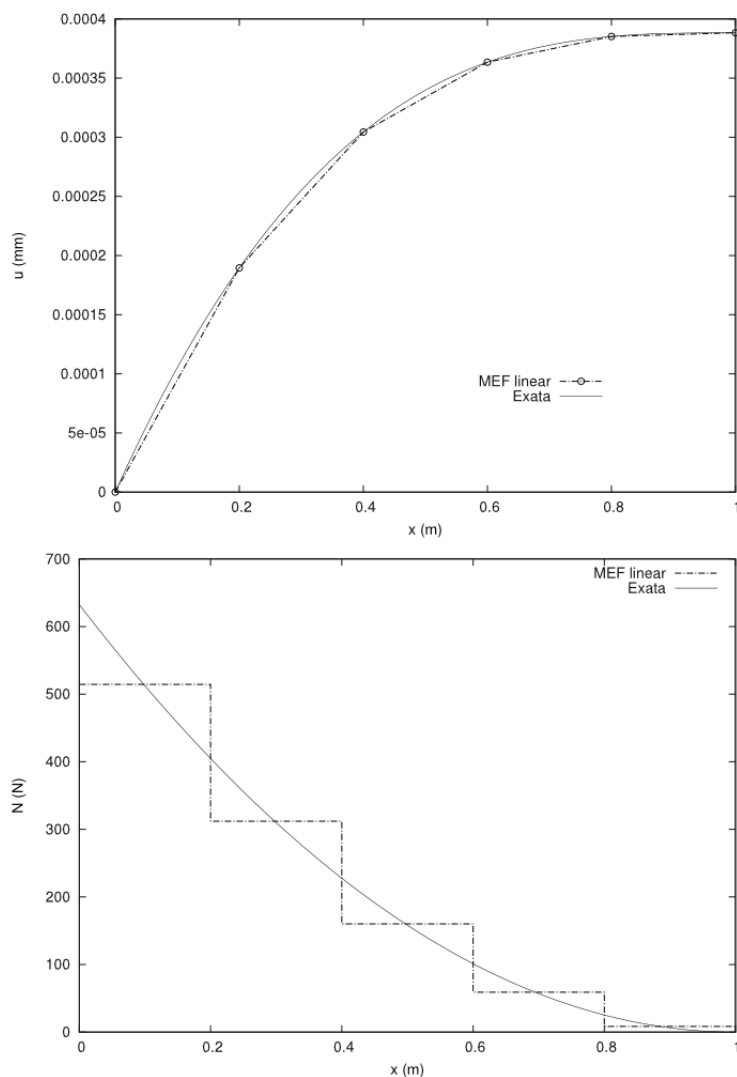


FIGURA 3.22. Apresentação da variáveis primária (deslocamento) e secundárias (força) em forma gráfica.

Observe, no entanto, que haverá descontinuidade da variável secundária nos nós comuns a dois ou mais elementos, quer tenham ou não força ou fluxo externo, devido à menor exigência de continuidade entre elementos.

Para o cálculo dos valores nodais da variável secundária há duas formas de proceder:

- (1) Simplesmente tomar a derivada da solução aproximada local nos nós de cada elemento:

$$u_j^{e'} = u^{e'}(x_j^e) = \sum_{j=1}^{n_e} \psi_j^{e'}(x_j^e) u_j^e \quad (3.58)$$

e, após, empregar a equação de balanço ou de equilíbrio nodal, Eq. 3.28, para assim obter o valor da variável secundária no nó:

- (2) Recorrer às equações de equilíbrio, Eq. 3.56.

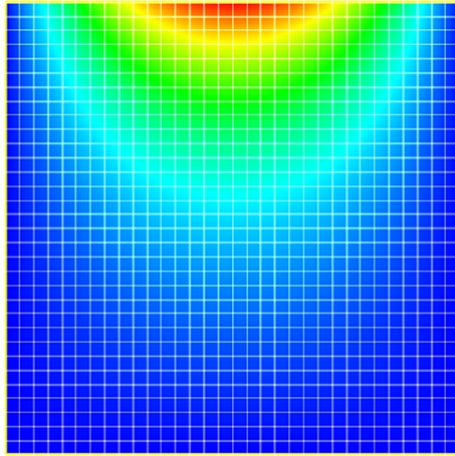


FIGURA 3.23. Apresentação da variável primária (temperatura) em forma de mapa de cores.

A primeira é mais empregada porque consome menos memória do processador face à segunda, pois nesta as matrizes  $[K^{21}]$  e  $[K^{22}]$  são, em geral, alteradas pelos métodos de solução de sistemas algébricos lineares para a obtenção de  $\{u^2\}$ , exigindo o armazenamento delas.

## Flexão de vigas

Neste capítulo são tratados os problemas a valores no contorno de 4ª ordem, especificamente os relativos à teoria de viga de Euler-Bernoulli.

### 4.1. O elemento de viga de Euler-Bernoulli

**4.1.1. A equação governante da deflexão de uma viga.** Considere, sem perda de generalidade, a viga em balanço mostrada na Fig. 4.1 submetida a um carregamento distribuído  $f$  e à força e ao momento  $F_0$  e  $M_0$ , respectivamente, aplicados na extremidade livre. Do equilíbrio de forças, decorrem as conhecidas relações diferenciais entre momento fletor, força cortante e carregamento distribuído, os 2 primeiros denotados respectivamente por  $M$  e  $V$ <sup>1</sup>:

$$V = \frac{d}{dx} M \quad (4.1a)$$

$$f = \frac{d^2}{dx^2} M \quad (4.1b)$$

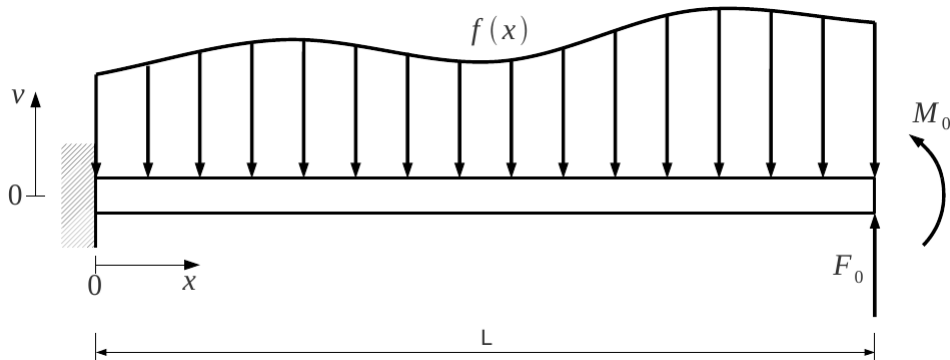


FIGURA 4.1. Viga em balanço com carregamento distribuído e força e momento aplicados na extremidade livre.

A teoria de Euler-Bernoulli, por lado, fornece a relação entre a deflexão  $v$  e o momento fletor  $M$ :

$$M = EI \frac{d^2}{dx^2} v \quad (4.2)$$

onde  $EI$  é a rigidez à flexão da viga. Substituindo a Eq. 4.2 na Eq. 4.1b obtém-se a equação diferencial de 4ª ordem que governa o comportamento da deflexão ao longo da viga:

<sup>1</sup>Convencionalmente serão adotados aqui os sinais para  $f$ ,  $V$  e  $M$  conforme o indicado na Fig. 4.2

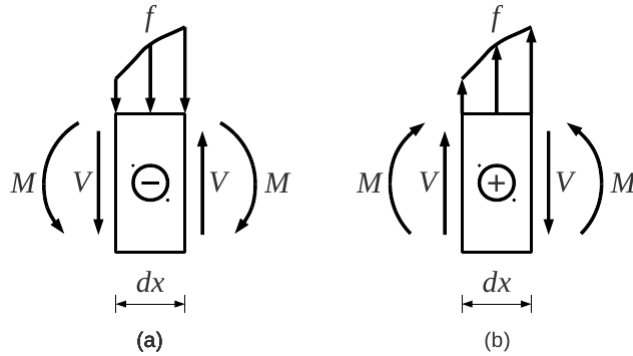


FIGURA 4.2. Convenção de sinal para os esforços internos.

$$\frac{d^2}{dx^2} \left( EI \frac{d^2}{dx^2} v \right) = f, \quad x \in ]0, L[ \quad (4.3)$$

Por se tratar de uma equação diferencial de 4ª ordem, são necessárias 4 condições de contorno para se obter solução única para o problema.

**4.1.2. O elemento de viga.** O elemento de viga é um segmento de viga com dois nós, resultante da divisão da viga em intervalos. A reunião de todos esses elementos forma a malha, Fig. 4.3. Em cada nó há dois graus de liberdade, a deflexão  $v$  e a rotação  $\theta$ . Tomado isoladamente do restante da viga, o elemento de viga fica sujeito ao carregamento distribuído e às forças cortantes e aos momentos fletores nas suas extremidades, conforme ilustrado na Fig. 4.4.

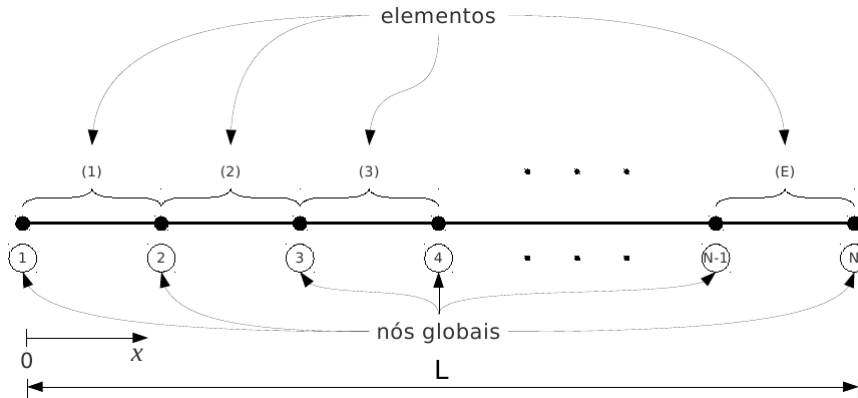


FIGURA 4.3. Malha de elementos finitos para uma viga: nós e elementos.

O problema a valores no contorno associado ao elemento de viga é dado pela equação diferencial da viga de Euler-Bernoulli, Eq. 4.3, restrita ao elemento, mais as condições de contorno naturais nos nós. Em termos da coordenada local  $\chi$  isto fica:

$$\frac{d^2}{d\chi^2} \left( EI \frac{d^2}{d\chi^2} v \right) = f, \quad \chi \in ]0, h_e[ \quad (4.4a)$$

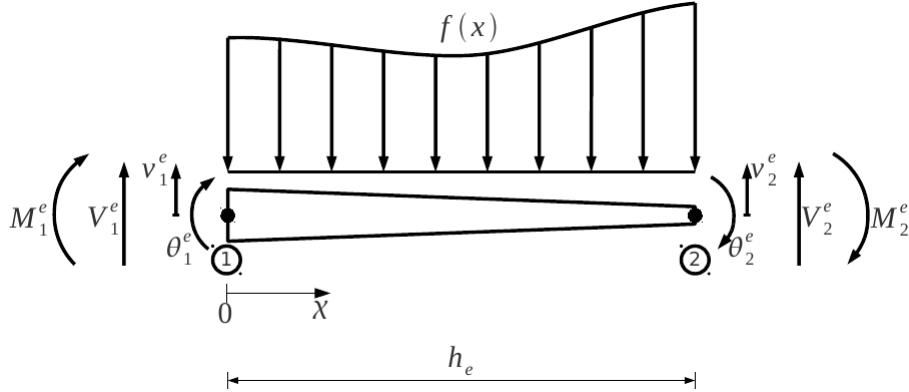


FIGURA 4.4. Elemento de viga de Euler-Bernoulli genérico.

$$V_1^e = Q_1^e = \left[ \frac{d}{d\chi} \left( EI \frac{d^2}{d\chi^2} v \right) \right] \Big|_{\chi=0} \quad (4.4b)$$

$$M_1^e = Q_2^e = \left( EI \frac{d^2}{d\chi^2} v \right) \Big|_{\chi=0} \quad (4.4c)$$

$$V_2^e = Q_3^e = - \left[ \frac{d}{d\chi} \left( EI \frac{d^2}{d\chi^2} v \right) \right] \Big|_{\chi=h_e} \quad (4.4d)$$

$$M_2^e = Q_4^e = - \left( EI \frac{d^2}{d\chi^2} v \right) \Big|_{\chi=h_e} \quad (4.4e)$$

4.1.2.1. *A forma fraca do problema restrito ao elemento.* A forma fraca do problema obtém-se aplicando a integral ponderada à Eq. 4.4a:

$$\int_0^{h_e} \left[ \frac{d^2}{d\chi^2} \left( EI \frac{d^2}{d\chi^2} v \right) - f \right] w d\chi = 0 \quad (4.5)$$

onde  $w$  é a função de ponderação. Fazendo uso de uma das relações integrais decorrentes da integração por partes, Eq.2.12, obtém-se:

$$\int_0^{h_e} EI \frac{d^2}{d\chi^2} w \frac{d^2}{d\chi^2} v d\chi = \int_0^{h_e} w f d\chi + \left[ \frac{d}{d\chi} w \left( EI \frac{d^2}{d\chi^2} v \right) - w \frac{d}{d\chi} \left( EI \frac{d^2}{d\chi^2} v \right) \right] \Big|_0^{h_e} \quad (4.6)$$

Substituindo nesta última expressão as condições de contorno naturais, Eqs. 4.4, resulta a forma fraca da viga de Euler-Bernoulli:

$$\begin{aligned} \int_0^{h_e} EI \frac{d^2}{d\chi^2} w \frac{d^2}{d\chi^2} v d\chi &= \int_0^{h_e} w f d\chi + \\ &+ w(0)Q_1^e + \left( -\frac{d}{d\chi} w \right) \Big|_{\chi=0} Q_2^e + w(h_e)Q_3^e + \left( -\frac{d}{d\chi} w \right) \Big|_{\chi=h_e} Q_4^e \end{aligned} \quad (4.7)$$

ou em forma compacta:

$$B(w, v) = l(w) \quad (4.8a)$$

onde:

$$B(w, v) = \int_0^{h_e} EI \frac{d^2}{d\chi^2} w \frac{d^2}{d\chi^2} v d\chi \quad (4.8b)$$

$$l(w) = \int_0^{h_e} w f d\chi + w(0)Q_1^e + \left(-\frac{d}{d\chi} w\right)\Big|_{\chi=0} Q_2^e + w(h_e)Q_3^e + \left(-\frac{d}{d\chi} w\right)\Big|_{\chi=h_e} Q_4^e \quad (4.8c)$$

COMENTÁRIO 4.1. *A forma fraca também pode ser obtida pelo método variacional, minimizando a energia potencial da viga, ou pelo método dos trabalhos virtuais.*

4.1.2.2. *Funções de interpolação.* A forma fraca deste problema, Eq.4.7, exige que as funções de interpolação sejam de classe  $C^1(\Omega^e)$ , pois o operador diferencial que aparece nela é de 2ª ordem. Por outro lado, a solução de elementos finitos deve ser interpoladora nos nós extremos, isto é, deve interpolar os dois graus de liberdade  $v$  e  $\theta$  nos nós:

$$v^e(0) = v_1^e = u_1^e \quad (4.9a)$$

$$\theta^e(0) = -v^{e'}(0) = \theta_1^e = u_2^e \quad (4.9b)$$

$$v^e(h_e) = v_2^e = u_3^e \quad (4.9c)$$

$$\theta^e(h_e) = -v^{e'}(h_e) = \theta_2^e = u_4^e \quad (4.9d)$$

COMENTÁRIO 4.2. *Observe que qualquer função interpoladora satisfazendo as equações acima garante que a solução aproximada seja de classe  $C^1(\Omega^e)$ .*

Como há 4 condições a satisfazer, Eq.4.9, deve-se empregar um polinômio do 3º grau como função de forma no elemento:

$$v^e = c_0 + c_1\chi + c_2\chi^2 + c_3\chi^3 \quad (4.10)$$

que leva ao seguinte sistema de equações algébricas lineares, uma vez substituído nessas condições:

$$v_1^e = v^e(0) = c_0 \quad (4.11a)$$

$$\theta_1^e = -v^{e'}(0) = -c_1 \quad (4.11b)$$

$$v_2^e = v^e(h_e) = c_0 + c_1h_e + c_2h_e^2 + c_3h_e^3 \quad (4.11c)$$

$$\theta_2^e = -v^{e'}(h_e) = -c_1 - 2c_2h_e - 3c_3h_e^2 \quad (4.11d)$$



que, uma vez resolvido, permite escrever a aproximação como:

$$v^e(x) = u_1^e \psi_1^e + u_2^e \psi_2^e + u_3^e \psi_3^e + u_4^e \psi_4^e = \sum_{j=1}^4 \psi_j^e u_j^e \quad (4.12)$$

cujas funções de forma  $\psi_j^e$  são explicitadas a seguir e ilustradas nas Figs. 4.5 e 4.6:

$$\psi_1^e(\chi) = 1 - 3 \left( \frac{\chi}{h_e} \right)^2 + 2 \left( \frac{\chi}{h_e} \right)^3 \quad (4.13a)$$

$$\psi_2^e(\chi) = -\chi \left( 1 - \frac{\chi}{h_e} \right)^2 \quad (4.13b)$$

$$\psi_3^e(\chi) = \left( \frac{\chi}{h_e} \right)^2 \left( 3 - 2 \frac{\chi}{h_e} \right) \quad (4.13c)$$

$$\psi_4^e(\chi) = h_e \left( \frac{\chi}{h_e} \right)^2 \left( 1 - \frac{\chi}{h_e} \right) \quad (4.13d)$$

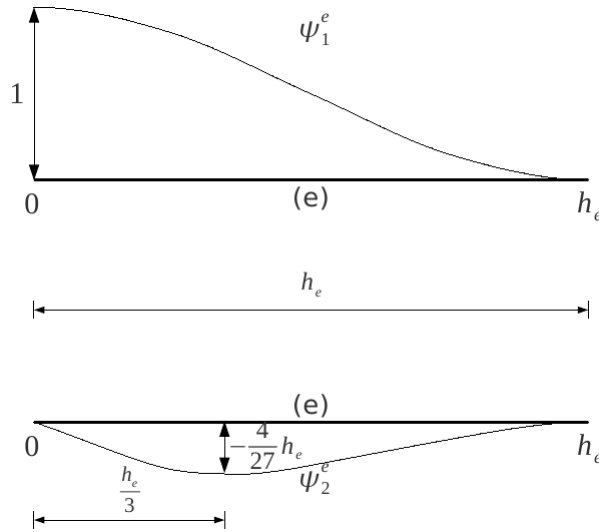


FIGURA 4.5. Funções de forma associadas ao nó local 1.

Estes polinômios pertencem à família de polinômios de Hermite. Especificamente, são os polinômios cúbicos de Hermite. Suas derivadas de 1ª e 2ª ordens são respectivamente:

$$\psi_1^{e'}(\chi) = -\frac{6}{h_e} \frac{\chi}{h_e} \left( 1 - \frac{\chi}{h_e} \right) \quad (4.14a)$$

$$\psi_2^{e'}(\chi) = -1 + 4 \frac{\chi}{h_e} - 3 \left( \frac{\chi}{h_e} \right)^2 \quad (4.14b)$$

$$\psi_3^{e'}(\chi) = -\psi_1^{e'} \quad (4.14c)$$

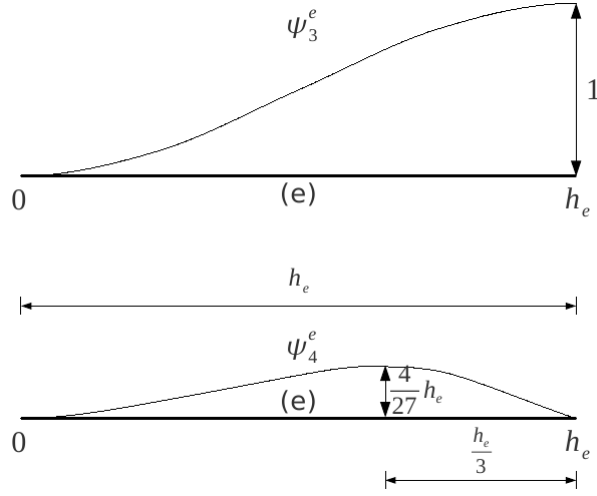


FIGURA 4.6. Funções de forma associadas ao nó local 2.

$$\psi_4^{e'}(\chi) = \frac{\chi}{h_e} \left( 2 - 3 \frac{\chi}{h_e} \right) \quad (4.14d)$$

e:

$$\psi_1^{e''}(\chi) = -\frac{6}{h_e^2} \left( 1 - 2 \frac{\chi}{h_e} \right) \quad (4.15a)$$

$$\psi_2^{e''}(\chi) = -\frac{2}{h_e} \left( 3 \frac{\chi}{h_e} - 2 \right) \quad (4.15b)$$

$$\psi_3^{e''}(\chi) = -\psi_1^{e''} \quad (4.15c)$$

$$\psi_4^{e''}(\chi) = \frac{2}{h_e} \left( 1 - 3 \frac{\chi}{h_e} \right) \quad (4.15d)$$

As derivadas de primeira ordem estão ilustradas nas Figs. 4.7 e 4.8.

#### 4.1.2.3. Propriedades das funções de forma.

##### 4.1.2.3.1. Propriedade delta de Kronecker.

$$\psi_{2i-1}^e(\chi_j) = \delta_{ij}, \quad i, j = 1, 2 \quad (4.16a)$$

$$\psi_{2i}^e(\chi_j) = 0, \quad i, j = 1, 2 \quad (4.16b)$$

$$\psi_{2i-1}^{e'}(\chi_j) = 0, \quad i, j = 1, 2 \quad (4.16c)$$

$$\psi_{2i}^{e'}(\chi_j) = -\delta_{ij}, \quad i, j = 1, 2 \quad (4.16d)$$

O sinal negativo na Eq. 4.16d se deve à convenção de que  $\theta = -\frac{d}{d\chi} v$ .

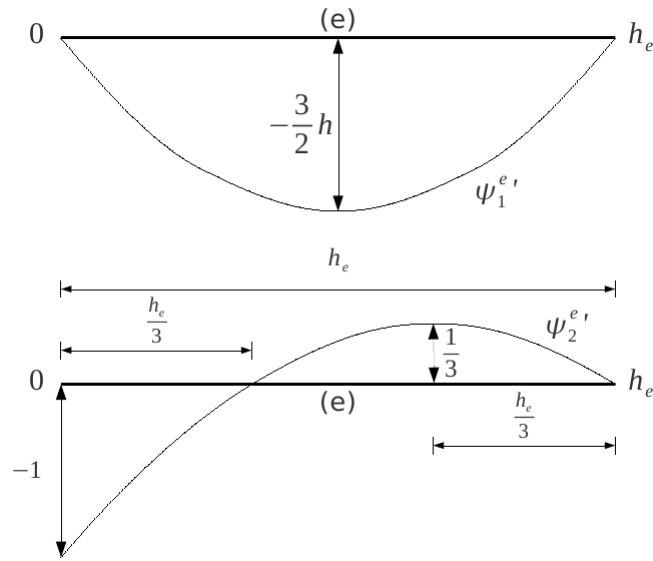


FIGURA 4.7. Derivada das funções de forma associadas ao nó local 1.

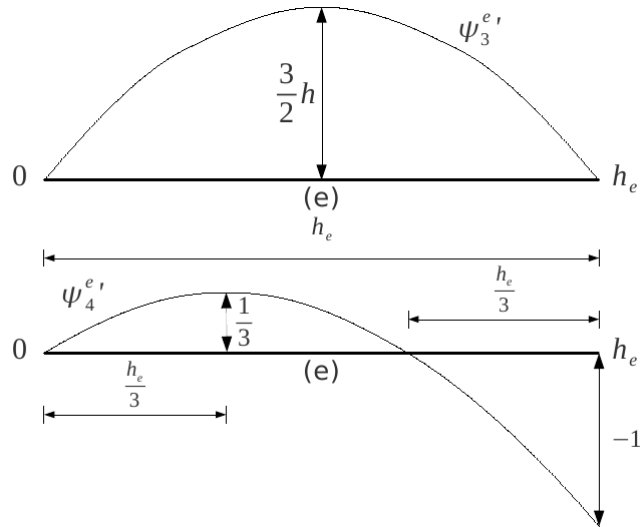


FIGURA 4.8. Derivada das funções de forma associadas ao nó local 2.

4.1.2.3.2. Propriedade partição da unidade.

$$\psi_1^e(\chi) + \psi_3^e(\chi) = 1, \quad \forall \chi \in \Omega_e \tag{4.17}$$

**4.1.3. O modelo local de elementos finitos.** Para construir o modelo de elementos finitos de um elemento de viga de Euler-Bernoulli basta substituir a forma aproximada, Eq. 4.12, na forma fraca, Eq.4.7, resultando:

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^4 \left( \int_0^{h_e} EI \frac{d^2}{d\chi^2} \psi_i^e \frac{d^2}{d\chi^2} \psi_j^e d\chi \right) u_j^e &= \int_0^{h_e} \psi_i^e f d\chi + \\ &+ \psi_i^e(0)Q_1^e + \left( -\frac{d}{d\chi} \psi_i^e \right) \Big|_{\chi=0} Q_2^e + \psi_i^e(h_e)Q_3^e + \left( -\frac{d}{d\chi} \psi_i^e \right) \Big|_{\chi=h_e} Q_4^e \end{aligned} \quad (4.18)$$

Tendo em conta a *propriedade delta de Kronecker*, Eq. 4.16, esta última equação assume a forma do modelo de elemento finitos local:

$$\sum_{j=1}^4 \left( \int_0^{h_e} EI \frac{d^2}{d\chi^2} \psi_i^e \frac{d^2}{d\chi^2} \psi_j^e d\chi \right) u_j^e = \int_0^{h_e} \psi_i^e f d\chi + Q_i^e \quad (4.19)$$

ou, em forma compacta:

$$\sum_{j=1}^4 K_{ij}^e u_j^e = f_i^e + Q_i^e \quad (4.20)$$

onde:

$$K_{ij}^e = \int_0^{h_e} EI \frac{d^2}{d\chi^2} \psi_i^e \frac{d^2}{d\chi^2} \psi_j^e d\chi \quad (4.21a)$$

e:

$$f_i^e = \int_0^{h_e} \psi_i^e f d\chi \quad (4.21b)$$

Matricialmente, o modelo de elementos de um elemento de viga de Euler-Bernoulli é:

$$\begin{bmatrix} K_{11}^e & K_{12}^e & K_{13}^e & K_{14}^e \\ K_{21}^e & K_{22}^e & K_{23}^e & K_{24}^e \\ K_{31}^e & K_{32}^e & K_{33}^e & K_{34}^e \\ K_{41}^e & K_{42}^e & K_{43}^e & K_{44}^e \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1^e \\ u_2^e \\ u_3^e \\ u_4^e \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f_1^e \\ f_2^e \\ f_3^e \\ f_4^e \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} Q_1^e \\ Q_2^e \\ Q_3^e \\ Q_4^e \end{Bmatrix} \quad (4.22)$$

ou sinteticamente:

$$[K^e]\{u^e\} = \{f^e\} + \{Q^e\} \quad (4.23)$$

No caso de  $EI$  e  $f$  serem constantes, a matriz de rigidez e o vetor de carregamento distribuído escrevem-se respectivamente:

$$[K^e] = 2 \frac{EI}{h_e^3} \begin{bmatrix} 6 & -3h_e & -6 & -3h_e \\ -3h_e & 2h_e^2 & 3h_e & h_e^2 \\ -6 & 3h_e & 6 & 3h_e \\ -3h_e & h_e^2 & 3h_e & 2h_e^2 \end{bmatrix} \quad (4.24a)$$

e:

$$\{f^e\} = \frac{fh_e}{12} \begin{Bmatrix} 6 \\ -h_e \\ 6 \\ h_e \end{Bmatrix} \quad (4.24b)$$

**4.1.4. O modelo global de elementos finitos.** Como visto no capítulo anterior, a construção do modelo de elementos finitos global realiza-se por meio do modelo local e da matriz de conectividade, e é o que será feito aqui. Antes, porém, de dar início à construção do modelo, convém observar que a exigência de continuidade de classe  $C^1(\Omega)$  para a solução global é atendida pelas funções de forma do elemento de viga de Euler-Bernoulli, pois a propriedade *delta de Kronecker* garante a continuidade da deflexão e da rotação na transição de um elemento a outro; requer-se ainda o equilíbrio de forças e momentos nos nós comuns a elementos adjacentes.

Para ilustrar a implementação do modelo de elementos finitos, vai-se recorrer a um exemplo simples, uma viga em balanço, ilustrada na Fig. 4.9, à qual aplica-se uma malha formada por apenas dois elementos de viga.

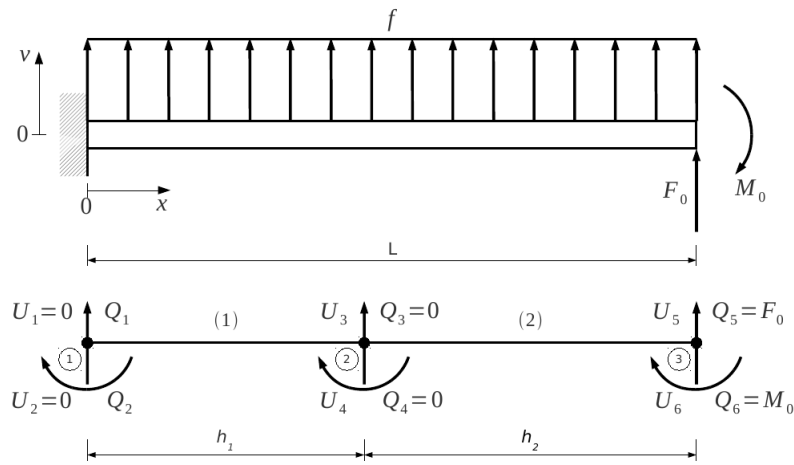


FIGURA 4.9. Viga em balanço uniformemente carregada e malha de elementos finitos associada.

Distinguem-se na malha proposta as seguintes variáveis primárias:

$$u_1^1 = U_1 \quad (4.25a)$$

$$u_2^1 = U_2 \quad (4.25b)$$

$$u_3^1 = u_1^2 = U_3 \quad (4.25c)$$

$$u_4^1 = u_2^2 = U_4 \quad (4.25d)$$

$$u_3^2 = U_5 \quad (4.25e)$$

$$u_4^2 = U_6 \quad (4.25f)$$

e secundárias:

$$Q_1^1 = Q_1 = Y_1 \quad (4.26a)$$

$$Q_2^1 = Q_2 = M_1 \quad (4.26b)$$

$$Q_3^1 + Q_1^2 = Q_3 = 0 \quad (4.26c)$$

$$Q_4^1 + Q_2^2 = Q_4 = 0 \quad (4.26d)$$

$$Q_3^2 = Q_5 = F_0 \quad (4.26e)$$

$$Q_4^2 = Q_6 = M_0 \quad (4.26f)$$

O equilíbrio de esforços no nó 1 permite escrever a partir das Eqs. 4.22 e 4.25 levadas às Eqs. 4.26:

$$K_{11}^1 U_1 + K_{12}^1 U_2 + K_{13}^1 U_3 + K_{14}^1 U_4 = f_1^1 + Y_1 \quad (4.27a)$$

$$K_{21}^1 U_1 + K_{22}^1 U_2 + K_{23}^1 U_3 + K_{24}^1 U_4 = f_2^1 + M_1 \quad (4.27b)$$

no nó 2:

$$\begin{aligned} K_{31}^1 U_1 + K_{32}^1 U_2 + (K_{33}^1 + K_{11}^2) U_3 + (K_{34}^1 + K_{12}^2) U_4 + K_{13}^2 U_5 + K_{14}^2 U_6 = \\ = (f_3^1 + f_1^2) + (Q_3^1 + Q_1^2) = (f_3^1 + f_1^2) \end{aligned} \quad (4.27c)$$

$$\begin{aligned} K_{41}^1 U_1 + K_{42}^1 U_2 + (K_{43}^1 + K_{21}^2) U_3 + (K_{44}^1 + K_{22}^2) U_4 + K_{23}^2 U_5 + K_{24}^2 U_6 = \\ = (f_4^1 + f_2^2) + (Q_4^1 + Q_2^2) = (f_4^1 + f_2^2) \end{aligned} \quad (4.27d)$$

e no nó 3:

$$K_{31}^2 U_1 + K_{32}^2 U_2 + K_{33}^2 U_3 + K_{34}^2 U_4 = f_3^2 + F_0 \quad (4.27e)$$

$$K_{41}^2 U_1 + K_{42}^2 U_2 + K_{43}^2 U_3 + K_{44}^2 U_4 = f_4^2 + M_0 \quad (4.27f)$$

As equações acima formam o *modelo global de elementos finitos* para a malha em questão.

O modelo global de elementos finitos é comumente escrito em forma matricial:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} K_{11}^1 & K_{12}^1 & K_{13}^1 & K_{14}^1 & 0 & 0 \\ K_{21}^1 & K_{22}^1 & K_{23}^1 & K_{24}^1 & 0 & 0 \\ K_{31}^1 & K_{32}^1 & K_{33}^1 + K_{11}^2 & K_{34}^1 + K_{12}^2 & K_{13}^2 & K_{14}^2 \\ K_{41}^1 & K_{42}^1 & K_{43}^1 + K_{21}^2 & K_{44}^1 + K_{22}^2 & K_{23}^2 & K_{24}^2 \\ 0 & 0 & K_{31}^2 & K_{32}^2 & K_{33}^2 & K_{34}^2 \\ 0 & 0 & K_{41}^2 & K_{42}^2 & K_{43}^2 & K_{44}^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \\ U_4 \\ U_5 \\ U_6 \end{Bmatrix} = \\ = \begin{Bmatrix} f_1^1 \\ f_2^1 \\ f_3^1 + f_1^2 \\ f_4^1 + f_2^2 \\ f_3^2 \\ f_4^2 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} Q_1^1 \\ Q_2^1 \\ Q_3^1 + Q_1^2 \\ Q_4^1 + Q_2^2 \\ Q_3^2 \\ Q_4^2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f_1^1 \\ f_2^1 \\ f_3^1 + f_1^2 \\ f_4^1 + f_2^2 \\ f_3^2 \\ f_4^2 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} Y_1 \\ M_1 \\ 0 \\ 0 \\ F_0 \\ M_0 \end{Bmatrix} \end{aligned} \quad (4.28)$$

Na prática a matriz de rigidez e o vetor de carregamento distribuído globais obtêm-se por meio dos seus correspondentes locais e da matriz de conectividade da malha. Quanto à montagem da matriz e vetor globais, deve-se observar que cada par de linha ou coluna, tanto local como global, está associado a um nó. As Figs. 4.10 e 4.11 ilustram a alocação da matriz de rigidez e do vetor de carregamento distribuído locais nas respectivas matriz e vetor globais por meio da matriz de conectividade, expressa abaixo, para uma malha de 15 elementos:

$$[B] = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 8 \\ 3 & 7 \\ 6 & 9 \\ \vdots & \vdots \\ 13 & 15 \end{bmatrix} \quad (4.29)$$

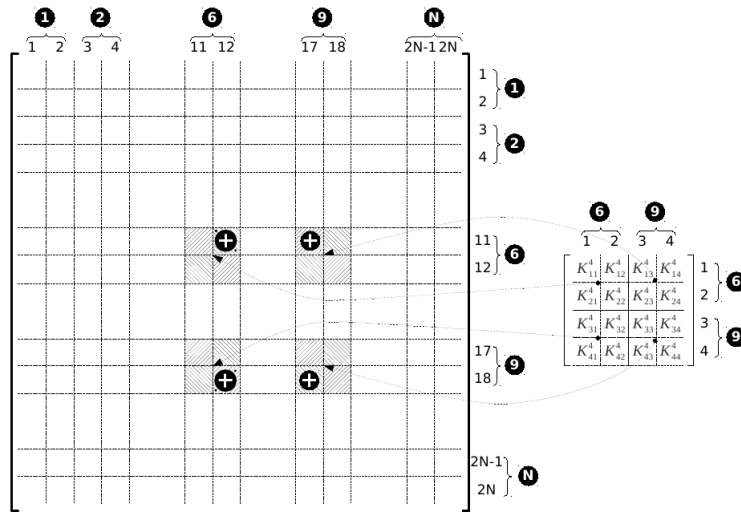


FIGURA 4.10. Alocação da matriz de rigidez local do elemento 4 na matriz global. Cada submatriz local ocupa uma das regiões hachuradas.

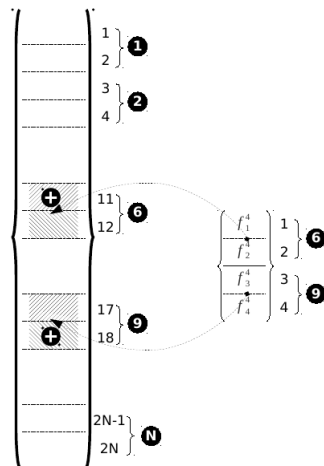


FIGURA 4.11. Alocação do vetor de carregamento distribuído local do elemento 4 no vetor global. Cada subvetor local ocupa uma das regiões hachuradas.

Supondo que a malha ilustrada fosse composta por dois elementos de viga iguais, o modelo global de elementos finitos seria:

$$\begin{aligned}
2\frac{EI}{h^3} \begin{bmatrix} 6 & -3h & -6 & -3h & 0 & 0 \\ -3h & 2h^2 & 3h & h^2 & 0 & 0 \\ -6 & 3h & 12 & 0 & -6 & -3h \\ -3h & h^2 & 0 & 4h^2 & 3h & h^2 \\ 0 & 0 & -6 & 3h & 6 & 3h \\ 0 & 0 & -3h & h^2 & 3h & 2h^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \\ U_4 \\ U_5 \\ U_6 \end{Bmatrix} &= \\
&= \frac{fh}{12} \begin{Bmatrix} 6 \\ -h \\ 12 \\ 0 \\ 6 \\ h \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} Q_1^1 \\ Q_2^1 \\ Q_3^1 + Q_1^2 \\ Q_4^1 + Q_2^2 \\ Q_3^2 \\ Q_4^2 \end{Bmatrix} \quad (4.30)
\end{aligned}$$

**4.1.5. Imposição das condições de contorno ou de apoio.** Tome-se o exemplo da Fig.4.9. Tem-se nas extremidades da viga condições de contorno essenciais:

$$U_1 = u_1^1 = v(0) = 0 \quad (4.31a)$$

$$U_2 = u_2^1 = \theta(0) = -\frac{d}{dx}v \Big|_{x=0} = 0 \quad (4.31b)$$

e naturais:

$$Q_3^2 = -\left[ \frac{d}{dx} \left( EI \frac{d^2}{dx^2} v \right) \right]_{x=L} = F_0 \quad (4.32a)$$

$$Q_4^2 = -\left( EI \frac{d^2}{dx^2} v \right)_{x=L} = M_0 \quad (4.32b)$$

Tem-se ainda no nó 1 os esforços reativos  $Y_1$  e  $M_1$ , ou seja:

$$Q_1^1 = Y_1 \quad (4.33a)$$

$$Q_2^1 = M_1 \quad (4.33b)$$

e no nó intermediário, 2, ausência de esforços, isto é:

$$Q_3^1 + Q_1^2 = 0 \quad (4.34a)$$

$$Q_4^1 + Q_2^2 = 0 \quad (4.34b)$$

O modelo global de elementos finitos do exemplo em questão, considerando malha de dois elementos finitos iguais, apresenta finalmente a forma acabada, pronta para resolução:



$$2\frac{EI}{h^3} \begin{bmatrix} 6 & -3h & -6 & -3h & 0 & 0 \\ -3h & 2h^2 & 3h & h^2 & 0 & 0 \\ -6 & 3h & 12 & 0 & -6 & -3h \\ -3h & h^2 & 0 & 4h^2 & 3h & h^2 \\ 0 & 0 & -6 & 3h & 6 & 3h \\ 0 & 0 & -3h & h^2 & 3h & 2h^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ U_3 \\ U_4 \\ U_5 \\ U_6 \end{Bmatrix} = \frac{f_0 h}{12} \begin{Bmatrix} 6 \\ -h \\ 12 \\ 0 \\ 6 \\ h \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} Y_1 \\ M_1 \\ 0 \\ 0 \\ F_0 \\ M_0 \end{Bmatrix} \quad (4.35)$$

cujas incógnitas são as reações no engaste e a deflexão e a rotação nos demais nós, respectivamente:  $Y_1$ ,  $M_1$ ,  $U_3$ ,  $U_4$ ,  $U_5$  e  $U_6$ .

O quadro da Fig. 4.12 apresenta as condições de apoios a serem impostas, tanto cinemáticas como de esforços, para alguns tipos comuns de apoios.

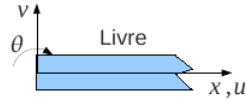
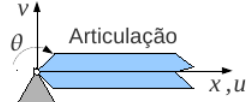
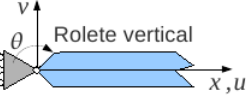
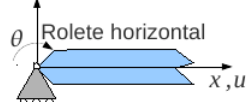
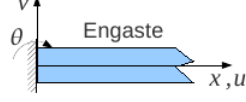
Tipo de suporte	Condição de apoio	
	Graus de liberdade	Esforços
 <p>Livre</p>	nenhum	todos, conforme especificação
 <p>Articulação</p>	$u=0$ $v=0$	momento, conforme especificação
 <p>Rolete vertical</p>	$u=0$	força transversal e momento, conforme especificação
 <p>Rolete horizontal</p>	$v=0$	força axial e momento, conforme especificação
 <p>Engaste</p>	$u=0$ $v=0$ $\theta=0$	nenhum

FIGURA 4.12. Condições de apoio cinemáticas ou de esforço para alguns tipos de apoios.

**4.1.6. Solução.** Segundo a estratégia de solução do sistema de equações algébricas apresentada no Capítulo 3, tem-se para o problema a valores no contorno em foco:

$$[K^{11}] = 2\frac{EI}{h^3} \begin{bmatrix} 6 & -3h \\ -3h & 2h^2 \end{bmatrix} \quad (4.36)$$

$$[K^{12}] = 2 \frac{EI}{h^3} \begin{bmatrix} -6 & -3h & 0 & 0 \\ 3h & h^2 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (4.37)$$

$$[K^{21}] = 2 \frac{EI}{h^3} \begin{bmatrix} -6 & 3h \\ -3h & h^2 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (4.38)$$

$$[K^{22}] = 2 \frac{EI}{h^3} \begin{bmatrix} 12 & 0 & -6 & -3h \\ 0 & 4h^2 & 3h & h^2 \\ -6 & 3h & 6 & 3h \\ -3h & h^2 & 3h & 2h^2 \end{bmatrix} \quad (4.39)$$

vetor de variáveis primárias conhecidas:

$$\{U^1\} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (4.40a)$$

vetor de variáveis primárias incógnitas:

$$\{U^2\} = \begin{Bmatrix} U_3 \\ U_4 \\ U_5 \\ U_6 \end{Bmatrix} \quad (4.40b)$$

vetor de carregamento distribuído  $Q^1$ :

$$\{Q^1\} = \frac{f_0 h}{12} \begin{Bmatrix} 6 \\ -h \end{Bmatrix} \quad (4.40c)$$

vetor de carregamento distribuído  $Q^2$ :

$$\{Q^2\} = \frac{f_0 h}{12} \begin{Bmatrix} 12 \\ 0 \\ 6 \\ h \end{Bmatrix} \quad (4.40d)$$

vetor de variáveis secundárias incógnitas:

$$\{F^1\} = \begin{Bmatrix} Y_1 \\ M_1 \end{Bmatrix} \quad (4.40e)$$

vetor de variáveis secundárias conhecidas:

$$\{F^2\} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ F_0 \\ M_0 \end{Bmatrix} \quad (4.40f)$$

Substituindo estas expressões nas Eq. 3.55 e 3.56, aqui lembradas, resultam:

$$\begin{aligned} \{U^2\} &= [K^{22}]^{-1} (\{F^2\} - [K^{21}]\{U^1\}) = \\ &= 6 \frac{h}{EI} \begin{Bmatrix} 5F_0 h^2 - M_0 3h + \frac{17}{4} f_0 h^3 \\ -9F_0 h + 6M_0 - 7f_0 h^2 \\ 16F_0 h^2 - 12M_0 h + 12f_0 h^3 \\ -12F_0 h + 12M_0 - 8f_0 h^2 \end{Bmatrix} \end{aligned} \quad (4.41)$$

e:

$$\{F^1\} = [K^{11}]\{U^1\} + [K^{12}]\{U^2\} = \begin{Bmatrix} -F_0 - 2f_0h \\ 2F_0h + 2f_0h^2 - M_0 \end{Bmatrix} \quad (4.42)$$

As reações  $Y_1$  e  $M_1$  poderiam ser determinadas alternativamente por:

$$\begin{aligned} Y_1 = Q_1^1 &= \frac{d}{dx} \left( EI \frac{d^2}{dx^2} w \right) \Big|_{x=0} = \\ &= EI \left( \frac{d^3}{dx^3} \psi_3^1 U_3 + \frac{d^3}{dx^3} \psi_4^1 U_4 \right) \Big|_{x=0} = -F_0 - \frac{3}{2} f_0 h \end{aligned} \quad (4.43a)$$

$$\begin{aligned} M_1 = Q_2^1 &= \left( EI \frac{d^2}{dx^2} w \right) \Big|_{x=0} = \\ &= EI \left( \frac{d^2}{dx^2} \psi_3^1 U_3 + \frac{d^2}{dx^2} \psi_4^1 U_4 \right) \Big|_{x=0} = -M_0 + 2F_0h + \frac{23}{12} f_0 h^2 \end{aligned} \quad (4.43b)$$

Estas últimas diferem das anteriores, Eq. 4.42, de  $\frac{1}{2}f_0h$  e  $\frac{1}{12}f_0h^2$ , respectivamente. Na prática, como a diferença entre ambas as alternativas são respectivamente da ordem de  $o(h)$  e  $o(h^2)$ , à medida que se diminui o tamanho  $h$  dos elementos ou se refina a malha, ambas alternativas tendem ao mesmo valor.

**4.1.7. Pós-processamento da solução.** Em cada elemento da malha podem-se obter informações úteis para análise como a deflexão, a declividade, a força cortante ou o momento fletor, cujos modos de obtenção são apresentados a seguir.

4.1.7.1. *Deflexão.* A deflexão em cada elemento decorre diretamente da Eq. 4.12, já que os valores nodais globais da deflexão e da declividade foram determinados e se cuidou da condição de continuidade entre elementos ao longo do processo de solução do modelo de elementos finitos.

4.1.7.2. *Declividade.* A declividade em cada elemento decorre da diferenciação da deflexão obtida aí. Pela mesma razão apontada anteriormente, a declividade é contínua entre elementos. Por causa da diferenciação, o gráfico dela no elemento é um arco de parábola.

4.1.7.3. *Momento fletor.* O momento fletor em cada elemento obtém-se pela diferenciação de 2ª ordem da deflexão multiplicada pela rigidez à flexão no elemento, suposta uniforme nele, Eq. 4.44. A continuidade entre elementos já não é mais observada. Ademais, o gráfico do momento no elemento é uma reta, isto é, o aspecto do gráfico de momento fletor ao longo do domínio é de uma serra.

$$M^e = (EI)^e \frac{d^2}{dx^2} u^e = (EI)^e \sum_{j=1}^4 \frac{d^2}{dx^2} \psi_j^e u_j^e \quad (4.44)$$

4.1.7.4. *Força cortante.* A força cortante em cada elemento, por sua vez, é obtida da diferenciação do momento fletor. A Eq.4.45 tem em conta a homogeneidade da rigidez flexural no elemento. Não há garantia de continuidade da força cortante entre elementos. O gráfico dela ao longo do domínio lembra uma escada irregular.

$$V^e = \frac{d}{dx} M^e = (EI)^e \frac{d^3}{dx^3} u^e = (EI)^e \sum_{j=1}^4 \frac{d^3}{dx^3} \psi_j^e u_j^e \quad (4.45)$$

4.1.7.5. *Tensões.* Um breve comentário sobre a obtenção das tensões ao longo da viga. De posse do momento fletor e da força cortante, pode-se conhecer o estado de tensão e, se for o caso, também o de deformação, em toda viga. A distribuição das tensões normais e de cisalhamento, bem como as deformações lineares e angulares, podem ser expressas na forma de mapas de cores. Para a análise de falha de material dútil é desejável apresentar também o diagrama de cores da distribuição de tensão de von Mises.

4.1.7.6. *Reações de apoio.* As reações nos apoios são obtidas conforme o indicado na Seção 3.2.4.4. Caso se adote a primeira alternativa, o apoio estando num nó comum a dois elementos (por exemplo, os elementos  $e$  e  $e + 1$ ), recorre-se à Eq. 3.58 para se determinar  $Q_3^e$  ou  $Q_4^e$  e  $Q_1^e$  ou  $Q_2^e$  e depois empregá-los na condição de equilíbrio e obter a reação nesse apoio.

## 4.2. Elementos de treliça e de pórtico

Numa treliça ou estrutura reticulada, Fig. 4.13, as peças podem assumir diversas direções. Como a matriz de rigidez e os vetores de deslocamento e de carregamento são definidos para um sistema de coordenadas orientadas localmente em relação ao elemento, é necessário representá-los num sistema de coordenadas comum, denominado global, para que haja coerência física ao se montar a matriz de rigidez e os vetores de carregamento globais. Dita coerência diz respeito às componentes dos vetores<sup>2</sup> de deslocamento e esforço nodais dos elementos da malha, que só podem ser corretamente adicionadas se referidas todas a um mesmo sistema de coordenadas, o sistema de coordenadas globais. A Fig. 4.14 ilustra os sistemas de coordenadas locais e globais. A exigência de um sistema de coordenadas comum leva a representações das matrizes locais nesse sistema comum, obtidas por meio de transformações, mostradas a seguir.

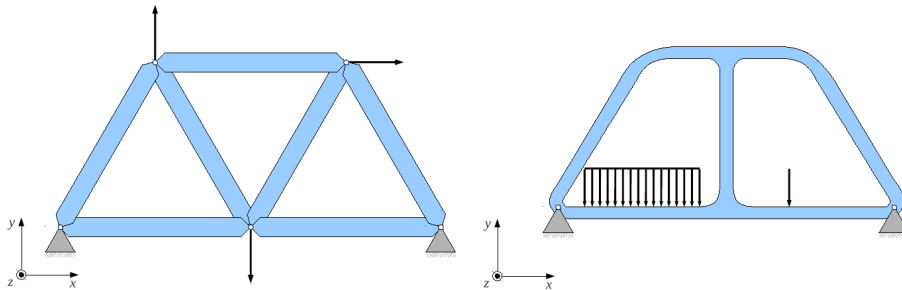


FIGURA 4.13. Treliça (esquerda) e pórtico (direita).

**4.2.1. Transformação de coordenadas.** Considere na Fig. 4.14 o vetor  $\vec{v}$  e suas componentes no sistema de coordenadas cartesianas globais  $xyz$ , orientadas positivamente. O sistema de coordenadas locais,  $\bar{x}\bar{y}\bar{z}$ , apresentado na mesma figura, tem em comum com o primeiro sistema o eixo  $\bar{z} = z$ , ou seja, o par de eixos  $\bar{x}$  e  $\bar{y}$  são coplanares aos eixos  $x$  e  $y$ .

Com a auxílio da Fig. 4.14, a decomposição das componentes  $v_x$ ,  $v_y$  e  $v_z$  no sistema local leva respectivamente a:

$$v_{\bar{x}} = v_x \cos \alpha + v_y \sin \alpha \quad (4.46a)$$

<sup>2</sup>Vetor aqui deve ser interpretado no sentido estrito de segmento orientado no espaço com magnitude, direção e sentido.

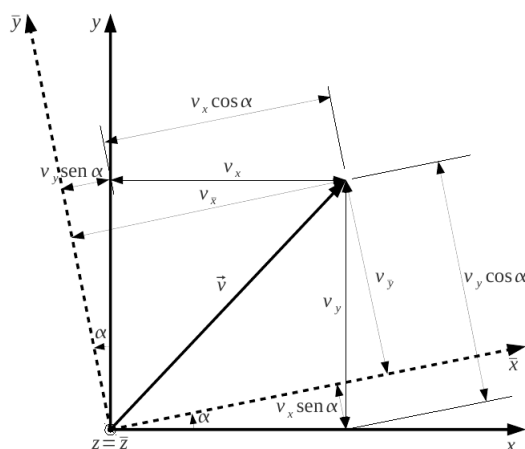


FIGURA 4.14. Sistemas de coordenadas locais (traço pontilhado) e globais (traço cheio).

$$v_{\bar{y}} = -v_x \operatorname{sen} \alpha + v_y \cos \alpha \quad (4.46b)$$

$$v_{\bar{z}} = v_z \quad (4.46c)$$

ou matricialmente:

$$\begin{Bmatrix} v_{\bar{x}} \\ v_{\bar{y}} \\ v_{\bar{z}} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \alpha & \operatorname{sen} \alpha & 0 \\ -\operatorname{sen} \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{Bmatrix} \quad (4.47)$$

ou ainda, compactamente:

$$\{\bar{v}\} = [T]\{v\} \quad (4.48)$$

A transformação inversa, i. e., do sistema local para o global é suscintamente:

$$\{v\} = [T]^T \{\bar{v}\} \quad (4.49)$$

onde  $[T]^T = [T]^{-1}$ .

4.2.1.1. *Transformação da matriz coluna de esforços ou deslocamentos nodais de um elemento.* Considere a matriz coluna local de esforços ou deslocamentos nodais de um elemento, lembrando as Eq. 4.4 e 4.9. Cada trinca de componentes nodais é formada pelas componentes de um vetor, que são transformadas conforme a Eq. 4.49. Assim sendo, a matriz coluna global de esforços ou deslocamentos nodais desse elemento pode ser escrita como:

$$\begin{Bmatrix} \{U_1^e\} \\ \{U_2^e\} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} [T_1^e]^T & [0] \\ [0] & [T_2^e]^T \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{\bar{U}_1^e\} \\ \{\bar{U}_2^e\} \end{Bmatrix} \quad (4.50)$$

ou simplesmente:

$$\{U^e\} = [T^e]^T \{\bar{U}^e\} \quad (4.51)$$

onde:

$$\{U^e\} = \begin{Bmatrix} \{U_1^e\} \\ \{U_2^e\} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} U_1^e \\ U_2^e \\ U_3^e \\ U_4^e \\ U_5^e \\ U_6^e \end{Bmatrix} \quad (4.52)$$

e:

$$[T^e] = \begin{bmatrix} [T_1^e]^T & [0] \\ [0] & [T_2^e]^T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \alpha & \text{sen } \alpha & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\text{sen } \alpha & \cos \alpha & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cos \alpha & \text{sen } \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\text{sen } \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (4.53)$$

4.2.1.2. *Transformação da matriz de rigidez de um elemento.* Considere o modelo de elementos finitos de um elemento de viga qualquer expresso no sistema de coordenadas locais, Eq. 4.23<sup>3</sup>. Pré-multiplicando ambos os membros desta equação pela matriz de transformação transposta do elemento,  $[T^e]^T$ , e substituindo  $\{\bar{U}^e\}$ ,  $\{\bar{f}^e\}$  e  $\{\bar{Q}^e\}$  por  $[T^e]\{U^e\}$ ,  $[T^e]\{f^e\}$  e  $[T^e]\{Q^e\}$ , respectivamente, obtém-se:

$$[T^e]^T [\bar{K}^e] [T^e] \{U^e\} = [T^e]^T (\{\bar{f}^e\} + \{Q^e\}) \quad (4.54)$$

da qual se identificam, expressos no sistema de coordenadas globais, a matriz de rigidez do elemento:

$$[K^e] = [T^e]^T [\bar{K}^e] [T^e] \quad (4.55)$$

e as matrizes colunas de carregamento:

$$\{f^e\} = [T^e]^T \{\bar{f}^e\} \quad (4.56)$$

$$\{Q^e\} = [T^e]^T \{\bar{Q}^e\} \quad (4.57)$$

Uma vez que se obtêm os modelos locais de todos os elementos, procede-se do modo habitual para formar o modelo global de elementos finitos.

**4.2.2. Elemento de treliça.** A figura abaixo, Fig. 4.15, mostra um elemento de treliça. O seu modelo local de elementos finitos é o que segue:

$$\frac{A_e E_e}{h_e} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{U}_1^e \\ 0 \\ \bar{U}_2^e \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \bar{F}_1^e \\ 0 \\ \bar{F}_2^e \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (4.58)$$

de onde se identificam imediatamente as matrizes de rigidez, de deslocamento e de carregamento no sistema de coordenadas locais.

Observe neste caso que cada deslocamento ou força nodal tem apenas duas componentes, segundo os eixos locais  $\bar{x}$  e  $\bar{y}$ . Por isso a matriz de rigidez é de dimensão  $4 \times 4$  e a dimensão das matrizes de deslocamento e de carregamento é

<sup>3</sup>Observe que as letras K, U, f e Q devem levar uma barra sobre si, porque se referem ao sistema de coordenadas locais.

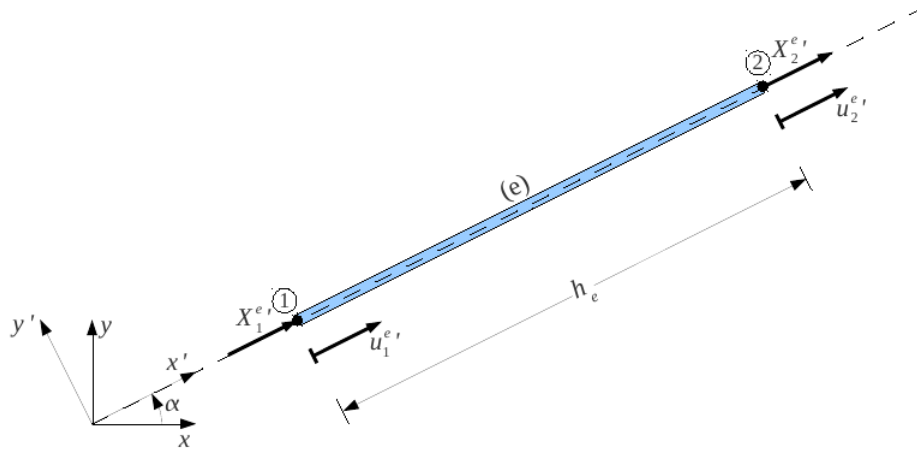


FIGURA 4.15. Elemento de treliça.

de  $4 \times 1$ . Consequentemente a matriz de transformação para este tipo de elemento escreve-se como:

$$[T^e] = \begin{bmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha & 0 & 0 \\ -\sin \alpha & \cos \alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos \alpha & \sin \alpha \\ 0 & 0 & -\sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix} \quad (4.59)$$

Para se obter as matrizes do elemento no sistema de coordenadas globais, procede-se segundo as Eqs. 4.55-4.57.

**4.2.3. Elemento de pórtico.** O elemento de pórtico, Fig. 4.16, é aquele sujeito à força axial e à flexão. Portanto, o seu modelo local de elementos finitos é formado pela sobreposição do modelo local de elemento de treliça <sup>4</sup> com o de viga de Euler-Bernoulli, o que resulta:

$$\frac{2E_e I_e}{h_e^3} \begin{bmatrix} \mu & 0 & 0 & -\mu & 0 & 0 \\ 0 & 6 & -3h_e & 0 & -6 & -3h_e \\ 0 & -3h_e & 2h_e^2 & 0 & 3h_e & h_e^2 \\ -\mu & 0 & 0 & \mu & 0 & 0 \\ 0 & -6 & 3h_e & 0 & 6 & 3h_e \\ 0 & -3h_e & h_e^2 & 0 & 3h_e & 2h_e^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{U}_1^e \\ \bar{U}_2^e \\ \bar{U}_3^e \\ \bar{U}_4^e \\ \bar{U}_5^e \\ \bar{U}_6^e \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \bar{f}_1^e \\ \bar{f}_2^e \\ \bar{f}_3^e \\ \bar{f}_4^e \\ \bar{f}_5^e \\ \bar{f}_6^e \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \bar{Q}_1^e \\ \bar{Q}_2^e \\ \bar{Q}_3^e \\ \bar{Q}_4^e \\ \bar{Q}_5^e \\ \bar{Q}_6^e \end{Bmatrix} \quad (4.60)$$

$$\text{com } \mu = \frac{A_e h_e^2}{2I_e},$$

$$\begin{Bmatrix} \bar{U}_1^e \\ \bar{U}_2^e \\ \bar{U}_3^e \\ \bar{U}_4^e \\ \bar{U}_5^e \\ \bar{U}_6^e \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \bar{u}_1^e \\ \bar{v}_1^e \\ \bar{\theta}_1^e \\ \bar{u}_2^e \\ \bar{v}_2^e \\ \bar{\theta}_2^e \end{Bmatrix} \quad (4.61)$$

e:

<sup>4</sup>Ajustado para as 6 componentes de deslocamento e de carregamento.

$$\begin{Bmatrix} \bar{Q}_1^e \\ \bar{Q}_2^e \\ \bar{Q}_3^e \\ \bar{Q}_4^e \\ \bar{Q}_5^e \\ \bar{Q}_6^e \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \bar{X}_1^e \\ \bar{Y}_1^e \\ \bar{M}_1^e \\ \bar{X}_2^e \\ \bar{Y}_2^e \\ \bar{M}_2^e \end{Bmatrix} \quad (4.62)$$

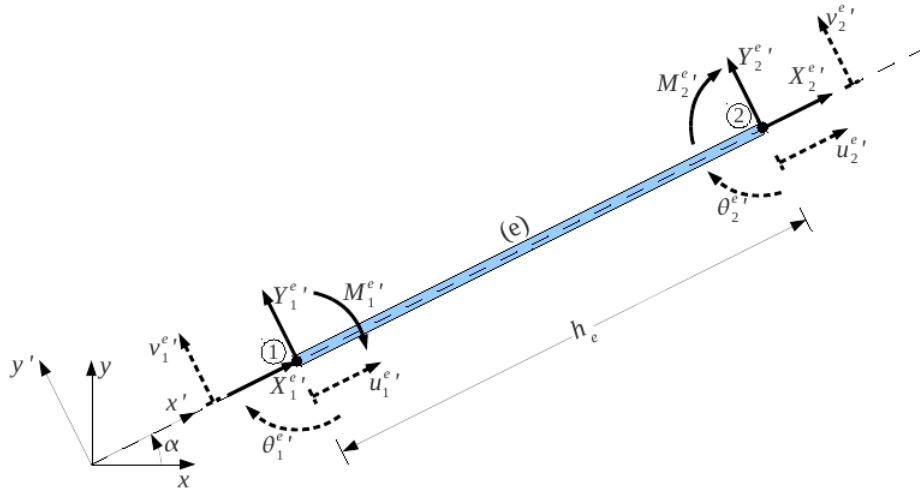


FIGURA 4.16. Elemento de pórtico.

Para se obter as matrizes do elemento no sistema de coordenadas globais, procede-se segundo as mesmas Eqs. 4.55-4.57. Neste caso, porém, a matriz de transformação de coordenadas é dada pela Eq. 4.53.



## Análise do erro

### 5.1. Introdução

O método dos elementos finitos é na sua essência um método aproximado. Como visto, ele deriva do método de Rayleigh-Ritz, empregando, como base finita de funções aproximadoras, polinômios definidos em sub-domínios denominados elementos e respeitando a regularidade mínima exigida pela forma fraca do problema analisado. A finitude dessa base de funções é a fonte teórica do erro de aproximação do MEF. Outras fontes, decorrente da implementação do método, originam-se na limitação dos cálculos aritméticos, da integração numérica e da representação do domínio. A seguir abordam-se estas fontes de erro, dando-se mais ênfase às relativas à aproximação da solução do problema.

**5.1.1. Erro de aproximação do domínio.** Quando se subdivide o domínio do problema em elementos, é comum, principalmente em problemas bi e tridimensionais, que o conjunto de elementos não coincida com o domínio original, conforme ilustra a Fig.5.1. Além disso, quando, por exemplo, se representa uma estrutura reticulada, os elementos não representam fidedignamente as junções entre os componentes estruturais. Tenha-se em mente, por exemplo, a extremidade de uma barra de treliça na qual existe um furo pelo qual se une a um pino de articulação. O elemento de treliça não representa bem o campo de deformação e tensão nessa região do componente.

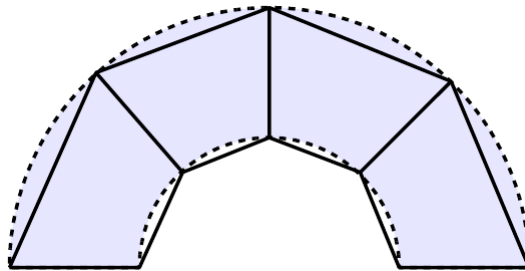


FIGURA 5.1. Erro de aproximação de domínio.

**5.1.2. Erro de integração numérica.** No MEF não se emprega a integração exata das integrais envolvidas nele. Apesar de no integrando haver um polinômio, nem sempre ele aparece só, além do que, do ponto de vista da programação computacional, para cada integrando dever-se-ia ter uma rotina de cálculo específica, o que tornaria a codificação do MEF uma tarefa trabalhosa.

Este tema do erro de integração numérica será tratado num capítulo a parte. Basta aqui, portanto, dar uma ideia geral. A integração numérica consiste em aproximar a integral definida por uma somatória envolvendo o produto do valor do integrando em determinados pontos,  $f(x_i)$ , por pesos,  $w_i$ :

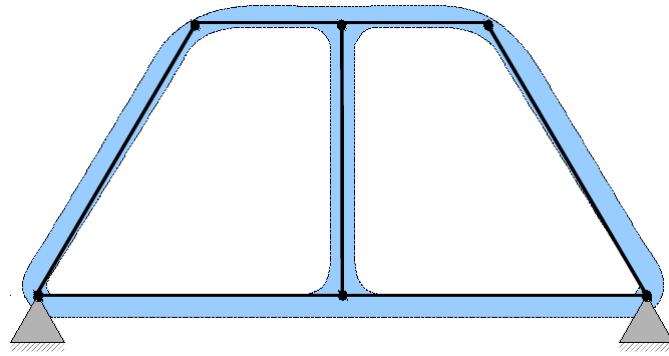


FIGURA 5.2. Erro de aproximação de domínio.

$$\int_{-1}^{+1} f(x) dx \approx \sum_{i=1}^N f(x_i) w_i \quad (5.1)$$

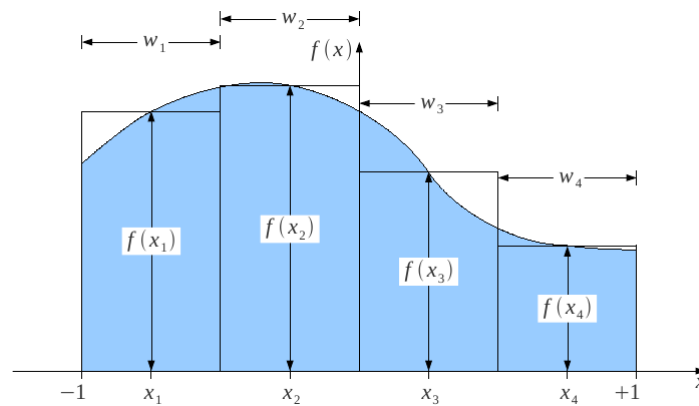


FIGURA 5.3. Erro de integração numérica.

**5.1.3. Erro de arredondamento.** As operações aritméticas realizadas internamente pelo computador estão limitadas a uma precisão ditada pelo número de algarismos utilizados na representação da mantissa de um número real. Nas linguagens de programação são comuns dois níveis de precisão em ponto flutuante na base 10: a precisão simples, que representa a mantissa do número com 7 algarismos, e a precisão dupla, cuja representação é com 15 algarismos.

A limitação da precisão acarreta erros de arredondamento ou de truncamento, conforme o computador, nas operações aritméticas, os quais podem se superpor nas sucessivas operações, levando a resultados díspares em relação aos exatos. Obviamente, quanto maior a precisão menor o erro acumulado ao longo das mesmas operações.

Para se ter uma ideia do erro de aproximação, tome-se como exemplo a seguinte operação aritmética realizada numa máquina idealizada com precisão de mantissa de 2 algarismos na base 10:

$$\begin{aligned}
100 \cdot \underbrace{(1.0 + 0.24)}_{=1.2} + 0.018 + 0.32 - 1.5 &= 100 \cdot \underbrace{(1.2 + 0.018)}_{=1.2} + 0.32 - 1.5 = \\
&= 100 \cdot \underbrace{(1.2 + 0.32)}_{=1.5} - 1.5 = 100 \cdot \underbrace{(1.5 - 1.5)}_{=0.0} = 0.0
\end{aligned}$$

enquanto a solução exata é 7.8.

Um outro exemplo é a solução do seguinte sistema de equações algébricas realizada por meio da mesma máquina idealizada:

$$\begin{cases} 1.0x + 1.0y = 2.0 \\ 0.023x - 0.50y = 0.25 \end{cases}$$

Multiplicando a segunda equação por 2.0 e somando à primeira obtém-se:

$$1.0x = 2.5$$

ou seja,  $x = 2.5$ . Substituindo agora  $x = 2.5$  na segunda equação, obtém-se  $y = -0.38$ . A solução do mesmo sistema, realizando as operações aritméticas com precisão de 15 algarismos na mantissa, é  $x = 2.39005736137667$  e  $y = -0.390057361376673$ . O erro aritmético relativo para o valor de  $x$  é de 4.6% e o de  $y$  é de 2.6%.

**5.1.4. Erro de aproximação.** Este tipo de erro decorre da aproximação da solução por meio da base finita de funções,  $u \approx u_h = \sum_{i=0}^N \phi_i u_i$ , inerente ao MEF, e que será a seguir aprofundado.

## 5.2. Medidas do erro de uma função

Para avaliar o erro de aproximação da solução obtida pelo MEF é necessário definir uma forma de medir esse erro.

O erro da solução obtida pelo MEF é uma função  $e = u - u_h$ . Para medir uma função é necessário definir uma medida. A medida, ou Norma, é um número real positivo atribuído às funções que permite comparar uma função a outra dentro de uma mesma métrica. A métrica é um padrão de medida que dá coerência e fundamenta esta comparação. Dentro das várias métricas existentes, vai-se apresentar aqui apenas algumas, suficientes para o propósito deste capítulo.

**5.2.1. Norma do supremo.** A norma do supremo estabelece a seguinte métrica:

$$\|e\|_{\infty} = \max_{x \in \Omega} |e| \quad (5.2)$$

ou seja, estabelece como medida de uma função o máximo valor dela no domínio  $\Omega$ .

**5.2.2. Norma  $L_2(\Omega)$  ou  $H^0(\Omega)$ .** Esta norma estabelece como medida de função a expressão:

$$\|e\|_0 = \left( \int_{\Omega} |e|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \quad (5.3)$$

ou seja, a raiz quadrada da integral no domínio  $\Omega$  do módulo ao quadrado da função.

**5.2.3. Norma da energia ou norma  $H^m(\Omega)$ .** Esta norma tem como métrica a expressão:

$$\|e\|_m = \left( \int_{\Omega} \sum_{i=0}^m \left| \frac{d^i}{dx^i} e \right|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \quad (5.4)$$

onde  $2m$  é a ordem do operador diferencial do problema a valores no contorno.

Observe que a norma  $L^2(\Omega)$  é um caso particular da norma da energia, quando  $m = 0$ . Além disso,  $\|e\|_m \leq \|e\|_n$ , com  $m < n$ , e a norma  $H^n(\Omega)$  carrega mais informações a respeito da função que a norma  $H^m(\Omega)$ .

### 5.3. Convergência da solução $u_h$

A solução  $u_h$  do MEF converge para a solução exata, segundo as normas  $L^2$  e da energia, respectivamente conforme os estimadores de erro:

$$\|e\|_m \leq Ch^p, \quad p = k + 1 \quad (5.5a)$$

$$\|e\|_m \leq Ch^p, \quad p = k - m + 1 > 0 \quad (5.5b)$$

onde  $C$  é uma constante,  $h = \text{máx}\{h_e\}$  é o *comprimento característico da malha* e  $p$  é a *taxa de convergência*, que depende da ordem  $2m$  do operador diferencial do problema a valores no contorno e do grau  $k$  do polinômio da função de forma.

O estimador de erro acima é *a priori*. Mais que quantitativamente, ele dá uma noção qualitativa do comportamento do erro. Dele podem-se inferir as providências a serem tomadas no sentido de aumentar a precisão do MEF:

- (1) diminuir o tamanho característico  $h$  da malha;
- (2) aumentar o grau do polinômio  $k$  das funções de forma.

No primeiro caso tem-se o refinamento  $h$ , no segundo, o refinamento  $p$  ou, ao se aplicar simultaneamente ambos, o refinamento  $hp$ .

Observe pelos estimadores acima, Eq. 5.5, que a taxa de convergência aumenta com o grau do polinômio  $k$  da função de forma. Por outro lado, se  $k + 1 \leq m$ , o estimador na norma da energia revela que a solução pelo MEF não converge, ou seja, o grau  $k$  do polinômio das funções de forma deve ser no mínimo igual a  $m$  para que a solução pelo MEF convirja, a parte da exigência de continuidade  $C^{m-1}(\Omega)$  da aproximação.

Os estimadores de erro acima são função de  $h$ . Posto isto num sistema de coordenadas logarítmicas, observa-se que o comportamento do erro se aproxima assintoticamente de uma reta de inclinação igual à taxa de convergência  $p$ , conforme ilustra a Fig. 5.4.

### 5.4. Aproximação da solução $u_h$

Uma propriedade da solução pelo MEF é que ela tem a norma da energia sempre maior que a da solução exata. Dito de outro modo, no MEF a convergência da solução aproximada para a exata na norma da energia se dá por cima, isto é, a solução exata minimiza a energia.

A título de demonstração, considere a seguinte equação diferencial de ordem  $2m$ :

$$\sum_{i=0}^m (-1)^i \frac{d^i}{dx^i} \left( a_i \frac{d^i}{dx^i} u \right) = f, \quad 0 < x < L \quad (5.6)$$

com  $a_1(x)$  e  $a_2(x)$  supostos positivos, cujo funcional correspondente a ela é:

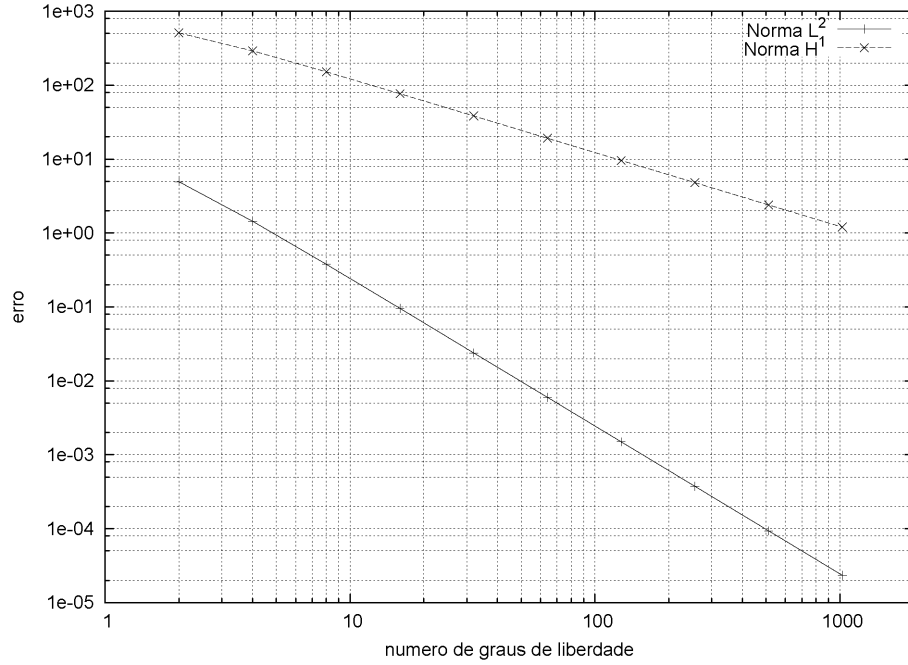


FIGURA 5.4. Erro da solução nas normas  $L^2(\Omega)$  e da energia: a taxa de convergência é ditada pela inclinação das curvas.

$$I(v) = \int_0^L \frac{1}{2} \left[ \sum_{i=0}^m a_i \left( \frac{d^i}{dx^i} v \right)^2 \right] dx - \int_0^L v f dx \quad (5.7)$$

Sejam  $u$  a solução exata e  $u_h$  a solução pelo MEF, ambas satisfazendo as condições de contorno essenciais do problema. Para simplificar a obtenção do resultado que se segue, tome-se  $m = 1$ , ou seja:

$$f = -\frac{d}{dx} \left( a_1 \frac{d}{dx} u \right) \quad (5.8)$$

Então a diferença entre os funcionais de  $u_h$  e de  $u$  se escreve:

$$I(u_h) - I(u) = \int_0^L \frac{1}{2} \left[ a_1 \left( \frac{d}{dx} u_h \right)^2 - a_1 \left( \frac{d}{dx} u \right)^2 + 2f(u - u_h) \right] dx \quad (5.9)$$

$$= \int_0^L \frac{a_1}{2} \left[ \left( \frac{d}{dx} u_h \right)^2 - \left( \frac{d}{dx} u \right)^2 \right] dx - \int_0^L \frac{d}{dx} \left( a_1 \frac{d}{dx} u \right) (u - u_h) dx \quad (5.10)$$

onde a integral foi desmembrada no termo em  $f$ , que foi substituído pela Eq. 5.8. Integrando por partes a segunda integral à direita vem:

$$I(u_h) - I(u) = \int_0^L \frac{a_1}{2} \left[ \left( \frac{d}{dx} u_h \right)^2 - \left( \frac{d}{dx} u \right)^2 \right] dx + \int_0^L a_1 \frac{d}{dx} u \frac{d}{dx} (u - u_h) dx \quad (5.11)$$

Nesta última passagem, o termo no contorno foi cancelado, pois  $(u - u_h)|_0^L = 0$ , como observado acima. Agrupando as integrais novamente obtém-se:

$$I(u_h) - I(u) = \int_0^L \frac{a_1}{2} \left[ \left( \frac{d}{dx} u_h \right)^2 + \left( \frac{d}{dx} u \right)^2 - 2 \frac{d}{dx} u \frac{d}{dx} u_h \right] dx \quad (5.12)$$

$$= \int_0^L \frac{a_1}{2} \left( \frac{d}{dx} u_h - \frac{d}{dx} u \right)^2 dx \geq 0 \quad (5.13)$$

De onde se conclui que  $I(u_h) \geq I(u)$ , ou seja, a norma da energia é mínima na solução exata e a convergência à solução exata ocorre por cima.

### 5.5. Erro nodal nulo

No caso de problemas de 2<sup>a</sup> e 4<sup>a</sup> ordens de uma única variável independente e coeficientes constantes, o valor nodal obtido pelo MEF é igual ao exato, ou seja, *o erro nodal é nulo*.

## Integração numérica e implementação computacional

### 6.1. Integração numérica

**6.1.1. Introdução.** No MEF é comum ter-se que integrar funções que não são facilmente integráveis, demandando o recurso a *integrações ou (quadraturas) numéricas*.

A quadratura numérica parte da aproximação do integrando por meio de polinômios de grau tanto maior quanto maior precisão se queira. Além de serem bons aproximadores, os polinômios são facilmente integráveis. Por exemplo, seja  $f(x)$  a função a integrar no intervalo  $[a, b]$ . Aproximando  $f$  aí por meio de um conjunto completo de polinômios de grau  $p$ :

$$f(x) \approx F(x) = \sum_{k=1}^p F_k \psi_k \quad (6.1)$$

a integral aproximada de  $f$  seria, portanto:

$$I = \sum_{k=1}^p F_k \int_a^b \psi_k dx = \sum_{k=1}^p F_k W_k \quad (6.2)$$

com:

$$W_k = \int_a^b \psi_k dx \quad (6.3)$$

De modo geral, ao realizar a quadratura numérica os extremos de integração são padronizados de  $-1$  a  $+1$  para simplificação e generalização da fórmula de quadratura. Por exemplo, na integral anterior, para realizar a quadratura numérica seria preciso fazer uma transformação de tal modo que o novo intervalo de integração fosse  $[-1, +1]$  e assim permitisse o emprego de uma fórmula de quadratura:

$$I = \int_a^b f(x) dx = \int_{-1}^{+1} g(\xi) d\xi \quad (6.4)$$

A seguir será visto como realizar esta transformação de coordenadas. A fórmula da quadratura numérica, concretamente a *quadratura de Gauss-Legendre (ou de Gauss)*, será vista após esta.

**6.1.2. Coordenadas naturais e o elemento mestre.** Seja  $x : \xi \mapsto x(\xi)$  uma transformação bijetora que mapeia o intervalo  $[-1, +1]$  em  $[a, b]$ , conforme ilustra a Fig. ???. A coordenada  $\xi$  denomina-se de *coordenada natural*. Além do mais, exige-se desta transformação que  $x(-1) = a$  e  $x(+1) = b$ . Por ser bijetora, ela possui uma transformação inversa  $x^{-1}$  fazendo o mapeamento no sentido contrário.

O emprego da coordenada natural convém ao MEF porque permite trabalhar com o *elemento mestre* definido no intervalo  $[-1, +1]$ , possibilitando realizar qualquer aproximação em qualquer elemento físico a partir de um único conjunto de

funções de forma, como será visto mais adiante. Além disso, toda integração numérica realizada no domínio mestre pode ser feita diretamente pela fórmula da quadratura numérica, porque o intervalo de integração já é o apropriado.

Especialmente fáceis de obter no domínio mestre são as funções de forma da família de elementos finitos lagrangeanos:

$$\widehat{\Psi}_i(\xi) = \frac{(\xi - \xi_1)(\xi - \xi_2) \cdots (\xi - \xi_{i-1})(\xi - \xi_{i+1}) \cdots (\xi - \xi_{N-1})(\xi - \xi_N)}{(\xi_i - \xi_1)(\xi_i - \xi_2) \cdots (\xi_i - \xi_{i-1})(\xi_i - \xi_{i+1}) \cdots (\xi_i - \xi_{N-1})(\xi_i - \xi_N)} \quad (6.5)$$

com  $-1 = \xi_1 < \xi_2 < \xi_3 < \cdots < \xi_N = +1$ . Estas funções verificam tanto a propriedade partição da unidade como a delta de Kronecker, cuja comprovação é imediata a partir da definição. O quadro da Tab. 6.1 ilustra algumas funções de forma da família lagrangeana.

Linear	$N = 2$	$\widehat{\Psi}_1 = \frac{1}{2}(1 - \xi)$ $\widehat{\Psi}_2 = \frac{1}{2}(1 + \xi)$
Quadrática	$N = 3$	$\widehat{\Psi}_1 = -\frac{1}{2}\xi(1 - \xi)$ $\widehat{\Psi}_2 = (1 + \xi)(1 - \xi)$ $\widehat{\Psi}_3 = \frac{1}{2}\xi(1 + \xi)$
Cúbica	$N = 4$	$\widehat{\Psi}_1 = -\frac{9}{16}(1 - \xi)\left(\frac{1}{3} + \xi\right)\left(\frac{1}{3} - \xi\right)$ $\widehat{\Psi}_2 = \frac{27}{16}(1 + \xi)(1 - \xi)\left(\frac{1}{3} - \xi\right)$ $\widehat{\Psi}_3 = \frac{27}{16}(1 + \xi)(1 - \xi)\left(\frac{1}{3} + \xi\right)$ $\widehat{\Psi}_4 = -\frac{9}{16}(1 + \xi)\left(\frac{1}{3} + \xi\right)\left(\frac{1}{3} - \xi\right)$

TABELA 6.1. Algumas funções de forma da família lagrangeana.

**6.1.3. Aproximação da geometria.** Viu-se que a quadratura numérica exige, na maior parte das vezes, uma transformação de coordenadas. Nesta seção vai-se ver a transformação entre a coordenada natural e a física por meio das funções de forma de elementos finitos do elemento mestre.

É conveniente empregar as funções de forma do elemento mestre para obter a transformação de coordenadas entre os dois sistemas, o natural e o físico, do seguinte modo:

$$x^e(\xi) = \sum_{i=1}^M \widehat{\Psi}_i^e(\xi) x_i^e \quad (6.6)$$

onde  $x_i^e$  é a coordenada física do nó  $i$  do elemento  $e$ . Esta transformação não preserva comprimento nem proporção de um para outro sistema, o que pode ser visto pelo jacobiano dela:

$$J^e(\xi) := \frac{d}{d\xi} x^e = \sum_{i=1}^M \frac{d}{d\xi} \widehat{\Psi}_i^e(\xi) x_i^e \quad (6.7)$$



Assim o diferencial de primeira ordem de  $x^e$  se escreve:

$$dx^e = J^e(\xi)d\xi \quad (6.8)$$

A título de exemplo, considere a transformação de um elemento linear de coordenadas físicas nodais  $x_1^e$  e  $x_2^e$ :

$$x^e = \frac{1}{2}(1 - \xi)x_1^e + \frac{1}{2}(1 + \xi)x_2^e$$

O seu jacobiano será, portanto:

$$J^e = \frac{x_2^e - x_1^e}{2} = \frac{h_e}{2}$$

**6.1.4. Formulação isoparamétrica.** Assim como a transformação de coordenadas, a variável dependente  $u$  pode ser aproximada por meio das funções de forma do elemento mestre:

$$u^e(\xi) = \sum_{i=1}^N \Psi_i(\xi) u_i^e \quad (6.9)$$

Note-se a distinção proposital entre  $\Psi_i$  e  $\widehat{\Psi}_i$ , o primeiro relativo à variável dependente e o segundo à geometria. Graças à propriedade delta de Kronecker da família de funções lagrangeanas, a aproximação acima é um interpolante de  $u$  no elemento mestre, ou seja,  $u(\xi_i) = u_i^e$ . Consequentemente, a condição de continuidade entre elementos é preservada, como exige o MEF.

Quando tanto a geometria como a variável dependente empregam as funções de forma do elemento mestre correspondente, pode ocorrer o que se indica na Tab. 6.2, conforme o número de nós que se empregam em um e outro. No caso da formulação iso-paramétrica,  $\Psi_i^e \equiv \widehat{\Psi}_i^e$ .

Formulação	Condição
Sub-paramétrica	$M < N$
Iso-paramétrica	$M = N$
Super-paramétrica	$M > N$

TABELA 6.2. Classificação das formulações de elementos finitos.

**6.1.5. Integração numérica: a quadratura de Gauss-Legendre.** Como visto anteriormente, a quadratura numérica procura aproximar o integrando de uma função qualquer por meio de um polinômio. Na quadratura de Gauss-Legendre (ou Gauss) os polinômios empregados são o de Legendre.

A fórmula da quadratura de Gauss-Legendre é:

$$\int_a^b f(x) dx = \int_{-1}^{+1} F(\xi) d\xi = \sum_{k=1}^r F(\xi_k) w_k \quad (6.10)$$

onde  $\xi_k$  e  $w_k$  são respectivamente os pontos e pesos de integração, e:

$$F(\xi) = f(x(\xi))J(\xi) \quad (6.11)$$

Os pontos e pesos de integração são normalmente tabelados para cada valor do parâmetro  $r$ , o número de pontos de integração. A Tab. 6.3 fornece os pontos e pesos da quadratura de Gauss-Legendre para alguns valores de  $r$ . Observe nela a simetria dos pontos de integração e dos pesos.

O parâmetro  $r$  dita o grau máximo de polinômios cujas integrais podem ser exatamente determinadas pela quadratura de Gauss-Legendre. Ou, dito de outra forma, dado um polinômio de grau  $p$ , pode-se obter o número mínimo de pontos de integração necessário para a sua integração exata por meio desta quadratura. Tal  $r$  é o resultado da *divisão inteira* de  $p$  por 2 acrescido de 1, ou seja:

$$r_{\text{mín}} = \frac{p}{2} + 1 \quad (6.12)$$

Por exemplo, para integrar exatamente um polinômio de grau 2 basta empregar  $r \geq 2$ , para um de grau 3,  $r \geq 2$ , também.

Número de pontos	$x_k$	$w_k$
1	+0,000000000	2,000000000
2	-0,5773502691 +0,5773502691	1,000000000 1,000000000
3	-0,7745966692 +0,000000000 +0,7745966692	0,555555555 0,888888888 0,555555555
4	-0,8611363115 -0,3399810435 +0,3399810435 +0,8611363115	0,3478548451 0,6521451548 0,6521451548 0,3478548451
5	-0,9061798459 -0,5384693101 +0,000000000 +0,5384693101 +0,9061798459	0,2369268850 0,4786286704 0,568888888 0,4786286704 0,2369268850
6	-0,9324695142 -0,6612093864 -0,2386191860 +0,2386191860 +0,6612093864 +0,9324695142	0,1713244923 0,3607615730 0,4679139345 0,4679139345 0,3607615730 0,1713244923

TABELA 6.3. Pontos e pesos de integração para a quadratura de Gauss-Legendre.

A título de exemplo, considere a integral:

$$I = \int_{-1}^{+1} \xi^6 d\xi = \frac{2}{7} = 0,2857142857$$

cujos resultados exatos são . Para integrá-la exatamente pela quadratura de Gauss-Legendre se requer pelo menos:

$$r = \frac{6}{2} + 1 = 4$$

pontos de integração:

$$\begin{aligned} I &= \sum_{k=1}^4 \xi_k^6 w_k \\ &= (-0,8611343116)^6 \cdot 0,03478548451 + (-0,3399810435)^6 \cdot 0,6521451548 + \\ &\quad + (+0,3399810435)^6 \cdot 0,6521451548 + (+0,8611343116)^6 \cdot 0,03478548451 \\ &= 0,2857142857 \end{aligned}$$

Portanto, o resultado é exato, como se esperava.

Veja-se esta outra integral:

$$I = \int_{-1}^{+1} \xi^8 d\xi = \frac{2}{9} = 0,2222222222$$

Para obter o valor exato dela pela quadratura de Gauss-Legendre se requer ao menos:

$$r = \frac{8}{2} + 1 = 5$$

pontos de integração. Logo, se se empregam 4 pontos de integração:

$$\begin{aligned} I &= \sum_{k=1}^4 \xi_k^8 w_k \\ &= (-0,8611343116)^8 \cdot 0,03478548451 + (-0,3399810435)^8 \cdot 0,6521451548 + \\ &\quad + (+0,3399810435)^8 \cdot 0,6521451548 + (+0,8611343116)^8 \cdot 0,03478548451 \\ &= 0,2106122449 \end{aligned}$$

resultará um erro de aproximadamente 5%. E se se empregam 3 pontos:

$$\begin{aligned} I &= \sum_{k=1}^3 \xi_k^8 w_k \\ &= (-0,7745966692)^8 \cdot 0,5555555556 + (+0,7745966692)^8 \cdot 0,5555555556 \\ &= 0,1439999999 \end{aligned}$$

Como se nota, comete-se um erro de aproximadamente 35%.

**6.1.6. Estimativa do erro da quadratura de Gauss-Legendre.** Define-se o erro da quadratura de Gauss como:

$$e = \left| \int_a^b f(x) dx - \sum_{k=1}^r F(\xi_k) w_k \right| \quad (6.13)$$

onde  $F(\xi) = f(x(\xi)) \frac{h}{2}$ , com  $h = b - a$ .

Um estimador de erro da quadratura de Gauss-Legendre é:

$$e \leq c_r h^{2r+1} f^{2r}(\bar{x}) \quad (6.14)$$

onde  $f^{2r}$  é a  $2r$ -ésima derivada de  $f$ ,  $\bar{x} \in [a, b]$  e:

$$c_r = 2 \frac{(r!)^4}{(2r+1) [(2r)!]^3} \quad (6.15)$$

A Tab. 6.4 traz os valores do fator  $c_r$  para  $r$  variando de 1 a 10, para que se tenha uma ideia de quanto este fator influencia no erro da quadratura de Gauss-Legendre.

$r$	$c_r$
1	8,3E-02
2	4,6E-04
3	9,9E-07
4	1,1E-09
5	7,9E-13
6	3,8E-16
7	1,3E-19
8	3,4E-23
9	7,0E-27
10	1,1E-30

TABELA 6.4. Valores do fator  $c_r$  para  $r$  de 1 até 10.

**COMENTÁRIO 6.1.** Observe que o erro diminui à medida que se diminui o comprimento  $h$  do intervalo de integração. Logo, ao se diminuir o comprimento característico da malha, o erro de integração reduz-se na razão dos dois comprimentos elevada à  $2r$ -ésima potência. Por exemplo, ao passar da malha 1, onde o comprimento característico é  $h_1$ , para a malha 2, onde  $h_2 = \frac{1}{2} h_1$ , estima-se que o erro da quadratura realizada em ambas as malhas com  $r = 3$  caia de  $2^7$  vezes. Se, além disso, o número de pontos de integração passa de 3 para 5 entre as duas malhas, o erro da quadratura cai ainda mais, da ordem de  $2^{11}$  vezes.

O termo  $f^{2r}(\bar{x})$  é uma incógnita. Apenas se pode estimá-lo. Contudo, ele serve de alerta ou de orientação, quanto às providências a serem tomadas, na quadratura de funções singulares ou quase singulares no intervalo de integração.

**6.1.7. O modelo local de elementos finitos no elemento mestre.** É frequente, principalmente em problemas bi e tridimensionais, expressar a função de forma e a geometria no sistema de coordenadas naturais. Com isto as funções de forma são as mesmas para o elemento mestre e as quadraturas podem ser realizadas imediatamente, sem a necessidade de novas transformações de coordenadas. No entanto, é necessário rescrever as integrais da forma fraca em coordenada natural.

Considere, por exemplo, a obtenção dos coeficientes da matriz de rigidez:

$$K_{ij}^e = \int_{x_1^e}^{x_N^e} a(x) \frac{d}{dx} \psi_i^e \frac{d}{dx} \psi_j^e dx \quad (6.16)$$

Observe acima que  $\psi_i^e(x) = \Psi_i(\xi(x))$ . Da regra da cadeia tem-se, portanto:

$$\frac{d}{dx} \psi_i^e = \frac{d}{d\xi} \Psi_i \frac{d}{dx} \xi = \frac{1}{J^e} \frac{d}{d\xi} \Psi_i \quad (6.17)$$

Logo, com o auxílio da Eq. 6.8, a Eq. 6.16 se rescreve como:

$$K_{ij}^e = \int_{-1}^{+1} A(\xi) \frac{1}{J^e} \frac{d}{d\xi} \Psi_i \frac{d}{d\xi} \Psi_j d\xi \quad (6.18)$$

onde  $A(\xi) = a(x(\xi))$ .

Finalmente, aplicando a quadratura de Gauss-Legendre a esta última integral, tem-se:

$$K_{ij}^e = \sum_{k=1}^r F_{ij}^e(\xi_k) w_k \quad (6.19)$$

com:

$$F_{ij}^e(\xi) = A(\xi) \frac{1}{J^e} \frac{d}{d\xi} \Psi_i^e \frac{d}{d\xi} \Psi_j^e \quad (6.20)$$

**6.1.8. Número de pontos de integração necessários para obter os coeficientes das matrizes.** Sejam os coeficientes das matrizes de rigidez e de massa e os do vetor de carregamento distribuído, respectivamente,  $K_{ij}^e$ ,  $M_{ij}^e$  e  $f_i^e$ . Estes podem ser obtidos exatamente pela quadratura de Gauss-Legendre, desde que o jacobiano seja constante no elemento e os respectivos coeficientes,  $a$ ,  $c$  e  $f$ , também, do contrário, não. No elemento mestre linear, por exemplo, considerando  $a$ ,  $c$  e  $f$  constantes, o integrando em  $K_{ij}^e$  é uma constante, em  $M_{ij}^e$  é um polinômio do segundo grau, e, em  $f_i^e$ , um de primeiro grau. Logo, pela Eq. 6.13, o primeiro requer pelo menos  $r = 1$  pontos de integração, o segundo  $r = 2$  e o último  $r = 1$ . A Tab. 6.5 mostra o número mínimo de pontos de integração necessário para se obter valores exatos desses três coeficientes pela quadratura de Gauss-Legendre em elementos lineares, quadráticos e cúbicos nessas condições ideais.

Tipo de elemento	$K_{ij}^e$	$M_{ij}^e$	$f_i^e$
Linear	1	2	1
Quadrático	2	3	2
Cúbico	3	4	3

TABELA 6.5. Número mínimo de pontos de integração na quadratura de Gauss-Legendre.

Se os coeficientes  $a$ ,  $c$  e  $f$  ou o jacobiano não forem mais constantes no elemento, não se pode garantir o resultado exato das integrais pela quadratura de Gauss-Legendre. Neste caso, deve-se empregar números de pontos de integração maiores do que aqueles indicados na Tab. 6.5. Quanto maiores?, é o bom senso e a experiência do usuário que vão dizer.

## 6.2. Implementação computacional do MEF

A implementação computacional do MEF leva em conta uma subdivisão de tarefas dispostas na seguinte sequência cronológica e lógica: *pré-processamento*, *processamento* e *pós-processamento*. No primeiro ocorrem a entrada dos dados e toda manipulação prévia deles para a geração do modelo de elementos finitos: dados da malha e dos elementos, propriedades físicas e geométricas, condições de contorno ou iniciais e carregamentos. Nesta etapa, dependendo do nível de sofisticação, a entrada de dados pode ser realizada por meio de interface gráfica. É comum aqui armazenar o dados para futuras análises do modelo. No processamento todos os cálculos inerentes ao MEF são realizados. Desde a obtenção das matrizes e vetores, coeficiente a coeficiente, imposição das condições de contorno ou iniciais, rearranjo das matrizes e vetores, terminando com a solução do sistema de equações algébricas. Alguns resultados podem ser armazenados para posteriores análises. Finalmente, o pós-processamento, etapa em que os valores nodais obtidos na fase anterior são dispostos de modo a facilitar a análise dentro do escopo do fenômeno

físico abordado. Tem-se desde resultados apresentados em forma tabular, passando por plotagens de gráficos dos mais variados tipos, mapas de cores, e, nos mais sofisticados, chegando até a modelos tridimensionais animados graficamente. A Fig. 6.1 mostra o fluxo de processamento de um código MEF.

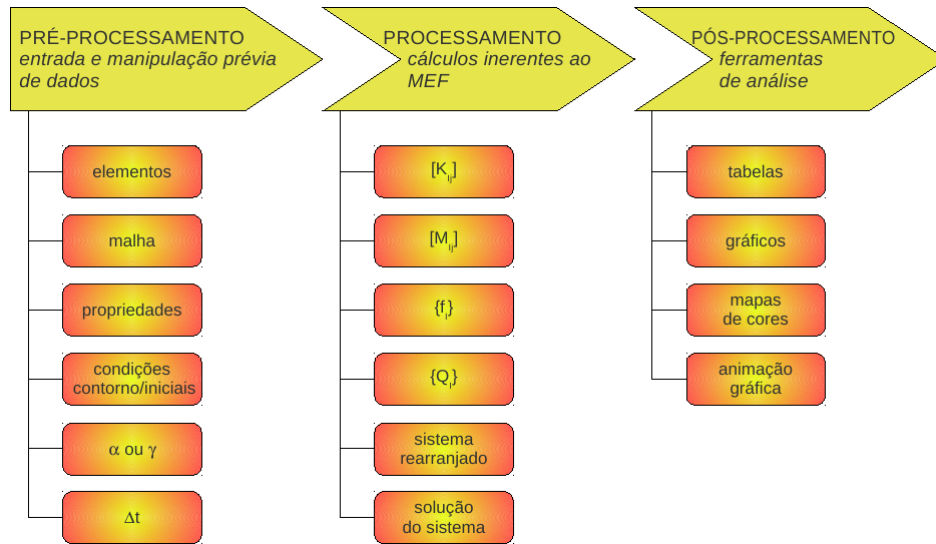


FIGURA 6.1. Fluxo de processamento de um código MEF.

## Problemas de auto-valor e dependentes do tempo

### 7.1. Introdução

Neste capítulo são abordados os problemas de auto-valor e os dependentes do tempo. O primeiro tipo é comum na análise modal de vibração mecânica dos corpos, bem como em algumas problemas de transferência de calor e de flambagem. O segundo envolve a resposta transiente dos fenômenos físicos descritos por meio de um problema a valores no contorno e a condições iniciais.

### 7.2. Problemas de auto-valor

De forma geral o problema de auto-valor trata de determinar o par  $(\lambda, u)$  tal que verifique:

$$A(u) = \lambda B(u) \quad (7.1)$$

sob certas restrições impostas. Os símbolos  $A$  e  $B$  representam operadores lineares aplicados sobre um espaço vetorial. No caso presente, estes operadores são operadores diferenciais lineares como, por exemplo, na seguinte equação diferencial:

$$-\frac{d^2}{dx^2} u = \lambda u \quad (7.2)$$

onde  $A = \frac{d^2}{dx^2} u$ ,  $B$  é o operador diferencial identidade  $\frac{d^0}{dx^0} u = u$  e  $u$  é um elemento de um determinado espaço de função.

### 7.3. Formulação dos problemas de auto-valor

Sem perda de generalidade, considere a equação diferencial que rege o movimento axial de uma barra:

$$-\rho A \frac{\partial^2}{\partial t^2} u + \frac{\partial}{\partial x} \left( EA \frac{\partial}{\partial x} u \right) = q(x, t) \quad (7.3)$$

onde  $t$  é o tempo e  $\rho$  é a densidade do material da barra. Admitindo a separação de variável:

$$u(x, t) = U(x)T(t) \quad (7.4)$$

resulta após substituição na forma homogênea da Eq. 7.3 e um rearranjo dos termos:

$$\frac{1}{T} \frac{d^2}{dt^2} T = \frac{1}{\rho A U} \frac{d}{dx} \left( EA \frac{d}{dx} U \right) \quad (7.5)$$

Esta última igualdade para todo  $x$  e  $t$  só pode ocorrer se e somente se ambas forem iguais a uma constante, e, para que seja fisicamente consistente, uma constante negativa, a qual será denotada por  $-\omega^2$ .

Resultam duas novas equações diferenciais. A primeira delas é:

$$\frac{d^2}{dt^2} T + \omega^2 T = 0 \quad (7.6)$$

cuja solução é  $T = T_1 e^{-i\omega t} + T_2 e^{i\omega t}$ , onde  $i$  é a unidade imaginária.

A outra equação é:

$$-\frac{d}{dx} \left( EA \frac{d}{dx} U \right) - \rho A \omega^2 U = 0 \quad (7.7)$$

que representa, juntamente com as condições de contorno, um problema de auto-valor. Seus auto-valores e correspondentes auto-vetores são respectivamente as frequências e modos naturais de vibrar da barra.

Por vias análogas, a equação do movimento transversal de uma viga:

$$\rho A \frac{\partial^2}{\partial t^2} v + \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left( EI \frac{\partial^2}{\partial x^2} v \right) = q(x, t) \quad (7.8)$$

resulta na forma separada:

$$\frac{1}{T} \frac{d^2}{dt^2} T = -\frac{1}{\rho A} \frac{1}{V} \frac{d^2}{dx^2} \left( EI \frac{d^2}{dx^2} V \right) = -\omega^2 \quad (7.9)$$

que leva a duas equações. Primeiro a uma idêntica à Eq. 7.6, e uma outra na forma de um problema de auto-valor:

$$\frac{d^2}{dx^2} \left( EI \frac{d^2}{dx^2} V \right) - \rho A \omega^2 V = 0 \quad (7.10)$$

O problema de flambagem de uma coluna também leva a um problema de auto-valor. Da análise do equilíbrio de uma coluna axialmente carregada sob compressão, à luz da teoria de Euler-Bernoulli para vigas, resulta:

$$\frac{d^2}{dx^2} \left( EI \frac{d^2}{dx^2} V \right) + P \omega^2 V = 0 \quad (7.11)$$

onde  $P$  é a força de compressão. Neste caso os auto-valores fornecem as forças críticas de flambagem da coluna.

Pelo lado da transferência de calor, considere a equação diferencial que governa o fluxo unidimensional de calor por condução em regime transiente:

$$k \frac{\partial^2}{\partial x^2} u - \rho c_p \frac{\partial}{\partial t} u = 0 \quad (7.12)$$

onde  $u$  é a temperatura,  $k$  é o coeficiente de condutividade térmica,  $c_p$  é o calor específico a pressão constante e  $\rho$  é a densidade do material.

Por separação de variáveis resulta após alguns rearranjos:

$$\frac{1}{U} \frac{d^2}{dx^2} U = \frac{1}{\alpha T} \frac{d}{dt} T = -\lambda \quad (7.13)$$

onde  $\lambda$  é uma constante positiva pelas mesmas razões anteriormente apontadas.

A equação diferencial temporal resultante da equação acima é:

$$\frac{d}{dt} T + \alpha \lambda T = 0 \quad (7.14)$$



cuja solução é:

$$T = T_1 e^{-\alpha \lambda t} \quad (7.15)$$

Já a equação espacial é um problema de auto-valor:

$$-\frac{d^2}{dx^2} U - \lambda U = 0 \quad (7.16)$$

o qual fornece os pares  $(\lambda_n, U_n)$ , respectivamente auto-valores e auto-funções do problema acima.

A solução da equação diferencial original vem dada finalmente por uma específica combinação linear de  $U_n(x)e^{-\alpha \lambda_n t}$ , ditada pelas condições iniciais.

**7.3.1. Modelos de elementos finitos.** A título de exemplo sobre a implementação do MEF a problemas de auto-valor e sem perda de generalidade, considere inicialmente o problema de vibração livre axial de uma barra:

$$-\frac{d}{dx} \left( a \frac{d}{dx} U \right) - \lambda c_0 U = 0 \quad (7.17)$$

Aplicando o método da integral ponderada nesta última para um elemento finito  $e$  qualquer, obtém-se a forma fraca:

$$\int_0^{h_e} a \frac{d}{d\chi} w \frac{d}{d\chi} U d\chi - \lambda \int_0^{h_e} c_0 w U d\chi = Q_1^e w(0) + Q_n^e w(h_e) \quad (7.18)$$

onde  $Q_1^e = - \left( a \frac{d}{d\chi} U \right) \Big|_{\chi=0}$  e  $Q_n^e = \left( a \frac{d}{d\chi} U \right) \Big|_{\chi=h_e}$ . Aproximando  $u$  localmente por elementos finitos, ou seja, fazendo:

$$U^e = \sum_{j=1}^n \psi_j^e U_j^e \quad (7.19)$$

levando-a à forma fraca e substituindo as funções peso pelas de forma, obtém-se:

$$\sum_{j=0}^n \left( \int_0^{h_e} a \frac{d}{d\chi} \psi_i^e \frac{d}{d\chi} \psi_j^e d\chi \right) U_j^e - \lambda \sum_{j=0}^n \left( \int_0^{h_e} c_0 \psi_i^e \psi_j^e d\chi \right) U_j^e = Q_i^e \quad (7.20)$$

ou, em forma matricial:

$$[K^e] \{U^e\} - \lambda [M^e] \{U^e\} = \{Q^e\} \quad (7.21)$$

onde:

$$K_{ij}^e = \int_0^{h_e} a \frac{d}{d\chi} \psi_i^e \frac{d}{d\chi} \psi_j^e d\chi \quad (7.22a)$$

$$M_{ij}^e = \int_0^{h_e} c_0 \psi_i^e \psi_j^e d\chi \quad (7.22b)$$

são os coeficientes da matriz de rigidez e da *matriz de massa* locais, respectivamente. A Eq. 7.21 é o modelo local de elementos finitos do problema de auto-valor.

O modelo local de elementos finitos para o problema de auto-valor de 4<sup>ª</sup> ordem, caso da viga de Euler-Bernoulli, resulta, após implementação análoga à anterior:

$$[K^e]\{U^e\} - \lambda [M^e]\{U^e\} = \{Q^e\} \quad (7.23)$$

onde agora:

$$K_{ij}^e = \int_0^{h_e} b \frac{d^2}{d\chi^2} \psi_i^e \frac{d^2}{d\chi^2} \psi_j^e d\chi \quad (7.24a)$$

$$M_{ij}^e = \int_0^{h_e} c_0 \psi_i^e \psi_j^e d\chi \quad (7.24b)$$

O modelo local de elementos finitos do problema de flambagem, Eq. 7.11, é o mesmo que o da viga de Euler-Bernoulli acima a menos de  $\lambda$ , que passa a  $P$ , a força de compressão, e da matriz de massa  $[M^e]$ , que passa a *matriz de estabilidade*:

$$G_{ij}^e = \int_0^{h_e} a_e \frac{d}{d\chi} \psi_i^e \frac{d}{d\chi} \psi_j^e d\chi \quad (7.25)$$

O procedimento de aplicação das condições de contorno é o mesmo do problema estático. Cabe observar que as condições de contorno são homogêneas em problemas de auto-valor.

**7.3.2. Estimadores de erro para os auto-valores e auto-funções.** Sejam  $(\lambda_{(0)}, u_{(0)})$  e  $(\lambda_h, u_h)$  os pares de auto-valor e auto-função, respectivamente o exato e o obtido pelo MEF, de um determinado problema. É possível estimar o erro do último par por meio das seguintes desigualdades:

$$0 \leq \lambda_h - \lambda_{(0)} \leq C_1 h^{2(k+1-m)} [\lambda_{(0)}]_{\frac{k+1}{m}} \quad (7.26a)$$

$$\|u_h - u_{(0)}\|_m \leq C_2 h^{k+1-m} [\lambda_{(0)}]_{\frac{k+1}{2m}} \quad (7.26b)$$

onde  $2m$  é a ordem do operador diferencial do problema,  $k$  é o grau dos polinômios das funções de forma empregadas em  $u_h$  e  $h$  é o comprimento característico da malha.

COMENTÁRIO 7.1. *Da desigualdade acima, Eq. 7.26a,  $\lambda_{(0)} \leq \lambda_h$ , ou seja, qualquer que seja o auto-valor obtido pelo MEF, ele será sempre maior que aquele exato: os auto-valores  $\lambda_h$  são aproximados por cima.*

COMENTÁRIO 7.2. *Suponha que uma malha de elementos finitos lineares de comprimento característico  $h_0$  seja empregada para a obtenção das frequências e modos axiais de vibrar de uma barra. Logo,  $m = 1$  e  $k = 1$ . Ao se refinar a malha, por exemplo, diminuindo à metade o comprimento característico ( $h = h_1 = h_0/2$ ), o erro estimado para as frequências e modos de vibrar serão:*

$$\lambda_{h_1} - \lambda_{(0)} \approx \frac{1}{4} (\lambda_{h_0} - \lambda_{(0)}) \quad (7.27a)$$

$$\|u_{h_1} - u_{(0)}\|_m \approx \frac{1}{2} \|u_{h_0} - u_{(0)}\|_m \quad (7.27b)$$

**7.3.3. Aplicação.** Para ilustrar a aplicação do MEF na obtenção dos auto-valores e auto-funções, considere o problema de vibração axial livre de uma barra restrita no apoio à esquerda e livre à direita, conforme mostra a Fig. ???. A barra tem densidade linear  $\rho$ , módulo de elasticidade  $E$  e área de seção transversal  $A$ . Na solução será empregada uma malha formada por 2 elementos lineares de igual comprimento.

As condições de contorno levam a  $U_1 = Q_3 = 0$ . As matrizes de rigidez e de massa globais são respectivamente:

$$[K] = \frac{2EA}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \quad (7.28)$$

e:

$$[M] = \frac{\rho AL}{12} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \quad (7.29)$$

O modelo global de elementos finitos torna-se, portanto, após a imposição das condições de contorno:

$$\left( \frac{2EA}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} - \frac{\rho AL}{12} \omega^2 \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \right) \begin{Bmatrix} 0 \\ U_2 \\ U_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} Q_1 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (7.30)$$

O problema de auto-valor surge da redução do sistema acima pela eliminação da primeira equação do modelo global, a que tem a variável secundária não nula:

$$\left( \frac{2EA}{L} \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} - \frac{\rho AL}{12} \omega^2 \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \right) \begin{Bmatrix} U_2 \\ U_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (7.31)$$

Fazendo, por exemplo,  $EA/L = 1$  e  $\rho AL = 12$ , e após algumas simplificações, o problema se reduz a:

$$\begin{bmatrix} 4(\omega^2 - 1) & \omega^2 + 2 \\ \omega^2 + 2 & 2(\omega^2 - 1) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_2 \\ U_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (7.32)$$

cuja equação característica é a equação bi-quadrada:

$$\omega^4 - \frac{20}{7}\omega^2 + \frac{4}{7} = 0 \quad (7.33)$$

Suas raízes são os auto-valores procurados, ou as frequências angulares:

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{10}{7} - \frac{6}{7}\sqrt{2}} = 0,4651756$$

$$\omega_2 = \sqrt{\frac{10}{7} + \frac{6}{7}\sqrt{2}} = 1,6250398$$

Os auto-vetores são obtidos pela resolução do sistema de equações algébricas, Eq. 7.32, para cada auto-valor. Como o determinante da matriz do sistema é nulo (as duas equações são linearmente dependentes), ele é indeterminado, bastando, portanto, apenas uma das equações para obter a solução. Logo, para  $\omega_1$ :

$$\begin{bmatrix} 3,1344 & -2,2164 \\ -2,2164 & 1,5672 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_2^{(1)} \\ U_3^{(1)} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

e:

$$U_2^{(1)} = 0,70711 U_3^{(1)}$$

Logo, o primeiro modo de vibrar da barra é:

$$U^{(1)} = \begin{Bmatrix} 0,70711 \\ 1 \end{Bmatrix}$$

Para  $\omega_2$  o sistema é:

$$\begin{bmatrix} 6,5630 & 4,6408 \\ 4,6408 & 3,2815 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_2^{(2)} \\ U_3^{(2)} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

e:

$$U_2^{(2)} = -0,70711 U_3^{(2)}$$

O segundo modo de vibrar da barra é portanto:

$$U^{(2)} = \begin{Bmatrix} 0,70711 \\ -1 \end{Bmatrix}$$

Os dois primeiros auto-valores exatos do problema são:

$$\omega_1^{(0)} = \sqrt{3} \frac{\pi}{12} = 0,4534498$$

$$\omega_2^{(0)} = \sqrt{3} \frac{\pi}{4} = 1,3603495$$

Comparando o resultado obtido pelo MEF com o exato, observam-se a aproximação dos auto-valores por cima e o crescimento do erro do primeiro para o segundo autovalor, conforme prevê o estimador. Pode-se observar na Fig. 7.1 um comparativo gráfico entre os modos exatos e os obtidos pelo MEF.

#### 7.4. Problemas dependentes do tempo

**7.4.1. Introdução.** Considere a equação diferencial geral de um problema dependente do tempo:

$$-\frac{\partial}{\partial x} \left( a \frac{\partial}{\partial x} u \right) + \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left( b \frac{\partial^2}{\partial x^2} u \right) + c_0 u + c_1 \frac{\partial}{\partial t} u + c_2 \frac{\partial^2}{\partial t^2} u = f(x, t) \quad (7.34)$$

onde os coeficientes  $a$ ,  $b$ ,  $c_0$ ,  $c_1$  e  $c_2$  são dependentes das coordenadas do espaciais e do tempo. Conforme os valores destes coeficientes, a equação acima pode descrever diversos fenômenos da mecânica dos meios contínuos. Por exemplo, se  $a = EA$ ,  $b = c_0 = c_1 = 0$ , tem-se a equação do movimento vibratório axial transitório de uma barra.

Para formar o problema a valores no contorno e iniciais, deve-se acrescentar à Eq. 7.34 condições de contorno:

$$u(x, t)|_\gamma \quad \text{ou} \quad \left( -a \frac{\partial}{\partial x} u + \frac{\partial}{\partial x} \left( b \frac{\partial^2}{\partial x^2} u \right) \right) \Big|_\gamma \quad (7.35a)$$

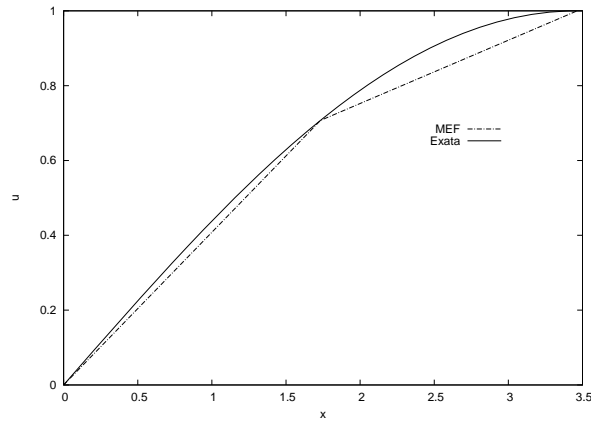


FIGURA 7.1. 1º modo de vibrar

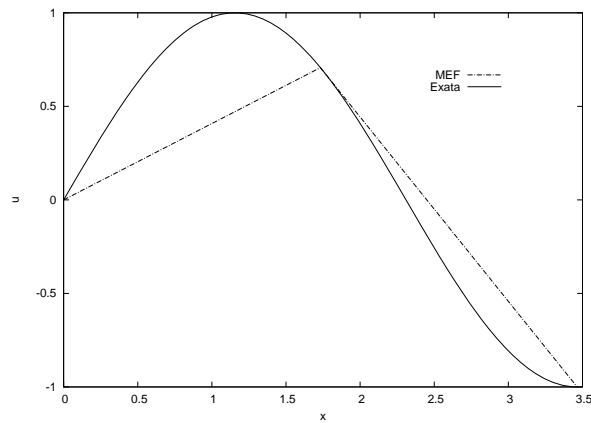


FIGURA 7.2. 2º modo de vibrar

e

$$\left. \frac{\partial}{\partial x} u \right|_{\gamma} \quad \text{ou} \quad b \left. \frac{\partial^2}{\partial x^2} u \right|_{\gamma} \quad (7.35b)$$

e condições iniciais:

$$c_2 u(x, 0) \quad \text{e} \quad c_2 \dot{u}(x, 0) + c_1 u(x, 0) \quad (7.36)$$

A abordagem deste tipo de problema pelo método dos elementos finitos requer aproximação espacial e temporal. Para a primeira, supondo a separação de variáveis, tem-se:

$$u(x, t) = u^e(x, t) = \sum_{j=1}^n U_j^e(t) \psi_j^e(x) \quad (7.37)$$

Para a segunda, tratam-se as derivadas temporais conforme as espessões tiradas do método das diferenças finitas, descritas mais adiante.

Ao final das duas etapas obtém-se uma solução espacial contínua a cada intervalo de tempo discreto:

$$u^e(x, t_s) = \sum_{j=1}^n U_j^e(t_s) \psi_j^e(x), \quad s = 0, 1, 2, 3, \dots \quad (7.38)$$

onde  $U_j^e(t_s)$  é o valor da grandeza física  $u$  no nó  $j$  do elemento  $e$  no instante  $t_s$ .

**7.4.2. Modelos semi-discretos de elementos finitos.** A formulação semi-discreta é o resultado da aplicação da forma fraca às Eqs. 7.32-7.34 em cada elemento finito num instante qualquer  $t$ :

$$\begin{aligned} & \int_0^{h_e} \left( a \frac{\partial}{\partial \chi} w \frac{\partial}{\partial \chi} u^e + b \frac{\partial^2}{\partial \chi^2} w \frac{\partial^2}{\partial \chi^2} u^e + c_0 w u^e + c_1 w \dot{u}^e + c_2 w \ddot{u}^e \right) d\chi = \\ & = \int_0^{h_e} w f d\chi + Q_1^e w(0) + Q_2^e \left( -\frac{\partial}{\partial \chi} w \right) \Big|_{\chi=0} + Q_3^e w(h_e) + Q_4^e \left( -\frac{\partial}{\partial \chi} w \right) \Big|_{\chi=h_e} \end{aligned} \quad (7.39)$$

onde:

$$Q_1^e = \left[ -a \frac{\partial}{\partial \chi} u^e + \frac{\partial}{\partial \chi} \left( b \frac{\partial^2}{\partial \chi^2} u^e \right) \right]_{\chi=0} \quad (7.40)$$

$$Q_2^e = \left( b \frac{\partial^2}{\partial \chi^2} u^e \right) \Big|_{\chi=0} \quad (7.41)$$

$$Q_3^e = - \left[ -a \frac{\partial}{\partial \chi} u^e + \frac{\partial}{\partial \chi} \left( b \frac{\partial^2}{\partial \chi^2} u^e \right) \right]_{\chi=h_e} \quad (7.42)$$

$$Q_4^e = - \left( b \frac{\partial^2}{\partial \chi^2} u^e \right) \Big|_{\chi=h_e} \quad (7.43)$$

Aplicando o método de Rayleigh-Ritz na forma fraca a partir do conjunto de funções de forma do elemento,  $\{\psi_i^e\}_{i=1}^N$ , e da Eq. 7.37 obtém-se:

$$\begin{aligned} & \sum_{j=1}^N \left( \int_0^{h_e} a \frac{\partial}{\partial \chi} \psi_i^e \frac{\partial}{\partial \chi} \psi_j^e d\chi + \int_0^{h_e} b \frac{\partial^2}{\partial \chi^2} \psi_i^e \frac{\partial^2}{\partial \chi^2} \psi_j^e d\chi + \int_0^{h_e} c_0 \psi_i^e \psi_j^e d\chi \right) U_j^e + \\ & \quad + \sum_{j=1}^N \left( \int_0^{h_e} c_1 \psi_i^e \psi_j^e d\chi \right) \dot{U}_j^e + \sum_{j=1}^N \left( \int_0^{h_e} c_2 \psi_i^e \psi_j^e d\chi \right) \ddot{U}_j^e = \\ & = \int_0^{h_e} \psi_i^e f d\chi + Q_1^e \psi_i^e(0) + Q_2^e \left( -\frac{\partial}{\partial \chi} \psi_i^e \right) \Big|_{\chi=0} + Q_3^e \psi_i^e(h_e) + Q_4^e \left( -\frac{\partial}{\partial \chi} \psi_i^e \right) \Big|_{\chi=h_e} \end{aligned} \quad (7.44)$$

ou em forma matricial:

$$[M^{2e}] \{\ddot{U}^e\} + [M^{1e}] \{\dot{U}^e\} + [K^e] \{U^e\} = \{F^e\} \quad (7.45)$$

onde:

$$[K^e] = [K^{1e}] + [K^{2e}] + [M^{0e}] \quad (7.46)$$

$$M_{ij}^{0e} = \int_0^{h_e} c_0 \psi_i^e \psi_j^e d\chi \quad (7.47)$$

$$M_{ij}^{1e} = \int_0^{h_e} c_1 \psi_i^e \psi_j^e d\chi \quad (7.48)$$

$$M_{ij}^{2e} = \int_0^{h_e} c_2 \psi_i^e \psi_j^e d\chi \quad (7.49)$$

$$K_{ij}^{1e} = \int_0^{h_e} a \frac{d}{d\chi} \psi_i^e \frac{d}{d\chi} \psi_j^e d\chi \quad (7.50)$$

$$K_{ij}^{2e} = \int_0^{h_e} b \frac{d^2}{d\chi^2} \psi_i^e \frac{d^2}{d\chi^2} \psi_j^e d\chi \quad (7.51)$$

$$F_i^e = \int_0^{h_e} \psi_i^e f d\chi + Q_i^e \quad (7.52)$$

**7.4.3. Aproximações temporais.** A abordagem numérica para a solução das equações diferenciais a valores iniciais será tratada aqui. Antes, porém, convém distinguir os dois tipos diferentes das equações diferenciais comumente presentes na análise transiente de fenômenos físicos. São elas as equações diferenciais a valores iniciais parabólicas e hiperbólicas. Na primeira, o operador diferencial temporal é de primeira ordem, e o da segunda é de segunda ordem. As formas de solução numérica de uma e outra, apresentadas aqui, se assemelham, porém é conveniente estudá-las separadamente.

7.4.3.1. *Equações parabólicas.* Na equação diferencial genérica, Eq. 7.34, se o coeficiente  $c_2$  é nulo - o que equivale a  $[M^{2e}]$  nula -, tem-se então uma equação (ou sistema de equações) diferencial temporal parabólica, encontrada, por exemplo, nos problemas de transferência de calor transiente. Neste caso, o modelo local de elementos finitos, Eq. 7.45, escreve-se simplesmente:

$$[M^{1e}]\{\dot{U}^e\} + [K^e]\{U^e\} = \{F^e\} \quad (7.53)$$

o qual, acrescido das condições iniciais:

$$\{U^e\}_{t=t_0} = \{U^e\}_0 \quad (7.54)$$

especifica a solução temporal procurada.

7.4.3.1.1. Método da família de aproximação  $\alpha$ . O método da família de aproximação  $\alpha$  é uma forma discreta de obter a solução temporal de equações diferenciais parabólicas.

Sabe-se, pela versão diferencial do teorema do valor médio, que existe um certo  $t_m \in [t_s, t_{s+1}]$  no qual a derivada  $\dot{U}$  é o valor médio da taxa de variação de  $U$  nesse intervalo. O método assume que a taxa de variação média de  $U$  no intervalo de tempo  $[t_s, t_{s+1}]$  é a média ponderada dos valores extremos de  $\dot{U}$ :

$$\frac{\{U^e\}_{s+1} - \{U^e\}_s}{t_{s+1} - t_s} = (1 - \alpha) \{\dot{U}^e\}_s + \alpha \{\dot{U}^e\}_{s+1}, \quad 0 \leq \alpha \leq 1 \quad (7.55)$$

cujas ponderações é feita pelo parâmetro  $\alpha$ . Como este pode ser qualquer no intervalo de 0 a 1, tem-se, portanto, uma família de aproximação.

A notação  $\{\cdot\}_{t_s}$  ou  $[\cdot]_{t_s}$  se refere a valores no instante  $t_s = \sum_{i=1}^s \Delta t_i$ . Denota-se a média ponderada, isto é, o segundo membro da Eq. 7.55, como  $\{\dot{U}\}_{s+\alpha}$ . Na

prática os sucessivos intervalos de tempo  $\Delta t_s$  são considerados constantes iguais a  $\Delta t$ . Tendo isto em conta, pode-se escrever a Eq. 7.55 da seguinte forma:

$$\{U^e\}_{s+1} = \{U^e\}_s + \Delta t_{s+1} \{\dot{U}^e\}_{s+\alpha} \quad (7.56)$$

Assumindo  $[M^{1e}]$  independente do tempo, a Eq. 7.53 escreve-se, respectivamente, nos instantes  $t_s$  e  $t_{s+1}$  como:

$$[M^{1e}]\{\dot{U}^e\}_s + [K^e]_s\{U^e\}_s = \{F^e\}_s \quad (7.57)$$

$$[M^{1e}]\{\dot{U}^e\}_{s+1} + [K^e]_{s+1}\{U^e\}_{s+1} = \{F^e\}_{s+1} \quad (7.58)$$

Pré-multiplicando agora a Eq. 7.55 por  $\Delta t_{s+1}[M^{1e}]$  obtém-se:

$$\alpha \Delta t_{s+1}[M^{1e}]\{\dot{U}^e\}_{s+1} + (1 - \alpha) \Delta t_{s+1}[M^{1e}]\{\dot{U}^e\}_s = [M^{1e}] (\{U^e\}_{s+1} - \{U^e\}_s) \quad (7.59)$$

Isolando  $[M^{1e}]\{\dot{U}^e\}_s$  e  $[M^{1e}]\{\dot{U}^e\}_{s+1}$  nas Eqs. 7.57 e 7.58, respectivamente, e a seguir substituindo-as na Eq. 7.59 resulta, após o rearranjo dos termos:

$$\begin{aligned} ([M^{1e}] + \alpha \Delta t_{s+1}[K^e]_{s+1}) \{U^e\}_{s+1} = & ([M^{1e}] - (1 - \alpha) \Delta t_{s+1}[K^e]_s) \{U^e\}_s + \\ & + \Delta t_{s+1} (\alpha \{F^e\}_{s+1} + (1 - \alpha) \{F^e\}_s) \end{aligned} \quad (7.60)$$

ou, sinteticamente:

$$[\hat{K}^e]_{s+1}\{U^e\}_{s+1} = [\bar{K}^e]_s\{U^e\}_s + \{\hat{F}^e\}_{s,s+1} \quad (7.61)$$

onde:

$$[\hat{K}^e]_{s+1} = [M^{1e}] + \alpha \Delta t_{s+1}[K^e]_{s+1} \quad (7.62)$$

$$[\bar{K}^e]_s = [M^{1e}] - (1 - \alpha) \Delta t_{s+1}[K^e]_s \quad (7.63)$$

$$\{\hat{F}^e\}_{s,s+1} = \Delta t_{s+1} (\alpha \{F^e\}_{s+1} + (1 - \alpha) \{F^e\}_s) \quad (7.64)$$

A Eq. 7.61 forma o modelo local de elementos finitos do problema parabólico. Para se obter o modelo global, o procedimento é o habitual, ou seja, com o auxílio da matriz de conectividade formam-se as matrizes globais que formarão parte do modelo. Desta forma chega-se ao modelo global de elementos finitos:

$$[\hat{K}]_{s+1}\{U\}_{s+1} = [\bar{K}]_s\{U\}_s + \{\hat{F}\}_{s,s+1} \quad (7.65)$$

7.4.3.1.2. Imposição das condições de contorno e partida do esquema numérico temporal. A imposição das condições de contorno se faz de modo análogo aos problemas estáticos. Contudo, os valores nodais no contorno são agora dependentes do tempo, conforme as Eqs. 7.35.

O andamento do esquema numérico se inicia pela imposição das condições iniciais do problema,  $\{U\}_0$ , em todos os nós da malha. Tem-se pois no instante  $t_0$ :

$$[\hat{K}]_1 = [M^1] + \alpha \Delta t [K]_1 \quad (7.66)$$

$$[\bar{K}]_0 = [M^1] - (1 - \alpha) \Delta t [K]_0 \quad (7.67)$$

$$\{\hat{F}\}_{0,1} = \Delta t (\alpha \{F\}_1 + (1 - \alpha) \{F\}_0) \quad (7.68)$$



COMENTÁRIO 7.3. *Observe que  $[K^e]$  e  $\{F^e\}$  são funções dependentes do tempo previamente conhecidas, como se pode observar das Eqs. 7.34 e 7.43-7.52.*

As matrizes acima, uma vez substituídas na Eq. 7.65, formam o sistema de equações algébricas que, rearranjado a modo dos problemas estáticos, fornece  $\{U\}_1$ . O passo seguinte repete este primeiro a menos que, onde o índice era 0, passa a ser 1 e, onde era 1, passa a ser 2, obtendo  $\{U\}_2$ . O esquema segue então até o instante desejado. Ao final tem-se o histórico das variáveis primárias e secundárias em instantes discretos ao longo do período de tempo.

7.4.3.1.3. Estabilidade e precisão do esquema numérico temporal. A seguir são dadas algumas definições referentes à estabilidade e precisão do esquema numérico temporal.

Duas são as fontes de erro deste esquema numérico. Uma são os erros acumulados a cada passo ao introduzir um truncamento na forma de aproximar a derivada temporal e, outra, são os erros de arredondamento decorrentes da limitação de representação numérica intrínseca da máquina. Se o erro acumulado cresce indefinidamente ao longo do esquema, tem-se solução *instável*. Pelo contrário, se o erro ao longo do esquema permanece limitado a um valor, ou seja, num intervalo o erro é compensado pelo do intervalo seguinte, a solução é *estável*. Supondo operações aritméticas exatas, se o erro de truncamento vai a 0 quando o intervalo de tempo  $\Delta t_s$  tende a 0, então o esquema discreto se diz *consistente* com o problema contínuo. Finalmente, se para um instante  $t_s$  e intervalo de tempo  $\Delta t_s$  fixos quaisquer a solução de um esquema de aproximação temporal tende à exata quando  $\Delta t_s$  for a 0, então o esquema se diz *convergente*. Se um esquema numérico é estável e consistente, também é convergente.

7.4.3.1.4. Esquema condicionalmente estável. Um esquema é dito condicionalmente estável se é estável quando certas condições para o intervalo  $\Delta t$  são satisfeitas. Para todos os esquemas numéricos em que  $\alpha < \frac{1}{2}$ , a família de aproximação  $\alpha$  é estável só se:

$$\Delta t < \Delta t_{\text{crítico}} = \frac{2}{(1 - 2\alpha)\lambda} \quad (7.69)$$

onde  $\lambda$  é o maior auto-valor do problema de auto-valor associado à equação do modelo global de elementos finitos análoga à Eq. 7.53.

$\alpha$	Designação	Estabilidade	Precisão
0	esquema de diferença progressiva	condicionalmente estável	$O(\Delta t)$
$\frac{1}{2}$	esquema de Crank-Nicolson	estável	$O(\Delta t^2)$
$\frac{2}{3}$	método de Galerkin	estável	$O(\Delta t^2)$
1	esquema de diferença regressiva	estável	$O(\Delta t)$

TABELA 7.1. Quadro comparativo de alguns esquemas da família  $\alpha$ .

7.4.3.1.5. Esquemas explícito e implícito. Quando  $\alpha$  for nulo,  $[\hat{K}]_{s+1} = [M]^1$ , e, se esta última for diagonal, o sistema dado pela Eq. 7.65 pode ser resolvido sem a necessidade de “inverter”  $[\hat{K}]_{s+1}$ . Neste caso, tem-se o esquema *explícito*. Quando  $\alpha$  é não nulo,  $[\hat{K}]_{s+1}$  deve ser “invertida”, e o esquema é dito *implícito*.

7.4.3.2. *Equações hiperbólicas.* Se na Eq. 7.34 o coeficiente  $c_1$  é identicamente nulo - o que equivale agora a  $[M^{1e}]$  nula -, tem-se uma equação (ou sistema de equações) hiperbólica, encontrada, por exemplo, em problemas de dinâmica dos sólidos. Consequentemente o modelo local de elementos finitos torna-se:

$$[M^{2e}]\{\ddot{U}^e\} + [K^e]\{U^e\} = \{F^e\} \quad (7.70)$$

o qual, acrescido das condições iniciais:

$$\{U^e\}_{t=t_0} = \{U^e\}_0 \quad (7.71)$$

$$\{\dot{U}^e\}_{t=t_0} = \{\dot{U}^e\}_0 \quad (7.72)$$

define univocamente a solução temporal procurada.

7.4.3.2.1. Método Newmark. Na obtenção da solução discreta da Eq. 7.70 será empregado o método Newmark.

Neste método, a solução  $\{U\}$  e sua primeira derivada  $\{\dot{U}\}$  são aproximadas pela série de Taylor truncada:

$$\{U^e\}_{s+1} = \{U^e\}_s + \Delta t_{s+1}\{\dot{U}^e\}_s + \frac{1}{2}(\Delta t_{s+1})^2\{\ddot{U}^e\}_{s+\gamma} \quad (7.73)$$

$$\{\dot{U}^e\}_{s+1} = \{\dot{U}^e\}_s + \Delta t_{s+1}\{\ddot{U}^e\}_{s+\alpha} \quad (7.74)$$

onde:

$$\{\ddot{U}^e\}_{s+\theta} = (1 - \theta)\{\ddot{U}^e\}_s + \theta\{\ddot{U}^e\}_{s+1} \quad (7.75)$$

é a média ponderada da taxa de variação de segunda ordem no intervalo de tempo  $\Delta t_{s+1}$ , e  $\alpha$  e  $\gamma$  são parâmetros que influenciam a estabilidade e precisão do esquema numérico e que se assemelham ao parâmetro análogo da família de aproximação  $\alpha$ .

Analogamente ao desenvolvimento da família de aproximação  $\alpha$ , a Eq. 7.70 escreve-se nos instantes  $t_s$  e  $t_{s+1}$  respectivamente como:

$$[M^{2e}]_s\{\ddot{U}^e\}_s + [K^e]_s\{U^e\}_s = \{F^e\}_s \quad (7.76)$$

$$[M^{2e}]_{s+1}\{\ddot{U}^e\}_{s+1} + [K^e]_{s+1}\{U^e\}_{s+1} = \{F^e\}_{s+1} \quad (7.77)$$

Pré-multiplicando a Eq. 7.73 por  $[M^{2e}]_{s+1}$ , substituindo nesta a Eq. 7.75 e rearranjando os termos, resulta:

$$\begin{aligned} (a_3 [M^{2e}]_{s+1} + [K^e]_{s+1}) \{U^e\}_{s+1} &= \{F^e\}_{s+1} + \\ &+ [M^{2e}]_{s+1} \left( a_3 \{U^e\}_s + a_4 \{\dot{U}^e\}_s + a_5 \{\ddot{U}^e\}_s \right) \end{aligned} \quad (7.78)$$

onde:

$$a_3 = \frac{2}{\gamma(\Delta t_{s+1})^2} \quad (7.79)$$

$$a_4 = \frac{2}{\gamma \Delta t_{s+1}} \quad (7.80)$$

$$a_5 = \frac{1}{\gamma} - 1 \quad (7.81)$$

De forma sintética a Eq. 7.78 pode ser escrita como:

$$[\hat{K}^e]_{s+1} \{U^e\}_{s+1} = \{\hat{F}^e\}_{s,s+1} \quad (7.82)$$

com:

$$[\hat{K}^e]_{s+1} = a_3 [M^{2e}]_{s+1} + [K^e]_{s+1} \quad (7.83)$$

$$\{\hat{F}^e\}_{s,s+1} = \{F^e\}_{s+1} + [M^{2e}]_{s+1} \left( a_3 \{U^e\}_s + a_4 \{\dot{U}^e\}_s + a_5 \{\ddot{U}^e\}_s \right) \quad (7.84)$$

Levando a Eq. 7.75 na Eq. 7.73 e isolando  $\{\ddot{U}^e\}_{s+1}$ , obtém-se:

$$\{\ddot{U}^e\}_{s+1} = a_3 (\{U^e\}_{s+1} - \{U^e\}_s) - a_4 \{\dot{U}^e\}_{s+1} - a_5 \{\ddot{U}^e\}_s \quad (7.85)$$

Fazendo o mesmo na Eq. 7.74 e isolando agora  $\{\dot{U}^e\}_{s+1}$ , obtém-se:

$$\{\dot{U}^e\}_{s+1} = \{\dot{U}^e\}_s + a_2 \{\ddot{U}^e\}_s + a_1 \{\ddot{U}^e\}_{s+1} \quad (7.86)$$

As equações acima correspondem ao modelo local de elementos finitos. Para obter as equações correspondentes ao modelo global, devem-se obter as matrizes globais,  $[\hat{K}]$ ,  $[\bar{K}]$  e  $\{\hat{F}\}$ , por meio das correspondentes matrizes locais e da matriz de conectividade. Resulta daí o modelo global de elementos finitos:

$$\begin{aligned} (a_3 [M]_{s+1}^2 + [K]_{s+1}) \{U\}_{s+1} &= \{F\}_{s+1} + \\ &+ [M]_{s+1}^2 \left( a_3 \{U\}_s + a_4 \{\dot{U}\}_s + a_5 \{\ddot{U}\}_s \right) \end{aligned} \quad (7.87)$$

As demais equações necessárias ao esquema numérico temporal são:

$$\{\ddot{U}\}_{s+1} = a_3 (\{U\}_{s+1} - \{U\}_s) - a_4 \{\dot{U}\}_s - a_5 \{\ddot{U}\}_s \quad (7.88)$$

$$\{\dot{U}\}_{s+1} = \{\dot{U}\}_s + a_2 \{\ddot{U}\}_s + a_1 \{\ddot{U}\}_{s+1} \quad (7.89)$$

onde:

$$a_1 = \alpha \Delta t \quad (7.90)$$

$$a_2 = (1 - \alpha) \Delta t \quad (7.91)$$

COMENTÁRIO 7.4. A Eq. 7.87 é uma fórmula de recorrência que fornece  $\{U\}$  no instante  $t_{s+1}$  a partir do seu valor no instante  $t_s$  e de parâmetros e variáveis independentes cujos valores podem ser determinados em qualquer instante, como é o caso da matriz de massa, da matriz de rigidez e do vetor de carregamento. Pode-se assim estabelecer um processo iterativo em que o valor da incógnita obtida num instante serve como dado de entrada para determinar o valor da incógnita no instante seguinte.

7.4.3.2.2. Imposição das condições de contorno e partida do esquema numérico temporal. O mesmo se pode observar sobre a imposição das condições de contorno que nos problemas parabólicos.

O andamento do esquema numérico se inicia pela imposição, em todos os nós da malha, não somente das condições iniciais do problema,  $\{U\}_0$  e  $\{\dot{U}\}_0$ , mas também do valor inicial de  $\{\ddot{U}\}_0$ , obtido mediante a versão global da Eq. 7.70 no instante  $t_0$ , ou seja, mediante:

$$\{\ddot{U}\}_0 = [M]_0^{-1} (\{F\}_0 - [K]_0 \{U\}_0) \quad (7.92)$$

Com  $\{\ddot{U}\}_0$  e as condições iniciais obtém-se  $\{U\}_1$  da Eq. 7.87 e, a seguir, das Eqs. 7.88 e 7.89, obtém-se respectivamente  $\{\ddot{U}\}_1$  e  $\{\dot{U}\}_1$ , completando assim o primeiro passo do processo iterativo. No passo seguinte, já de posse de  $\{U\}_1$ ,  $\{\dot{U}\}_1$  e  $\{\ddot{U}\}_1$ , obtém-se  $\{U\}_2$  da Eq. 7.87, o qual, junto com os três anteriores, permite determinar  $\{\ddot{U}\}_2$ , por meio da Eq. 7.88, o qual, por sua vez, levado à Eq. 7.89, fornece  $\{\dot{U}\}_2$ , encerrando o segundo passo. A partir daí, este último procedimento se repete a cada passo até o instante que se queira.

7.4.3.2.3. Estabilidade e precisão. Os parâmetros  $\alpha$  e  $\gamma$  determinam a estabilidade e a precisão do método Newmark. Para todos os esquemas em que  $\gamma < \alpha \leq \frac{1}{2}$  têm-se estabilidade condicionada à desigualdade:

$$\Delta t \leq \Delta t_{\text{crítico}} = \left( \frac{1}{2} \omega_{\text{máx}}^2 (\alpha - \gamma) \right)^{-\frac{1}{2}} \quad (7.93)$$

onde  $\omega_{\text{máx}}$  é a frequência natural máxima do problema de auto-valor associado:

$$([K] - \omega^2 [M^2]) \{U\} = 0 \quad (7.94)$$

$\alpha$	$\gamma$	Designação	Estabilidade
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	método da aceleração média constante	estável
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	método da aceleração linear	condicionalmente estável
$\frac{1}{2}$	0	método da diferença central	condicionalmente estável
$\frac{3}{2}$	$\frac{8}{5}$	método de Galerkin	estável
$\frac{3}{2}$	2	método da diferença regressiva	estável

TABELA 7.2. Quadro comparativo de alguns esquemas do método de Newmark.

### 7.5. Diagonalização da matriz de massa

Pode-se observar através das Eqs. 7.62 e 7.65 que, no caso do esquema de diferença progressiva ( $\alpha = 0$ ), a fórmula de recorrência simplifica-se, apresentado-se como:

$$[M^1] \{u\}_{s+1} = ([M^1] - \Delta t_{s+1} [K]_s) \{u\}_s + \Delta t_{s+1} \{F\}_s \quad (7.95)$$

A matriz  $[M^1]$  é denominada matriz de massa consistente. Ela é simétrica, definida positiva e não-diagonal. Geralmente a obtenção de  $\{u\}_{s+1}$  requer a inversão desta matriz. No entanto se  $[M^1]$  for diagonal,  $\{u\}_{s+1}$  pode ser obtida explicitamente como:

$$(u_i)_{s+1} = \frac{1}{M_{ii}} \left[ M_{ii} (u_i)_s - \Delta t_{s+1} \sum_{j=1}^N K_{ij} (u_j)_s + \Delta t_{s+1} (F_i)_s \right] \quad (7.96)$$

Por que é clara a vantagem da matriz de massa ser diagonal, desenvolveram-se técnicas para diagonalizá-la. Na sequência serão vistas duas delas: a *diagonalização pela soma dos coeficientes da linha* e a *diagonalização proporcional*.

**7.5.1. Diagonalização pela soma dos coeficientes da linha.** Nesta técnica, o coeficiente da linha  $i$  da matriz diagonalizada é igualado à soma dos coeficientes da mesma linha da matriz de massa consistente:

$$M_{ii}^e = \sum_{j=1}^N \int_0^{h_e} \rho \psi_i^e \psi_j^e d\chi = \int_0^{h_e} \rho \psi_i^e d\chi \quad (7.97)$$

Nesta última igualdade, empregou-se a *propriedade partição da unidade*.

Esta técnica equivale a distribuir ponderadamente para cada nó, ponderando por meio da função de forma correspondente, a massa do elemento.

**7.5.2. Diagonalização proporcional.** Nesta outra técnica, o coeficiente da linha  $i$  da matriz diagonalizada é a fração da massa do elemento que corresponde à razão entre o coeficiente da linha e coluna  $i$  e a soma dos coeficientes da diagonal da matriz de massa consistente, ou seja:

$$M_{ii}^e = \alpha \int_0^{h_e} \rho d\chi \quad (7.98)$$

com:

$$\alpha = \frac{\int_0^{h_e} \rho \psi_i^e \psi_i^e d\chi}{\sum_{j=1}^N \int_0^{h_e} \rho \psi_j^e \psi_j^e d\chi} \quad (7.99)$$

COMENTÁRIO 7.5. *No caso da densidade  $\rho$  ser constante e o elemento ser lagrangeano linear ou quadrático, as duas técnicas levam à mesma matriz diagonalizada.*

**7.5.3. Vantagens da diagonalização.** A diagonalização da matriz de massa consistente acelera os cálculos computacionais por duas razões:

- 1<sup>a</sup>** . não requer a inversão de matrizes;
- 2<sup>a</sup>** . no caso de esquema condicionalmente estável, o intervalo de tempo crítico torna-se maior.