

2

Aproximação Direta para Sistemas Discretos

O método de elementos finitos (MEF) consiste nos seguintes cinco passos:

1. Pré-processamento: subdivisão do domínio do problema em elementos finitos.
2. Formulação dos elementos: desenvolvimento de equações para os elementos.
3. Montagem: obtenção do sistema global de equações a partir das equações individuais dos elementos.
4. Resolução das equações.
5. Pós-processamento: determinação de valores de interesse, tais como tensões e deformações, e a obtenção da visualização das respostas.

O passo 1, a subdivisão do domínio do problema em elementos finitos em ambiente de engenharia auxiliada por computadores (CAE) atuais, é executado automaticamente por geradores de malhas. Para problemas de treliças, tais como o mostrado na Figura 2.1, cada membro da treliça é representado por um elemento finito. O passo 2, a descrição do comportamento de cada elemento, geralmente exige o desenvolvimento das equações diferenciais parciais para o problema e a sua formulação fraca. Isso será o principal objetivo dos próximos capítulos. Todavia, em situações simples, tais como sistemas de molas ou treliças, é possível descrever o comportamento de um elemento diretamente, sem a consideração de uma equação diferencial parcial de governo ou a sua formulação fraca.

Neste capítulo, colocaremos em evidência o passo 3, como combinar as equações que governam os elementos individuais para obter as equações do sistema. Os elementos das equações são expressos na forma matricial. Antes disso, desenvolvemos algumas matrizes de elementos finitos simples para conjunto de molas e treliças, o passo 2. Também introduzimos os procedimentos para o pós-processamento de resultados.

2.1 DESCRIÇÃO DO COMPORTAMENTO DE UM ELEMENTO DE BARRA SIMPLES

Uma estrutura de treliça, como a mostrada na Figura 2.1, consiste em uma coleção de elementos delgados, frequentemente chamados de barras. Esses elementos de barra são considerados suficientemente finos, de modo que apresentam resistência à torção, dobragem e cisalhamento desprezíveis. Conseqüentemente, as forças de dobragem, de cisalhamento e de torção são consideradas inexistentes. As únicas forças internas importantes em barras são as forças axiais internas, de modo que o comportamento desses elementos é similar ao das molas. Alguns dos elementos de barra na Figura 2.1 estão alinhados horizontalmente, enquanto outros estão posicionados em um ângulo arbitrário ϕ , como mostrado na Figura 2.2(b). Nesta seção, mostramos como relacionar *forças internas nodais*, agindo em nós, para os *deslocamentos nodais* correspondentes, denotados por (F_1, F_2) e (u_1^e, u_2^e) , respectivamente, para a barra unidimensional mostrada na Figura 2.2(a). Em duas dimensões, as forças nodais de um elemento são $(F_{1x}^e, F_{1y}^e, F_{2x}^e, F_{2y}^e)$ e os deslocamentos nodais são $(u_{1x}^e, u_{1y}^e, u_{2x}^e, u_{2y}^e)$.



Figura 2.1 Uma ponte de treliças.

Notação. Em todas as partes deste livro-texto, a seguinte notação é usada. Os índices referentes ao elemento aparecem como sobrescritos. Os índices dos nós aparecem como subscritos; quando a variável é um vetor com componentes, a indicação da componente vem depois do índice do nó. Quando a variável tem apenas um elemento sobrescrito, então o índice do nó é uma indicação local; caso contrário, ela é um índice do nó global. A distinção entre índice do nó local e global será descrita depois desta seção. Por exemplo, $u_{2y}^{(5)}$ é a componente y do deslocamento do nó 2 do elemento 5. Iniciaremos considerando elementos alinhados horizontalmente na Seção 2.1. Problemas bidimensionais serão considerados na Seção 2.4.

Considere um elemento de barra posicionado ao longo do eixo x , como mostrado na Figura 2.2(a). A forma da seção transversal é bastante arbitrária, como mostrado na Figura 2.3. Neste capítulo, consideraremos que a barra é inflexível, seu material obedece a lei de Hooke e que pode suportar apenas carregamento axial, isto é, ela não transmite esforços de dobramento, cisalhamento e torção. O módulo de Young do elemento e será denotado por E^e , a sua seção transversal por A^e e o seu comprimento por l^e .

Por causa das suposições sobre as forças no elemento, a única força interna é uma força interna axial, que é colinear com o comprimento do eixo da barra. A força interna através de alguma seção transversal da barra é denotada por p^e . Supõe-se que a tensão axial é constante na seção transversal e é dada pela força interna dividida pela área de seção transversal.

$$\sigma^e = \frac{p^e}{A^e}. \quad (2.1)$$

A força e a tensão axial são positivas na tração e negativas na compressão.

As seguintes equações governam o comportamento da barra:

1. Equilíbrio do elemento, isto é, a soma das forças internas nodais atuando no elemento é igual a zero:

$$F_1^e + F_2^e = 0. \quad (2.2)$$

2. A lei da tensão-deformação elástica, conhecida como lei de Hooke, que estabelece que a tensão σ^e é uma função linear da deformação ε^e :

$$\sigma^e = E^e \varepsilon^e. \quad (2.3)$$

3. A deformação da estrutura deve ser compatível, isto é, fendas ou sobreposições não se podem desenvolver na estrutura depois da deformação.

É importante reconhecer a diferença entre a convenção de sinal para a *força interna axial* (e para a tensão) e aquela para as *forças internas nodais*. A força interna p^e é positiva na tração e negativa na compressão, isto é, p^e é positiva quando aponta para fora da superfície sobre a qual está agindo; as forças internas nodais são positivas quando elas apontam na direção positiva x e não são associadas com superfícies (veja Figura 2.4).

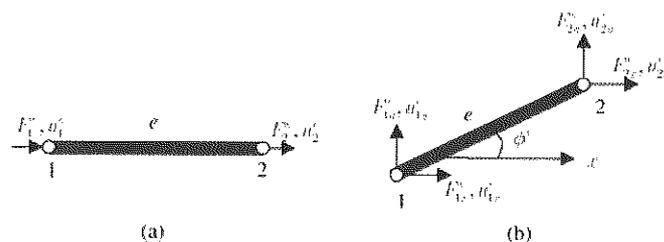


Figura 2.2 Diferentes configurações de elementos de barra: (a) barra alinhada horizontalmente e (b) elemento de barra posicionado sob um ângulo arbitrário em duas dimensões (veja Seção 2.4).

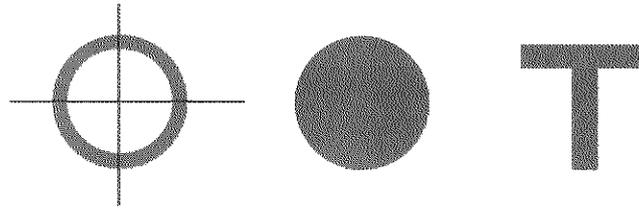


Figura 2.3 Exemplos de seções transversais de um elemento de barra.

Também necessitaremos de uma definição de deformação para aplicar-se a lei de Hooke. Apenas a deformação axial ϵ^e é diferente de zero, sendo definida como a razão entre a elongação δ^e pelo comprimento original do elemento:

$$\epsilon^e = \frac{\delta^e}{l^e} \tag{2.4}$$

Agora, desenvolveremos a matriz de rigidez do elemento, que relaciona forças internas nodais dos elementos aos deslocamentos nodais do elemento. A matriz de força interna do elemento é denotada por \mathbf{F}^e e a matriz de deslocamento do elemento por \mathbf{d}^e . Para esse elemento de dois nós, essas matrizes são dadas por:

$$\mathbf{F}^e = \begin{bmatrix} F_1^e \\ F_2^e \end{bmatrix}, \quad \mathbf{d}^e = \begin{bmatrix} u_1^e \\ u_2^e \end{bmatrix}$$

A matriz \mathbf{K}^e de rigidez do elemento que relaciona essas matrizes será agora desenvolvida. A matriz é obtida pela aplicação da lei de Hooke, das equações de tensão-deformação e das condições de equilíbrio:

$$\begin{aligned} F_2^e &= p^e = A^e \sigma^e && \text{definição de tensão (Equação [2.1])} \\ &= A^e E^e \epsilon^e && \text{lei de Hooke (Equação [2.3])} \\ &= A^e E^e \frac{\delta^e}{l^e} && \text{definição de deformação (Equação [2.4])} \end{aligned} \tag{2.5}$$

A elongação de um elemento pode ser expressa em termos dos deslocamentos nodais (veja Figura 2.4) por:

$$\delta^e = u_2^e - u_1^e, \tag{2.6}$$

que é obtida assim: como $l_{\text{nov}}^e = l^e + u_2^e - u_1^e$, então de $\delta^e = l_{\text{nov}}^e - l^e$, segue (2.6).

Note que quando $u_1^e = u_2^e$, que corresponde à translação de corpo rígido, a elongação desaparece. A substituição de (2.6) em (2.5) fornece:

$$F_2^e = k^e (u_2^e - u_1^e), \tag{2.7}$$

onde k^e é dado por

$$k^e = \frac{A^e E^e}{l^e} \tag{2.8}$$

Da condição de equilíbrio do elemento de barra (2.2) e (2.7), segue-se que

$$F_1^e = -F_2^e = k^e (u_1^e - u_2^e). \tag{2.9}$$

As Equações (2.7) e (2.9) podem ser escritas na forma matricial como

$$\underbrace{\begin{bmatrix} F_1^e \\ F_2^e \end{bmatrix}}_{\mathbf{F}^e} = \underbrace{\begin{bmatrix} k^e & -k^e \\ -k^e & k^e \end{bmatrix}}_{\mathbf{K}^e} \underbrace{\begin{bmatrix} u_1^e \\ u_2^e \end{bmatrix}}_{\mathbf{d}^e} \tag{2.10}$$

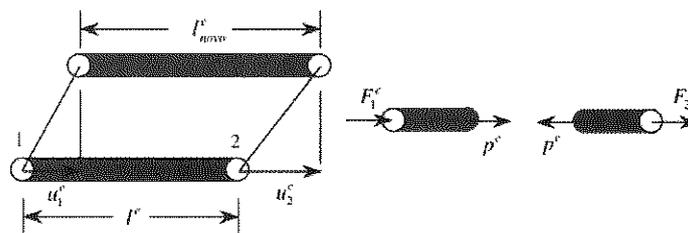


Figura 2.4 Elongação de um elemento e diagramas de corpos livres, mostrando o sentido positivo de p^e e F_1^e .

Usando as definições assinaladas, podemos escrever a relação entre as forças nodais e os deslocamentos nodais como

$$\mathbf{F}^e = \mathbf{K}^e \mathbf{d}^e, \quad \text{onde} \quad \mathbf{K}^e = \begin{bmatrix} k^e & -k^e \\ -k^e & k^e \end{bmatrix} = \frac{A^e E^e}{l^e} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}. \quad (2.11)$$

Aqui, \mathbf{K}^e é a chamada *matriz de rigidez do elemento*. Podemos usar essa rigidez do elemento para alguma área constante do elemento de barra em uma dimensão. Essa universalização das matrizes de rigidez do elemento de barra é um dos atributos do MEF que leva à sua versatilidade: para qualquer elemento de barra com área constante A^e em uma dimensão, a Equação (2.11) fornece a matriz de rigidez. Depois, desenvolveremos matrizes que se aplicarão a qualquer elemento triangular ou quadrilateral com base na solução fraca de equações diferenciais em vez de usar argumentos físicos.

A Equação (2.10) descreve a relação entre as forças nodais e os deslocamentos para um elemento simples, isto é, descreve o comportamento de um elemento. Observe que isto é uma relação linear: as forças nodais são linearmente relacionadas com os deslocamentos nodais. Essa linearidade surge da linearidade de todos os ingredientes que descrevem esse comportamento do elemento: a lei de Hooke, a linearidade entre as forças e tensões axiais e a linearidade da expressão para a deformação.

Uma característica importante da matriz de rigidez do elemento é que ela é simétrica, isto é, $\mathbf{K}^e = \mathbf{K}^{eT}$.

2.2 EQUAÇÕES PARA UM SISTEMA

O objetivo desta seção é descrever o desenvolvimento das equações para o sistema completo de matrizes de rigidez dos elementos. Introduziremos as operações de dispersão dos coeficientes e de montagem das matrizes que são usadas para esse propósito. Essas são usadas em todas as partes do MEF, inclusive nos problemas mais complexos, assim, o domínio desse procedimento é essencial ao aprendizado do MEF.

Descreveremos o processo de desenvolvimento dessas equações por meio de um exemplo. Para isso, considere o sistema de duas barras mostrado na Figura 2.5, que também dá as propriedades dos materiais, das cargas e as condições de apoio. Em um dos apoios, o deslocamento é um valor dado; nós o especificaremos depois. Os deslocamentos nodais e as forças nodais são positivas na direção positiva x .

O primeiro passo na aplicação do MEF é dividir a estrutura em elementos. A seleção e geração de uma malha para modelos em elementos finitos é um tópico extenso que será discutido em capítulos subsequentes. No caso de uma estrutura discretizada como esta, é necessário apenas colocar nós onde as cargas estão aplicadas e em pontos onde as propriedades da seção ou do material mudam; assim, a malha do elemento finito constituída dos dois elementos mostrados na Figura 2.5(b) é adequada.

Os elementos são numerados por 1 e 2, e os nós são numerados de 1 a 3; nem os nós nem os elementos necessitam ser numerados em uma ordem específica no MEF. Comentaremos sobre a numeração de nós na Seção 2.2.2. Em cada nó, ou as forças externas ou os deslocamentos nodais são conhecidos, mas não os dois; por exemplo, no nó 1 o deslocamento $u_1 = \bar{u}_1$ é prescrito, por isso a força a ser subsequentemente referida como reação r_1 é desconhecida. Nos nós 2 e 3 as forças externas f_2 e f_3 são conhecidas, e por isso os deslocamentos u_2 e u_3 são desconhecidos.

Para cada elemento mostrado na Figura 2.6, as forças internas são relacionadas com os deslocamentos por meio da matriz de rigidez dada na Equação (2.11).

As equações de rigidez dos elementos, obtidas na Seção 2.1.1, são repetidas aqui por conveniência ($e = 1, 2$):

$$\mathbf{F}^e = \mathbf{K}^e \mathbf{d}^e \quad \text{ou} \quad \begin{bmatrix} F_1^e \\ F_2^e \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k^e & -k^e \\ -k^e & k^e \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1^e \\ u_2^e \end{bmatrix}. \quad (2.12)$$

As equações do sistema global serão construídas forçando-se a compatibilidade entre as condições de equilíbrio dos elementos e dos nós.

Para desenvolver o sistema de equações, escreveremos as equações de equilíbrio para os três nós. Com essa finalidade, construímos diagramas de corpo livre dos nós mostrados na Figura 2.7(c). Observe que as forças sobre os elementos são iguais e opostas às forças correspondentes sobre os nós pela terceira lei de Newton.

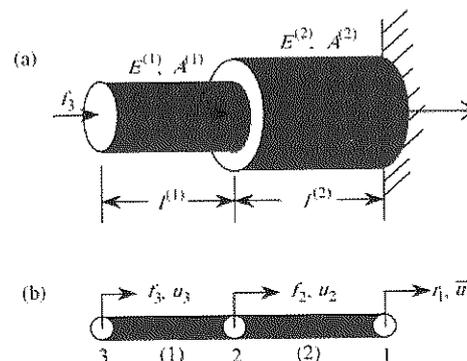


Figura 2.5 (a) Estrutura constituída de duas barras e (b) modelo de elemento finito (os números dos elementos estão entre parênteses).

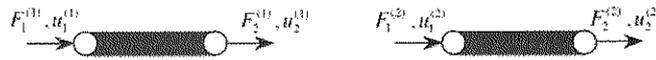


Figura 2.6 Separação da estrutura da Figura 2.5 em dois elementos.

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ F_2^{(1)} \\ F_1^{(1)} \end{bmatrix}}_{\mathbf{\bar{F}}^{(1)}} + \underbrace{\begin{bmatrix} F_2^{(2)} \\ F_1^{(2)} \\ 0 \end{bmatrix}}_{\mathbf{\bar{F}}^{(2)}} = \begin{bmatrix} r_1 \\ f_2 \\ f_3 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ f_2 \\ f_3 \end{bmatrix}}_{\mathbf{f}} + \underbrace{\begin{bmatrix} r_1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}}_{\mathbf{r}} \quad (2.13)$$

Cada linha da equação matricial anterior é uma equação de equilíbrio de um nó. No lado direito estão as forças externas aplicadas e as reações, que são dispostas na matriz \mathbf{f} e \mathbf{r} , respectivamente. A matriz \mathbf{f} consiste nas forças externas prescritas (conhecidas) nos nós, f_2 e f_3 , a matriz \mathbf{r} consiste na força desconhecida no nó 1, denotada por r_1 .

A equação anterior pode ser resumida assim: a soma das forças internas dos elementos é igual à soma das forças externas e das reações. Isso difere um tanto da bem conhecida condição de equilíbrio na qual a soma das forças em um ponto precisa anular-se. A razão para essa diferença é que as forças nodais dos elementos, que são forças que aparecem na matriz de rigidez do elemento, atuam sobre os elementos. As forças exercidas pelos elementos sobre os nós são iguais e opostas.

Note que as forças dos elementos são indexadas com os subscritos 1 e 2; esses são *índices nodais locais*. Os nós da malha são os *índices nodais globais*. Os índices nodais locais de um elemento de barra são sempre os números 1 e 2, na direção positiva x . Os índices globais nodais são arbitrários. Os índices nodais globais e locais para este exemplo são mostrados na Figura 2.7(a) e (b), respectivamente.

Usaremos agora as equações de rigidez do elemento para expressar as forças nodais internas do elemento (lado esquerdo da Equação [2.13]), em termos dos deslocamentos nodais globais do elemento.

Para o elemento 1, os índices nodais globais são os números 2 e 3, e a equação de rigidez (2.12) fornece

$$\begin{bmatrix} F_1^{(1)} \\ F_2^{(1)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k^{(1)} & -k^{(1)} \\ -k^{(1)} & k^{(1)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_3 \\ u_2 \end{bmatrix} \quad (2.14)$$

Note que substituímos os deslocamentos nodais por deslocamentos nodais globais. Tal substituição força a compatibilidade, pois assegura que os deslocamentos de elementos com nós comuns fiquem idênticos.

Para o elemento 2, os índices nodais globais são 1 e 2, e a equação de rigidez (2.12) fornece

$$\begin{bmatrix} F_1^{(2)} \\ F_2^{(2)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k^{(2)} & -k^{(2)} \\ -k^{(2)} & k^{(2)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_2 \\ u_1 \end{bmatrix} \quad (2.15)$$

As expressões anteriores para forças nodais internas não podem ser substituídas diretamente no lado esquerdo da Equação (2.13), porque as matrizes não são do mesmo tamanho. Por isso, ampliamos as matrizes de força interna em (2.14) e (2.15) acrescentando zeros; similarmente, ampliamos as matrizes de deslocamento. Os termos das matrizes de rigidez dos elementos em (2.14) e (2.15) são rearranjados e a matriz é ampliada ainda mais do que as outras e zeros são adicionados onde esses termos não têm efeitos. Os resultados são

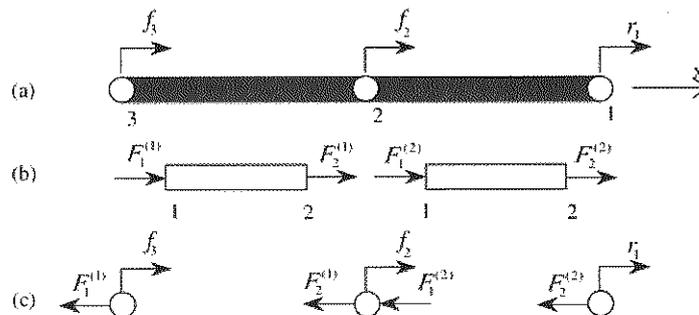


Figura 2.7 Diagramas de corpo livre dos nós e dos elementos (as forças externas são mostradas acima dos nós, mas atuando na mesma linha): (a) sistema completo com os índices globais dos nós; (b) diagramas de corpo livre dos elementos com os índices locais dos nós, e (c) diagramas de corpo livre dos nós.

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ F_2^{(1)} \\ F_1^{(1)} \end{bmatrix}}_{\tilde{\mathbf{F}}^{(1)}} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & k^{(1)} & -k^{(1)} \\ 0 & -k^{(1)} & k^{(1)} \end{bmatrix}}_{\tilde{\mathbf{K}}^{(1)}} \underbrace{\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix}}_{\mathbf{d}} \quad \text{ou} \quad \tilde{\mathbf{F}}^{(1)} = \tilde{\mathbf{K}}^{(1)} \mathbf{d}. \quad (2.16)$$

Observe que adicionamos uma linha de zeros na linha 1 correspondente à força do nó 1, de modo que o elemento 1 não exerce força sobre o nó 1, e uma coluna de zeros na coluna 1, de modo que o deslocamento do nó 1 não afeta o elemento 1 diretamente. De modo similar, uma equação ampliada para o elemento 2 é

$$\underbrace{\begin{bmatrix} F_2^{(2)} \\ F_1^{(2)} \\ 0 \end{bmatrix}}_{\tilde{\mathbf{F}}^{(2)}} = \underbrace{\begin{bmatrix} k^{(2)} & -k^{(2)} & 0 \\ -k^{(2)} & k^{(2)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}}_{\tilde{\mathbf{K}}^{(2)}} \underbrace{\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix}}_{\mathbf{d}} \quad \text{ou} \quad \tilde{\mathbf{F}}^{(2)} = \tilde{\mathbf{K}}^{(2)} \mathbf{d}. \quad (2.17)$$

As matrizes nas equações anteriores são agora do mesmo tamanho que na Equação (2.13) e podemos substituir as Equações (2.16) e (2.17) pela Equação (2.13) para obter

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & k^{(1)} & -k^{(1)} \\ 0 & -k^{(1)} & k^{(1)} \end{bmatrix}}_{\tilde{\mathbf{K}}^{(1)}} \underbrace{\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix}}_{\mathbf{d}} + \underbrace{\begin{bmatrix} k^{(2)} & -k^{(2)} & 0 \\ -k^{(2)} & k^{(2)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}}_{\tilde{\mathbf{K}}^{(2)}} \underbrace{\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix}}_{\mathbf{d}} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ f_2 \\ f_3 \end{bmatrix}}_{\mathbf{f}} + \underbrace{\begin{bmatrix} r_1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}}_{\mathbf{r}},$$

ou na forma matricial

$$(\tilde{\mathbf{K}}^{(1)} + \tilde{\mathbf{K}}^{(2)}) \mathbf{d} = \mathbf{f} + \mathbf{r}. \quad (2.18)$$

Essa expressão representa o conjunto das equações de rigidez e a variável entre parênteses é o conjunto das matrizes de rigidez, que nesse caso é dado por

$$\mathbf{K} = \sum_{e=1}^2 \tilde{\mathbf{K}}^e = \begin{bmatrix} k^{(2)} & -k^{(2)} & 0 \\ -k^{(2)} & k^{(1)} + k^{(2)} & -k^{(1)} \\ 0 & -k^{(1)} & k^{(1)} \end{bmatrix}. \quad (2.19)$$

A matriz de rigidez \mathbf{K} é singular, como pode facilmente ser visto pelo cálculo do determinante. Para obter um sistema solucionável, as condições de contorno devem ser prescritas.

Resumiremos agora o que fizemos para obter a matriz de rigidez global. Primeiramente, expandimos as matrizes de rigidez, dispersando os seus coeficientes acrescentando zeros aos espaços vagos. As novas matrizes assim obtidas são de tamanhos iguais, de acordo com o *índice global de nós*. Então, adicionamos essas matrizes para obter a matriz global de rigidez. Então, o processo de obtenção da matriz global de rigidez consiste em dispersão e adição de matrizes. Isto é resumido na Tabela 2.1.

Podemos pular a adição de zeros e montar a matriz global diretamente apenas adicionando os termos nos elementos de rigidez de acordo com o seu índice de nó global como mostrado na Tabela 2.1. Esse processo é chamado *montagem direta*. O resultado é equivalente ao da matriz com coeficientes dispersos e de adição. A montagem da matriz de rigidez em programas de computadores é feita por meio da montagem direta, mas o conceito de matriz com coeficientes dispersos e matrizes adicionadas é útil, pois explica como a compatibilidade e o equilíbrio são forçados no âmbito global.

2.2.1 Equações para Montagem

A seguir, desenvolveremos os procedimentos de montagem em termos de equações. Nessa aproximação, a compatibilidade entre elementos é forçada relacionando-se os deslocamentos nodais do elemento à matriz global de deslocamento $\mathbf{d} = [u_1 \ u_2 \ u_3]^T$ pelas equações. Essas equações são escritas a seguir:

$$\mathbf{d}^{(1)} = \begin{bmatrix} u_1^{(1)} \\ u_2^{(1)} \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}}_{\mathbf{L}^{(1)}} \begin{bmatrix} \bar{u}_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} = \mathbf{L}^{(1)} \mathbf{d}, \quad \mathbf{d}^{(2)} = \begin{bmatrix} u_1^{(2)} \\ u_2^{(2)} \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}}_{\mathbf{L}^{(2)}} \begin{bmatrix} \bar{u}_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} = \mathbf{L}^{(2)} \mathbf{d}, \quad (2.20)$$

ou em geral

$$\mathbf{d}^e = \mathbf{L}^e \mathbf{d}. \quad (2.21)$$

Tabela 2.1 Matriz com coeficientes dispersos, matrizes adicionadas e montagem direta

Matriz com os coeficientes dispersos e adicionados

Dispersão dos coeficientes do elemento 1, nós 3 e 2

$$\mathbf{K}^{(1)} = \begin{bmatrix} k^{(1)} & -k^{(1)} \\ -k^{(1)} & k^{(1)} \end{bmatrix} \Rightarrow \tilde{\mathbf{K}}^{(1)} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & k^{(1)} & -k^{(1)} \\ 0 & -k^{(1)} & k^{(1)} \end{bmatrix}$$

Dispersão dos coeficientes do elemento 2, nós 2 e 1

$$\mathbf{K}^{(2)} = \begin{bmatrix} k^{(2)} & -k^{(2)} \\ -k^{(2)} & k^{(2)} \end{bmatrix} \Rightarrow \tilde{\mathbf{K}}^{(2)} = \begin{bmatrix} k^{(2)} & -k^{(2)} & 0 \\ -k^{(2)} & k^{(2)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Matrizes adicionadas

$$\mathbf{K} = \sum_{e=1}^2 \tilde{\mathbf{K}}^e = \begin{bmatrix} k^{(2)} & -k^{(2)} & 0 \\ -k^{(2)} & k^{(1)} + k^{(2)} & -k^{(1)} \\ 0 & -k^{(1)} & k^{(1)} \end{bmatrix}$$

Montagem direta

$$\mathbf{K}^{(1)} = \begin{bmatrix} k^{(1)} & -k^{(1)} \\ -k^{(1)} & k^{(1)} \end{bmatrix} \begin{matrix} [3] \\ [2] \\ [3] \end{matrix} \quad \mathbf{K} = \begin{bmatrix} k^{(2)} & -k^{(2)} & 0 \\ -k^{(2)} & k^{(1)} + k^{(2)} & -k^{(1)} \\ 0 & -k^{(1)} & k^{(1)} \end{bmatrix} \begin{matrix} [1] \\ [2] \\ [3] \\ [1] \quad [2] \quad [3] \end{matrix}$$

$$\mathbf{K}^{(2)} = \begin{bmatrix} k^{(2)} & -k^{(2)} \\ -k^{(2)} & k^{(2)} \end{bmatrix} \begin{matrix} [2] \\ [1] \\ [2] \quad [1] \end{matrix}$$

As matrizes \mathbf{L}^e são chamadas de matrizes *reunidas*. O nome *reunida* deriva do fato de que essas matrizes reúnem os deslocamentos nodais de cada elemento da matriz global. Observe que essas equações afirmam que o deslocamento do elemento em um nó é o mesmo que o deslocamento global correspondente, o que é equivalente a forçar a compatibilidade.

As matrizes \mathbf{L}^e são matrizes Booleanas, que são constituídas estritamente por coeficientes iguais a um e zero. Elas desempenham um importante papel no desenvolvimento de expressões matriciais relacionando o elemento às matrizes globais.

Usando a Equação (2.11), as equações do elemento podem ser escritas como

$$\mathbf{K}^e \mathbf{L}^e \mathbf{d} = \mathbf{F}^e. \quad (2.22)$$

A compatibilidade é automaticamente forçada pela Equação (2.20).

Pode ser observado que o primeiro termo do primeiro membro da Equação (2.13) pode ser expresso como

$$\begin{bmatrix} 0 \\ F_2^{(1)} \\ F_1^{(1)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_1^{(1)} \\ F_2^{(1)} \end{bmatrix} = \mathbf{L}^{(1)T} \mathbf{F}^{(1)},$$

ao passo que o segundo termo do segundo membro da Equação (2.13) é igual a

$$\begin{bmatrix} F_2^{(2)} \\ F_1^{(2)} \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_1^{(2)} \\ F_2^{(2)} \end{bmatrix} = \mathbf{L}^{(2)T} \mathbf{F}^{(2)}.$$

Observe que $(\mathbf{L}^e)^T$ dispersa as forças nodais na matriz global. A substituição das duas equações anteriores na Equação (2.13) fornece

$$\sum_{e=1}^2 \mathbf{L}^e \mathbf{F}^e = \mathbf{f} + \mathbf{r}. \quad (2.23)$$

Embora tenhamos mostrado a relação entre as forças interna e externa e as reações para um exemplo específico, a Equação (2.23) sempre ocorre. A relação geral é obtida na Seção 2.5.

Para eliminar as forças internas do elemento (incógnitas) da Equação (2.22), pré-multiplicamos a Equação (2.22) por \mathbf{L}^{eT} e então as adicionamos em conjunto. Assim, a pré-multiplicação das equações do elemento (2.22) por \mathbf{L}^{eT} fornece

$$\mathbf{L}^{eT} \mathbf{K}^e \mathbf{L}^e \mathbf{d} = \mathbf{L}^{eT} \mathbf{F}^e, \quad e = 1, 2.$$

Agora vamos definir o sistema de equações para o sistema inteiro. Pela adição das equações do elemento ($e = 1, 2$), obtemos

$$\mathbf{K} \mathbf{d} = \mathbf{f} + \mathbf{r}, \quad (2.24)$$

onde \mathbf{K} é chamado de matriz global de rigidez e é dado por

$$\mathbf{K} = \sum_{e=1}^{n_{el}} \mathbf{L}^{eT} \mathbf{K}^e \mathbf{L}^e \quad (2.25)$$

onde n_{el} é o número dos elementos; nesse caso, $n_{el} = 2$. A equação anterior dá o procedimento de montagem em termos de uma equação. Ela é equivalente à montagem direta e à montagem pela matriz com coeficientes dispersos e das matrizes adicionadas. Sempre que essa equação aparece, indica montagem das matrizes do elemento na matriz global (para malhas gerais, o intervalo de e será de 1 a n_{el}). Pela comparação com a Equação (2.19), podemos ver que

$$\tilde{\mathbf{K}}^e = \mathbf{L}^{eT} \mathbf{K}^e \mathbf{L}^e. \quad (2.26)$$

Logo, a matriz de rigidez com coeficientes dispersos corresponde à pré- e pós-multiplicação de \mathbf{K}^e por \mathbf{L}^{eT} e \mathbf{L}^e , respectivamente.

A substituição das expressões das matrizes de rigidez dos elementos (2.12) em (2.24) e usando (2.25) fornece a equação global

$$\begin{bmatrix} k^{(2)} & -k^{(2)} & 0 \\ -k^{(2)} & k^{(1)} + k^{(2)} & -k^{(1)} \\ 0 & -k^{(1)} & k^{(1)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{u}_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_1 \\ f_2 \\ f_3 \end{bmatrix}. \quad (2.27)$$

Esse sistema de três equações pode ser resolvido para as três incógnitas u_2 , u_3 e r_1 , como descrito na próxima seção.

2.2.2 Condições de Contorno e Solução do Sistema

Agora prosseguimos com o processo de solução do sistema de equações globais. Para isso, vamos considerar os deslocamentos prescritos $\bar{u}_1 = 4/k^{(2)}$ no nó 1 e nas forças externas $f_2 = -4$ e $f_3 = 10$ atuando nos nós 2 e 3, como mostrado na Figura 2.8.

O sistema de equações globais (2.27) é então:

$$\begin{bmatrix} k^{(2)} & -k^{(2)} & 0 \\ -k^{(2)} & k^{(1)} + k^{(2)} & -k^{(1)} \\ 0 & -k^{(1)} & k^{(1)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{u}_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_1 \\ -4 \\ 10 \end{bmatrix}. \quad (2.28)$$

Existem várias formas de modificar essas equações para impor as condições de contorno de deslocamento. No primeiro método, o sistema global é partido, dependendo se o deslocamento do nó é prescrito ou não. Partimos o sistema de equações em E nós e F nós. Os E nós são aqueles nos quais os deslocamentos nodais são conhecidos (E refere-se a *essencial*, cujo significado ficará claro em capítulos posteriores), enquanto F nós são aqueles nos quais os deslocamentos não são conhecidos (ou são *livres*). Os subscritos E e F na matriz global de deslocamento, $\mathbf{d} = \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{d}}_E \\ \mathbf{d}_F \end{bmatrix}$,

na matriz global de força, $\mathbf{f} = \begin{bmatrix} \mathbf{f}_E \\ \mathbf{f}_F \end{bmatrix}$, e na matriz de reação, $\mathbf{r} = \begin{bmatrix} \mathbf{r}_E \\ \mathbf{r}_F \end{bmatrix}$, denotam os blocos correspondentes; $\mathbf{r}_F = 0$ porque não há reações nos nós livres; presume-se que as forças externas neste capítulo correspondentes aos E nós desaparecerão, $\mathbf{f}_E = 0$.

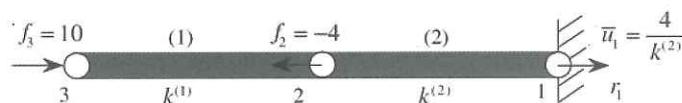


Figura 2.8 Dois elementos de estruturas de treliça com forças externas aplicadas e condições de contorno.

Por conveniência, quando resolvemos as equações, seja manualmente ou por utilização do programa MATLAB (Capítulo 12), os E nós são numerados inicialmente. Em geral, a numeração ótima é baseada em considerações de eficiência computacional.

O sistema da Equação (2.28) é então partido como a seguir:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} k^{(2)} & -k^{(2)} & 0 & \bar{u}_1 \\ -k^{(2)} & k^{(1)} + k^{(2)} & -k^{(1)} & u_2 \\ 0 & -k^{(1)} & k^{(1)} & u_3 \end{array} \right] \begin{bmatrix} \bar{u}_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_1 \\ -4 \\ 10 \end{bmatrix} \quad \text{ou} \quad \begin{bmatrix} \mathbf{K}_E & \mathbf{K}_{EF} \\ \mathbf{K}_{EF}^T & \mathbf{K}_F \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{d}}_E \\ \mathbf{d}_F \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{r}_E \\ \mathbf{f}_F \end{bmatrix}, \quad (2.29)$$

onde

$$\mathbf{K}_E = [k^{(2)}], \quad \mathbf{K}_{EF} = [-k^{(2)} \ 0], \quad \mathbf{K}_F = \begin{bmatrix} k^{(1)} + k^{(2)} & -k^{(1)} \\ -k^{(1)} & k^{(1)} \end{bmatrix}, \\ \mathbf{r}_E = [r_1], \quad \bar{\mathbf{d}}_E = [\bar{u}_1] = [4/k^{(2)}], \quad \mathbf{f}_F = \begin{bmatrix} -4 \\ 10 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{d}_F = \begin{bmatrix} u_2 \\ u_3 \end{bmatrix}.$$

As incógnitas nesse sistema de equações são \mathbf{d}_F e \mathbf{r}_E , enquanto $\bar{\mathbf{d}}_E$, \mathbf{f}_F , $k^{(1)}$ e $k^{(2)}$ são conhecidas. Se escrevermos a segunda linha da Equação (2.29), teremos

$$\mathbf{K}_{EF}^T \bar{\mathbf{d}}_E + \mathbf{K}_F \mathbf{d}_F = \mathbf{f}_F.$$

Se subtraímos o primeiro termo de ambos os lados da equação anterior e pré-multiplicamos por \mathbf{K}_F^{-1} , obteremos

$$\mathbf{d}_F = \mathbf{K}_F^{-1} (\mathbf{f}_F - \mathbf{K}_{EF}^T \bar{\mathbf{d}}_E). \quad (2.30)$$

Essa equação nos permite obter os deslocamentos nodais desconhecidos. A partição também nos permite obter a força de reação, \mathbf{r}_E . Escrevendo a primeira linha de (2.29), obtemos

$$\mathbf{r}_E = \mathbf{K}_E \bar{\mathbf{d}}_E + \mathbf{K}_{EF} \mathbf{d}_F. \quad (2.31)$$

Como $\bar{\mathbf{d}}_E$ é conhecido da Equação (2.30), podemos avaliar o segundo membro da equação anterior para obter a reação \mathbf{r}_E .

Para o problema das duas barras, a solução dos deslocamentos desconhecidos pela Equação (2.30) usando (2.29) gera

$$\begin{bmatrix} u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k^{(1)} + k^{(2)} & -k^{(1)} \\ -k^{(1)} & k^{(1)} \end{bmatrix}^{-1} \left\{ \begin{bmatrix} -4 \\ 10 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -k^{(2)} \\ 0 \end{bmatrix} [4/k^{(2)}] \right\},$$

que fornece

$$u_2 = \frac{10}{k^{(2)}}, \quad u_3 = 10 \left(\frac{1}{k^{(1)}} + \frac{1}{k^{(2)}} \right).$$

A força de reação é encontrada da Equação (2.31) e é dada por

$$r_1 = -6.$$

Pode ser mostrado que \mathbf{K}_F é definido positivo (veja Problema 12.3 no Capítulo 12).

O segundo método para imposição das condições de contorno do deslocamento consiste em substituir as equações correspondentes aos deslocamentos prescritos por equações triviais que ajustam os deslocamentos nodais aos seus valores corretos, ou em cálculos manuais, para modificá-los todos juntos. Pomos o produto da primeira coluna de \mathbf{K} e \bar{u}_1 no segundo membro e substituímos a primeira equação por $u_1 = \bar{u}_1$. Isso leva a

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & k^{(1)} + k^{(2)} & -k^{(1)} \\ 0 & -k^{(1)} & k^{(1)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{u}_1 \\ -4 - (-k^{(2)})\bar{u}_1 \\ 10 - (0)\bar{u}_1 \end{bmatrix}. \quad (2.32)$$

Novamente, pode-se ver que as equações anteriores podem ser resolvidas manualmente considerando apenas as duas últimas equações.

As reações podem ser então calculadas pela avaliação das linhas das equações totais de rigidez que dão as reações. Da linha 1 da Equação (2.29), obtemos

$$r_1 = \begin{bmatrix} k^{(2)} & -k^{(2)} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{u}_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} = -6.$$

O terceiro método para imposição das condições de contorno é o método da *penalidade*. Este é um método muito simples para programar, mas deve ser usado apenas para matrizes de tamanhos moderados (até aproximadamente 10.000 incógnitas) porque ele tende a reduzir o condicionamento das equações (veja Saad [1996] e George e Liu

[1986]). Nesse método, os deslocamentos prescritos são impostos pondo um número muito grande na entrada correspondente ao deslocamento prescrito. Assim, para o exemplo considerado, mudamos as equações para

$$\begin{bmatrix} \beta & -k^{(2)} & 0 \\ -k^{(2)} & k^{(1)} + k^{(2)} & -k^{(1)} \\ 0 & -k^{(1)} & k^{(1)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \beta \bar{u}_1 \\ -4 \\ 10 \end{bmatrix}, \quad (2.33)$$

onde β é um número muito grande. Por exemplo, em um computador com oito dígitos de precisão, tomamos $\beta \sim 10^7$ em média (K_{ii}). Os outros termos na linha 1 e na coluna 1 então ficam irrelevantes porque eles são muito menores que o termo da primeira diagonal, e as equações são quase idênticas àquelas de (2.32).

O método pode ser fisicamente compreendido em análises de tensões como na união de uma mola muito rígida entre o nó 1 e o suporte, o qual é deslocado por \bar{u}_1 . A mola rígida então força o nó 1 a mover-se com o suporte. O método da penalidade é mais facilmente compreendido quando $\bar{u}_1 = 0$; nesse caso, ele corresponde a uma mola presa a um suporte estacionário e o deslocamento do nó 1 é muito pequeno. As reações podem ser avaliadas como foi feito para os métodos anteriores. Entraremos em detalhes sobre o método da penalidade nos Capítulos 3 e 5.

Exemplo 2.1

Três barras estão unidas como mostrado na Figura 2.9. As extremidades esquerda e direita são fixas, isto é, o deslocamento prescrito vale zero para ambas as extremidades. Há uma força de 5 N atuando sobre o nó intermediário. Os nós são numerados a partir daqueles onde os deslocamentos são prescritos. As matrizes de rigidez dos elementos são

$$\mathbf{K}^{(1)} = \begin{bmatrix} [1] & [3] \\ k^{(1)} & -k^{(1)} \\ -k^{(1)} & k^{(1)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} [1] \\ [3] \end{bmatrix}, \quad \mathbf{K}^{(2)} = \begin{bmatrix} [1] & [3] \\ k^{(2)} & -k^{(2)} \\ -k^{(2)} & k^{(2)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} [1] \\ [3] \end{bmatrix}, \quad \mathbf{K}^{(3)} = \begin{bmatrix} [3] & [2] \\ k^{(3)} & -k^{(3)} \\ -k^{(3)} & k^{(3)} \end{bmatrix}$$

onde os índices globais correspondentes aos nós estão indicados acima de cada coluna e à direita de cada linha.

Pela montagem direta, a matriz global de rigidez é

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} [1] & [2] & [3] \\ k^{(1)} + k^{(2)} & 0 & -k^{(1)} - k^{(2)} \\ 0 & k^{(3)} & -k^{(3)} \\ -k^{(1)} - k^{(2)} & -k^{(3)} & k^{(1)} + k^{(2)} + k^{(3)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} [1] \\ [2] \\ [3] \end{bmatrix}$$

As matrizes de deslocamento e de força são

$$\mathbf{d} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ u_3 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{f} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 5 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{r} = \begin{bmatrix} r_1 \\ r_2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

O sistema global de equações é dado por

$$\begin{bmatrix} k^{(1)} + k^{(2)} & 0 & -k^{(1)} - k^{(2)} \\ 0 & k^{(3)} & -k^{(3)} \\ -k^{(1)} - k^{(2)} & -k^{(3)} & k^{(1)} + k^{(2)} + k^{(3)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ u_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_1 \\ r_2 \\ 5 \end{bmatrix}.$$

Como os primeiros dois deslocamentos são prescritos, partimos a matriz depois de duas linhas e duas colunas

$$\left[\begin{array}{cc|cc} k^{(1)} + k^{(2)} & 0 & -k^{(1)} - k^{(2)} & \\ \hline 0 & k^{(3)} & -k^{(3)} & \\ \hline -k^{(1)} - k^{(2)} & -k^{(3)} & k^{(1)} + k^{(2)} + k^{(3)} & \end{array} \right] \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ u_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_1 \\ r_2 \\ 5 \end{bmatrix}$$

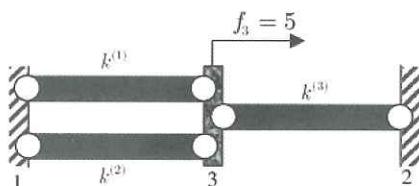


Figura 2.9 Exemplo de problema com três barras.

ou

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K}_E & \mathbf{K}_{EF} \\ \mathbf{K}_{EF}^T & \mathbf{K}_F \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{d}}_E \\ \mathbf{d}_F \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{r}_E \\ \mathbf{f}_F \end{bmatrix},$$

onde

$$\mathbf{K}_E = \begin{bmatrix} k^{(1)} + k^{(2)} & 0 \\ 0 & k^{(3)} \end{bmatrix} \quad \mathbf{K}_F = [k^{(1)} + k^{(2)} + k^{(3)}] \quad \mathbf{K}_{EF} = \begin{bmatrix} -k^{(1)} - k^{(2)} \\ -k^{(3)} \end{bmatrix}$$

$$\bar{\mathbf{d}}_E = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{d}_F = [u_3] \quad \mathbf{f}_F = [5] \quad \mathbf{r}_E = \begin{bmatrix} r_1 \\ r_2 \end{bmatrix}$$

O sistema reduzido de equações é dado por

$$(k^{(1)} + k^{(2)} + k^{(3)})u_3 = 5,$$

que leva a

$$u_3 = \frac{5}{k^{(1)} + k^{(2)} + k^{(3)}}.$$

2.3 APLICAÇÕES A OUTROS SISTEMAS LINEARES¹

Os métodos descritos para barras unidimensionais podem também ser usados diretamente para outros sistemas. Para os métodos serem aplicáveis, os sistemas devem ser caracterizadas por

1. uma lei de balanço ou conservação para o fluxo;
2. uma lei linear relacionando o fluxo ao potencial;
3. um potencial contínuo (isto é, um potencial compatível)

Dois exemplos são descritos a seguir: escoamento de cargas elétricas em regime permanente em um circuito e escoamento de fluido em um sistema de tubulação hidráulica.

Em um sistema elétrico, o potencial é a voltagem e o fluxo é a corrente. Um elemento de um circuito é mostrado na Figura 2.10. Pela lei de Ohm, a corrente do nó 1 para o nó 2 é dada por

$$i_2^e = \frac{e_2^e - e_1^e}{R^e}, \tag{2.34}$$

onde e_2^e e e_1^e são as voltagens (potenciais) nos nós e R^e é a resistência do fio. Essa é a lei linear entre o fluxo e o potencial. Pela lei de conservação da carga, se a corrente está em regime permanente,

$$i_1^e + i_2^e = 0, \tag{2.35}$$

que é a primeira das condições anteriores sobre o elemento em questão. Escrevendo (2.34) e (2.35) na forma matricial, temos

$$\underbrace{\begin{bmatrix} i_1^e \\ i_2^e \end{bmatrix}}_{\mathbf{f}^e} = \frac{1}{R^e} \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}}_{\mathbf{K}^e} \underbrace{\begin{bmatrix} e_1^e \\ e_2^e \end{bmatrix}}_{\mathbf{d}^e}. \tag{2.36}$$

A continuidade da voltagem nos nós é forçada por

$$\mathbf{d}^e = \mathbf{L}^e \mathbf{d}. \tag{2.37}$$

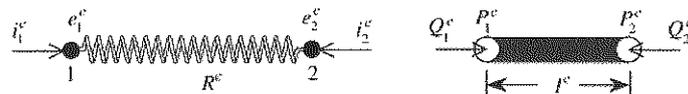


Figura 2.10 Um elemento de resistência para um circuito e um elemento para uma rede de bombeamento; o fluxo nodal é positivo quando ele sai do domínio do elemento.

¹Recomendado para trajetórias de Ciência e Engenharia.

O balanço de corrente nos nós dá

$$\sum_{e=1}^{n_{el}} \mathbf{L}^e \mathbf{T} \mathbf{F}^e = \mathbf{f} + \mathbf{r} \quad (2.38)$$

Detalhes podem ser vistos no Exemplo 2.2.

O sistema de equações pode então ser obtido forçando a condição de que a soma das correntes em qualquer nó é igual para quaisquer fontes externas de correntes. O processo é idêntico ao que fizemos para os elementos de barra.

$$\begin{aligned} \mathbf{f} + \mathbf{r} &= \sum_{e=1}^{n_{el}} \mathbf{L}^e \mathbf{T} \mathbf{F}^e && \text{pela Equação (2.38)} \\ &= \sum_{e=1}^{n_{el}} \mathbf{L}^e \mathbf{T} \mathbf{K}^e \mathbf{d}^e && \text{pela Equação (2.36)} \\ &= \underbrace{\sum_{e=1}^{n_{el}} \mathbf{L}^e \mathbf{T} \mathbf{K}^e \mathbf{L}^e}_{\mathbf{K}} \mathbf{d} && \text{pela Equação (2.37)}. \end{aligned}$$

Como indicado pelo destaque, a montagem da matriz do sistema é dada por

$$\mathbf{K} = \sum_{e=1}^{n_{el}} \mathbf{L}^e \mathbf{T} \mathbf{K}^e \mathbf{L}^e. \quad (2.39)$$

Esse sistema é obtido pela seqüência das operações de dispersão dos coeficientes e de adição das matrizes, que corresponde à montagem direta.

Para um sistema de tubos, um procedimento similar pode ser desenvolvido se a vazão de escoamento for linearmente relacionada com a queda de pressão entre dois pontos. Um modelo de circuito é construído como mostrado na Figura 2.11. Nós são necessários apenas onde dois tubos se conectam ou onde o fluido é retirado ou acrescentado. Em cada elemento, a vazão nodal Q_1^e que sai do nó é proporcional à queda de pressão nodal ($P_2^e - P_1^e$) (veja Figura 2.10), assim

$$Q_2^e = \kappa^e (P_2^e - P_1^e), \quad (2.40)$$

onde κ^e depende da área da seção transversal do tubo, da viscosidade do fluido e do comprimento do elemento. Leis lineares deste tipo aplicam-se sobre uma grande faixa de escoamentos.

A conservação de fluido em um elemento é expressa por

$$Q_1^e + Q_2^e = 0. \quad (2.41)$$

As equações do sistema são então obtidas ao escrever a equação para a conservação de fluido nos nós e ao usar a continuidade do campo de pressão. O processo é idêntico àquele usado na obtenção da Equação (2.39). Isso é deixado como um exercício, embora fique evidente no exemplo.

A similaridade desses diferentes sistemas é surpreendente e pode fornecer uma compreensão mais profunda dos sistemas lineares. Todos esses sistemas possuem um potencial e uma lei de conservação. Na mecânica da barra, o potencial não é tão óbvio: ele é o deslocamento. O deslocamento tem todas as propriedades de um potencial: ele precisa ser contínuo (compatível) e sua mudança determina o fluxo, que nesse caso é a tensão.

Exemplo 2.2

Prepare as equações discretas para os sistemas mostrados na Figura 2.11 e resolva-as. Todos os três sistemas mostrados na Figura 2.11 têm a mesma topologia básica, isto é, a mesma relação entre nós e elementos. Primeiro, montamos a matriz do sistema pela dispersão dos coeficientes e da adição das matrizes. Então, as equações específicas são preparadas, forçando constantes no fluxo ou no potencial. Usamos $k^e = \frac{1}{R^e} = \kappa^e$ para denotar os coeficientes dos elementos para os três diferentes sistemas.

As operações de dispersão dos coeficientes das matrizes geram então o seguinte (I e J dão os índices globais nodais do elemento):

Elemento 1, $I = 1, J = 4$:

$$\mathbf{K}^{(1)} = k^{(1)} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \bar{\mathbf{K}}^{(1)} = \begin{bmatrix} k^{(1)} & 0 & 0 & -k^{(1)} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -k^{(1)} & 0 & 0 & k^{(1)} \end{bmatrix}.$$

Elemento 2, $I = 4, J = 2$:

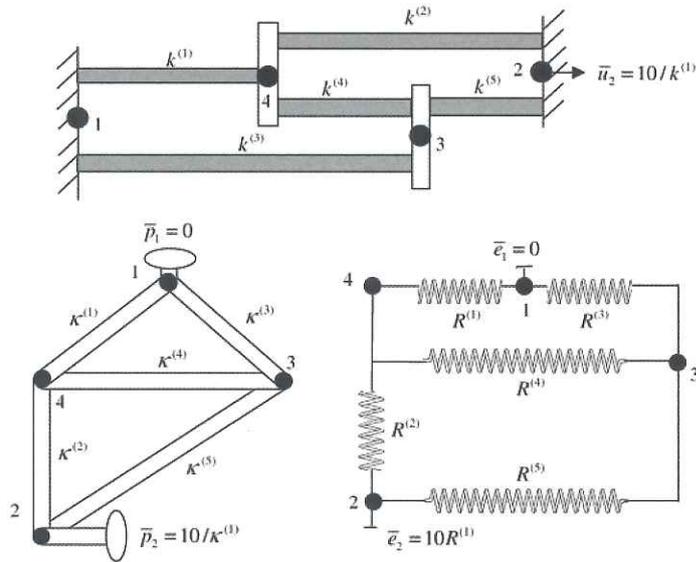


Figura 2.11 Exemplo 2.2: sistemas mecânico, elétrico e hidráulico com uma estrutura de rede idêntica.

$$\mathbf{K}^{(2)} = k^{(2)} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \tilde{\mathbf{K}}^{(2)} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & k^{(2)} & 0 & -k^{(2)} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -k^{(2)} & 0 & k^{(2)} \end{bmatrix}$$

Elemento 3, $I = 1, J = 3$:

$$\mathbf{K}^{(3)} = k^{(3)} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \tilde{\mathbf{K}}^{(3)} = \begin{bmatrix} k^{(3)} & 0 & -k^{(3)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -k^{(3)} & 0 & k^{(3)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Elemento 4, $I = 4, J = 3$:

$$\mathbf{K}^{(4)} = k^{(4)} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \tilde{\mathbf{K}}^{(4)} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & k^{(4)} & -k^{(4)} \\ 0 & 0 & -k^{(4)} & k^{(4)} \end{bmatrix}$$

Elemento 5, $I = 3, J = 2$:

$$\mathbf{K}^{(5)} = k^{(5)} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \tilde{\mathbf{K}}^{(5)} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & k^{(5)} & -k^{(5)} & 0 \\ 0 & -k^{(5)} & k^{(5)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Matriz global do sistema:

$$\mathbf{K} = \sum_{e=1}^5 \tilde{\mathbf{K}}^e = \begin{bmatrix} k^{(1)} + k^{(3)} & 0 & -k^{(3)} & -k^{(1)} \\ 0 & k^{(2)} + k^{(5)} & -k^{(5)} & -k^{(2)} \\ -k^{(3)} & -k^{(5)} & k^{(3)} + k^{(4)} + k^{(5)} & -k^{(4)} \\ -k^{(1)} & -k^{(2)} & -k^{(4)} & k^{(1)} + k^{(2)} + k^{(4)} \end{bmatrix}$$

Equações para o sistema mecânico:

$$\begin{bmatrix} k^{(1)} + k^{(3)} & 0 & -k^{(3)} & -k^{(1)} \\ 0 & k^{(2)} + k^{(5)} & -k^{(5)} & -k^{(2)} \\ -k^{(3)} & -k^{(5)} & k^{(3)} + k^{(4)} + k^{(5)} & -k^{(4)} \\ -k^{(1)} & -k^{(2)} & -k^{(4)} & k^{(1)} + k^{(2)} + k^{(4)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{d}}_E \\ \bar{\mathbf{d}}_F \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{r}_E \\ \mathbf{f}_F \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_1 \\ r_2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

onde a matriz solução para o sistema mecânico, de tubos e elétrico é

$$\mathbf{d}_F = \begin{bmatrix} u_3 \\ u_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_3 \\ p_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e_3 \\ e_4 \end{bmatrix}, \quad \bar{\mathbf{d}}_E = \begin{bmatrix} \bar{u}_1 \\ \bar{u}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{p}_1 \\ \bar{p}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{e}_1 \\ \bar{e}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 10/k^{(1)} \end{bmatrix}$$

A partição da matriz anterior após duas linhas e duas colunas fornece

$$\begin{bmatrix} k^{(3)} + k^{(4)} + k^{(5)} & -k^{(4)} \\ -k^{(4)} & k^{(1)} + k^{(2)} + k^{(4)} \end{bmatrix} \mathbf{d}_F = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} - \frac{10}{k^{(1)}} \begin{bmatrix} -k^{(5)} \\ -k^{(2)} \end{bmatrix}$$

Fazendo $k^e = 1$ para $e = 1$ a 5 e resolvendo a equação anterior, obtemos

$$\mathbf{d}_F = \begin{bmatrix} u_3 \\ u_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_3 \\ p_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e_3 \\ e_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 5 \end{bmatrix}$$

2.4 SISTEMAS DE TRELIÇAS BIDIMENSIONAIS²

Estruturas de treliças, como a mostrada na Figura 2.1, consistem em elementos de barras posicionados sob ângulos arbitrários no espaço e ligados por uniões parecidas a pinos que não podem transmitir momentos. Para analisar tais estruturas de treliças em geral, é necessário desenvolver uma matriz de rigidez de elemento para um elemento de barra alinhado arbitrariamente em duas ou três dimensões espaciais. Primeiramente, vamos considerar o caso bidimensional, no qual os elementos de barra estão no plano xy mostrado na Figura 2.2(b). As treliças diferenciam-se dos circuitos, tais como nos sistemas elétricos em que os deslocamentos nodais em problemas multidimensionais são vetores. As incógnitas do sistema são então as componentes do vetor, de forma que o número de incógnitas por nó é 2 e 3 em duas e três dimensões, respectivamente.

Começaremos pelo desenvolvimento da matriz de rigidez do elemento para um elemento de barra em duas dimensões. Um elemento de barra genérico é mostrado na Figura 2.12, juntamente com deslocamentos nodais e forças nodais. Em cada nó, a força nodal tem duas componentes; de modo similar, como pode ser visto na Figura 2.12, cada deslocamento nodal tem duas componentes, de modo que as matrizes de força e de deslocamento dos elementos são, respectivamente,

$$\mathbf{F}^e = [F_{1x}^e \ F_{1y}^e \ F_{2x}^e \ F_{2y}^e]^T \quad \text{e} \quad \mathbf{d}^e = [d_{1x}^e \ d_{1y}^e \ d_{2x}^e \ d_{2y}^e]^T.$$

Para obter uma relação geral entre as forças internas \mathbf{F}^e e os deslocamentos \mathbf{d}^e , vamos iniciar com as equações de rigidez no sistema de coordenadas locais x'^e, y'^e ; como mostrado na Figura 2.12, x'^e é alinhado junto à direção axial do elemento de barra e é positivo do nó 1 para o nó 2. O ângulo ϕ^e é definido como positivo no sentido anti-horário.

No sistema de coordenadas (x'^e, y'^e), a rigidez do elemento dada pela Equação (2.10) aplica-se, portanto

$$\begin{bmatrix} k^e & -k^e \\ -k^e & k^e \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{1x}'^e \\ u_{2x}'^e \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_{1x}'^e \\ F_{2x}'^e \end{bmatrix}.$$

A equação anterior pode ser expandida pela adição das equações $F_{1y}'^e = F_{2y}'^e = 0$. Essas componentes de força nodal perpendicular ao eixo do elemento podem ser consideradas nulas porque consideramos que o elemento é tão delgado que os esforços de cisalhamento são desprezíveis.

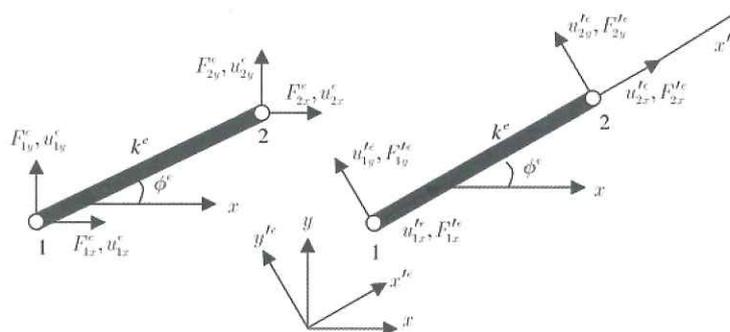


Figura 2.12 Elemento de treliça em duas dimensões em um sistema de coordenadas locais x'_1, y'_1 .

²Recomendado para a trajetória de Mecânica Estrutural.

Segundo a teoria para pequenos deslocamentos, as forças nodais no elemento são independentes dos deslocamentos normais. Isso se justifica porque a elongação é uma função quadrática do deslocamento nodal normal à barra. Como os deslocamentos nodais são considerados pequenos, o efeito dos deslocamentos normais sobre a elongação é, por isso, de segunda ordem, e daí os efeitos dessas componentes de deslocamentos sobre a tensão e a deformação podem ser desprezados. Assim, a matriz de rigidez no sistema de coordenadas do elemento é dada por

$$\underbrace{\begin{bmatrix} F_{1x}^{e'} \\ F_{1y}^{e'} \\ F_{2x}^{e'} \\ F_{2y}^{e'} \end{bmatrix}}_{\mathbf{F}^{e'}} = k^e \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}}_{\mathbf{K}^{e'}} \underbrace{\begin{bmatrix} u_{1x}^{e'} \\ u_{1y}^{e'} \\ u_{2x}^{e'} \\ u_{2y}^{e'} \end{bmatrix}}_{\mathbf{d}^{e'}}$$

ou em termos da nomenclatura de sobrescritos

$$\mathbf{F}^{e'} = \mathbf{K}^{e'} \mathbf{d}^{e'} \quad (2.42)$$

É fácil ver que para essa matriz de rigidez, as componentes y^e das forças nos dois nós sempre desaparecem e que as componentes y^e dos deslocamentos não têm efeito nas forças nodais; a matriz de rigidez em (2.42) é simplesmente a matriz (2.11) embutida em uma matriz de zeros. Em outras palavras, vamos simplesmente dispersar os coeficientes de rigidez axial da barra em uma matriz maior; isso é válido quando o sistema de coordenadas é alinhado com o eixo do elemento.

Para os nós ($I = 1, 2$), a relação entre as componentes dos deslocamentos nos sistemas de duas coordenadas, mostrado na Figura 2.12, é obtida por meio da relação para transformações vetoriais:

$$\begin{aligned} u_{Ix}^{e'} &= u_{Ix}^e \cos \phi^e + u_{Iy}^e \sin \phi^e \\ u_{Iy}^{e'} &= -u_{Ix}^e \sin \phi^e + u_{Iy}^e \cos \phi^e \end{aligned}$$

Essas equações podem ser escritas na forma matricial como a seguir:

$$\mathbf{d}^{e'} = \mathbf{R}^e \mathbf{d}^e, \quad (2.43)$$

onde

$$\mathbf{d}^e = \begin{bmatrix} u_{1x}^e \\ u_{1y}^e \\ u_{2x}^e \\ u_{2y}^e \end{bmatrix}, \quad \mathbf{R}^e = \begin{bmatrix} \cos \phi^e & \sin \phi^e & 0 & 0 \\ -\sin \phi^e & \cos \phi^e & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos \phi^e & \sin \phi^e \\ 0 & 0 & -\sin \phi^e & \cos \phi^e \end{bmatrix}$$

\mathbf{R}^e é a matriz rotacional. As duas equações anteriores combinam a transformação vetorial em dois nós. Como essas transformações são independentes uma da outra, os blocos da matriz relacionando diferentes nós são nulos; por exemplo, bloco superior direito 2×2 é nulo, pois os componentes dos elementos dos deslocamentos nodais no 1 são independentes dos deslocamentos no nó 2.

Observe que \mathbf{R}^e é uma matriz ortogonal: a sua inversa é igual a sua transposta, isto é, $(\mathbf{R}^e)^T \mathbf{R}^e = \mathbf{R}^e (\mathbf{R}^e)^T = \mathbf{I}$ ou

$$(\mathbf{R}^e)^{-1} = \mathbf{R}^{eT}. \quad (2.44)$$

Pré-multiplicando a Equação (2.43) por $(\mathbf{R}^e)^T$, obtemos

$$\mathbf{R}^{eT} \mathbf{d}^{e'} = \mathbf{R}^{eT} \mathbf{R}^e \mathbf{d}^e = \mathbf{d}^e,$$

onde a segunda igualdade decorre da relação de ortogonalidade (2.44). Os componentes das matrizes de força dos elementos estão relacionadas pela mesma regra de transformação de componentes:

$$(a) \quad \mathbf{F}^{e'} = \mathbf{R}^e \mathbf{F}^e, \quad (b) \quad \mathbf{F}^e = \mathbf{R}^{eT} \mathbf{F}^{e'}. \quad (2.45)$$

Estamos agora em condições de determinar a relação entre \mathbf{F}^e e \mathbf{d}^e . Iniciando com (2.45b),

$$\begin{aligned} \mathbf{F}^e &= \mathbf{R}^{eT} \mathbf{F}^{e'} && \text{pela Equação (2.45b)} \\ &= \mathbf{R}^{eT} \mathbf{K}^{e'} \mathbf{d}^{e'} && \text{pela Equação (2.42)} \\ &= \underbrace{\mathbf{R}^{eT} \mathbf{K}^{e'} \mathbf{R}^e}_{\mathbf{K}^e} \mathbf{d}^e && \text{pela Equação (2.43)} \end{aligned}$$

O termo destacado, indicado anteriormente, é a rigidez do elemento no sistema de coordenadas globais:

$$\mathbf{K}^e = \mathbf{R}^{eT} \mathbf{K}^{e'} \mathbf{R}^e. \quad (2.46)$$

Uma expressão explícita para \mathbf{K}^e é obtida pela substituição das expressões matriciais para \mathbf{K}^e e \mathbf{R}^e na Equação (2.46), que fornece

$$\mathbf{K}^e = k^e \begin{bmatrix} \cos^2 \phi^e & \cos \phi^e \sin \phi^e & -\cos^2 \phi^e & -\cos \phi^e \sin \phi^e \\ \cos \phi^e \sin \phi^e & \sin^2 \phi^e & -\cos \phi^e \sin \phi^e & -\sin^2 \phi^e \\ -\cos^2 \phi^e & -\cos \phi^e \sin \phi^e & \cos^2 \phi^e & \cos \phi^e \sin \phi^e \\ -\cos \phi^e \sin \phi^e & -\sin^2 \phi^e & \cos \phi^e \sin \phi^e & \sin^2 \phi^e \end{bmatrix}. \quad (2.47)$$

Pode ser visto que \mathbf{K}^e é uma matriz simétrica.

2.5 LEI DA TRANSFORMAÇÃO³

Na seqüência, vamos desenvolver um método mais geral para transformação de matrizes de rigidez por meio de conceitos de energia. Aqui, transformação significa uma rotação de um sistema de coordenadas para outro ou uma operação de dispersão de coeficientes de um elemento para o sistema global de coordenadas. Denotaremos tal transformação matricial por \mathbf{T}^e . A matriz \mathbf{T}^e transforma a matriz de deslocamento do elemento de um sistema de coordenadas em que a relação de rigidez $\bar{\mathbf{K}}^e$ é conhecida para outro sistema de coordenadas no qual a matriz de rigidez $\hat{\mathbf{K}}^e$ não é conhecida. Começamos com

$$(a) \quad \hat{\mathbf{d}}^e = \mathbf{T}^e \bar{\mathbf{d}}^e, \quad (b) \quad \hat{\mathbf{F}}^e = \hat{\mathbf{K}}^e \hat{\mathbf{d}}^e. \quad (2.48)$$

No caso de rotação de um sistema de coordenadas para outro (Seção 2.4), $\hat{\mathbf{d}}^e = \mathbf{R}^e \bar{\mathbf{d}}^e$, de modo que $\mathbf{T}^e = \mathbf{R}^e$, $\hat{\mathbf{d}}^e = \bar{\mathbf{d}}^e$ e $\bar{\mathbf{d}}^e = \hat{\mathbf{d}}^e$; no caso da operação de dispersão de coeficientes (Seção 2.2), $\hat{\mathbf{d}}^e = \mathbf{L}^e \bar{\mathbf{d}}^e$, de modo que $\mathbf{T}^e = \mathbf{L}^e$, $\bar{\mathbf{d}}^e = \hat{\mathbf{d}}^e$ e $\bar{\mathbf{d}}^e = \hat{\mathbf{d}}^e$. Na seqüência, descreveremos como relacionar $\bar{\mathbf{F}}^e$ a $\hat{\mathbf{F}}^e$ e como estabelecer a relação de rigidez $\bar{\mathbf{K}}^e = \hat{\mathbf{K}}^e \mathbf{T}^e$.

Vamos considerar que $\hat{\mathbf{F}}^e$ é a matriz de força interna do elemento e $\delta \hat{\mathbf{d}}^e$ é uma matriz de deslocamento arbitrário e infinitesimal do elemento. As forças nodais internas precisam ser escolhidas de modo que o trabalho realizado pelas forças internas, denotado por δW_{int}^e , seja dado por

$$\delta W_{\text{int}}^e = \delta \hat{\mathbf{d}}^e \mathbf{T}^e \hat{\mathbf{F}}^e. \quad (2.49)$$

Observe que $\delta \hat{\mathbf{d}}^e$ tem que ser infinitesimal para que a matriz de força interna $\hat{\mathbf{F}}^e$ permaneça constante quando o elemento deforma. Por exemplo, para o elemento de dois nós em uma dimensão, o trabalho realizado pelo elemento é $\delta W_{\text{int}}^e = \delta u_1^e \hat{F}_1^e + \delta u_2^e \hat{F}_2^e$.

Agora, mostraremos que se (2.48) se verifica, então

$$\bar{\mathbf{K}}^e = \mathbf{T}^e \mathbf{T}^e \hat{\mathbf{K}}^e \mathbf{T}^e. \quad (2.50)$$

Primeiro, vamos mostrar que se (2.48) se verifica então

$$\bar{\mathbf{F}}^e = \mathbf{T}^e \mathbf{T}^e \hat{\mathbf{F}}^e. \quad (2.51)$$

O conceito chave que torna essa prova possível é que o trabalho interno expresso em termos de $\delta \hat{\mathbf{d}}^e$ e $\hat{\mathbf{F}}^e$ precisa igualar-se ao trabalho interno expresso em termos de $\delta \bar{\mathbf{d}}^e$ e $\bar{\mathbf{F}}^e$, de modo que

$$\delta W_{\text{int}}^e = \delta \hat{\mathbf{d}}^e \mathbf{T}^e \hat{\mathbf{F}}^e = \delta \bar{\mathbf{d}}^e \mathbf{T}^e \hat{\mathbf{F}}^e. \quad (2.52)$$

Vejam porque isso precisa ser verdade. Vamos substituir a primeira parte de (2.48) em (2.52), o que fornece

$$\delta W_{\text{int}}^e = \delta \bar{\mathbf{d}}^e \mathbf{T}^e \hat{\mathbf{F}}^e = \delta \bar{\mathbf{d}}^e \mathbf{T}^e \mathbf{T}^e \hat{\mathbf{F}}^e. \quad (2.53)$$

Rearranjando os termos dessa equação, obtemos

$$\delta \bar{\mathbf{d}}^e \mathbf{T}^e (\hat{\mathbf{F}}^e - \mathbf{T}^e \mathbf{T}^e \hat{\mathbf{F}}^e) = 0. \quad (2.54)$$

Como essa equação precisa ser verificada para qualquer $\delta \bar{\mathbf{d}}^e$, o resultado (2.51) vem do teorema do produto escalar de vetores (veja Apêndice A2).

A seguir, provamos a relação (2.50) como se segue:

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{F}}^e &= \mathbf{T}^e \mathbf{T}^e \hat{\mathbf{F}}^e && \text{de (2.51)} \\ &= \mathbf{T}^e \mathbf{T}^e \hat{\mathbf{K}}^e \hat{\mathbf{d}}^e && \text{pela (2.48b)} \\ &= \underbrace{\mathbf{T}^e \mathbf{T}^e \hat{\mathbf{K}}^e \mathbf{T}^e}_{\mathbf{K}} \bar{\mathbf{d}}^e && \text{pela (2.48a)}. \end{aligned}$$

³Opcional para todas as trajetórias.

Como a última linha dessa expressão define a matriz transformada de rigidez do elemento, (2.50) está provada.

A prova apresentada é baseada no fato de que quaisquer duas representações válidas para um elemento precisam ser consistentes do ponto de vista da energia, isto é, o elemento precisa absorver a mesma quantidade de energia independente do sistema de coordenadas no qual ele é descrito. Uma forma de explicar isso é demonstrando que a energia é um escalar, de modo que é independente do alinhamento do sistema de coordenadas. Variáveis físicas escalares, como pressão, temperatura e energia, não dependem do sistema de deformação que é escolhido. Além disso, a energia tem que ser independente dos modos generalizados de deformação que são usados para descrever a deformação do sistema. A energia tem um papel único e muito importante na física e na mecânica: a sua invariância com respeito ao referencial de análise do problema leva a resultados importantes, tais como o princípio do trabalho virtual e o teorema da energia potencial mínima, e isso aparece em todas as partes nas análises por elementos finitos.

Exemplo 2.3

A Figura 2.13 mostra propriedades de materiais, geometria, cargas e condições de contorno da estrutura de duas barras. Neste exemplo, enfatizamos os quatro principais passos no método de elementos finitos (MEF), a saber: (1) pré-processamento, (2) construção do comportamento local (elemento), (3) montagem das matrizes locais para obter o comportamento global e (4) pós-processamento.

O passo 1, mostrado na Figura 2.13, consiste em subdividir a estrutura em elementos, assinalando os números dos elementos para cada barra, e os números dos nós para cada junção, começando com os nós nos quais os deslocamentos são prescritos. O modelo dos elementos finitos consiste em dois elementos numerados 1 e 2 e três nós.

O passo 2 trata da formulação de cada elemento começando com o elemento 1.

Elemento 1:

O elemento 1 está numerado com os nós globais 1 e 3. Ele é posicionado segundo o ângulo $\phi^{(1)} = 90^\circ$ com respeito à direção positiva do eixo x como mostrado na Figura 2.14. As outras relações são as seguintes:

$$\cos 90^\circ = 0, \quad \sin 90^\circ = 1, \quad l^{(1)} = l, \quad k^{(1)} = \frac{A^{(1)}E^{(1)}}{l^{(1)}} = \frac{AE}{l},$$

$$\mathbf{K}^{(1)} = \frac{AE}{l} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{matrix} [1] \\ [3] \\ [1] \\ [3] \end{matrix}$$

Elemento 2:

O elemento 2 está numerado com os nós globais 2 e 3. Ele está posicionado em um ângulo $\phi^{(2)} = 45^\circ$ com respeito à direção positiva do eixo x , como mostrado na Figura 2.14. As outras relações são as seguintes:

$$\cos 45^\circ = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad \sin 45^\circ = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad l^{(2)} = \sqrt{2}l,$$

$$k^{(2)} = \frac{A^{(2)}E^{(2)}}{l^{(2)}} = \frac{AE}{\sqrt{2}l},$$

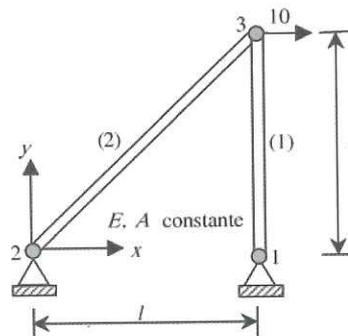


Figura 2.13 Estrutura de treliça com dois elementos.

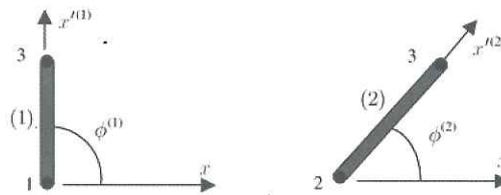


Figura 2.14 Sistema de coordenadas local (elemento) e global.

$$\mathbf{K}^{(2)} = \frac{AE}{\sqrt{2}l} \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{matrix} [2] \\ [2] \\ [3] \\ [3] \end{matrix}$$

Passo 3: trata da construção do comportamento global.

(3a) Montagem direta:

$$\mathbf{K} = \frac{AE}{l} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2\sqrt{2}} & \frac{1}{2\sqrt{2}} & -\frac{1}{2\sqrt{2}} & -\frac{1}{2\sqrt{2}} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2\sqrt{2}} & \frac{1}{2\sqrt{2}} & -\frac{1}{2\sqrt{2}} & -\frac{1}{2\sqrt{2}} \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2\sqrt{2}} & -\frac{1}{2\sqrt{2}} & \frac{1}{2\sqrt{2}} & \frac{1}{2\sqrt{2}} \\ 0 & -1 & -\frac{1}{2\sqrt{2}} & -\frac{1}{2\sqrt{2}} & \frac{1}{2\sqrt{2}} & 1 + \frac{1}{2\sqrt{2}} \end{bmatrix} \begin{matrix} [1] \\ [2] \\ [2] \\ [2] \\ [3] \\ [3] \end{matrix}$$

e

$$\mathbf{d} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ u_{3x} \\ u_{3y} \end{bmatrix} \quad \mathbf{f} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 10 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{r} = \begin{bmatrix} r_{1x} \\ r_{1y} \\ r_{2x} \\ r_{2y} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Mais uma vez observamos que se a componente da força externa em um nó é prescrita, então a componente correspondente do deslocamento nesse nó é desconhecida. Por outro lado, se uma componente do deslocamento em um nó é prescrita, então a componente que corresponde à força nesse nó é desconhecida.

(3b) Sistema global de equações:

$$\frac{AE}{l} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2\sqrt{2}} & \frac{1}{2\sqrt{2}} & -\frac{1}{2\sqrt{2}} & -\frac{1}{2\sqrt{2}} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2\sqrt{2}} & \frac{1}{2\sqrt{2}} & -\frac{1}{2\sqrt{2}} & -\frac{1}{2\sqrt{2}} \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2\sqrt{2}} & -\frac{1}{2\sqrt{2}} & \frac{1}{2\sqrt{2}} & \frac{1}{2\sqrt{2}} \\ 0 & -1 & -\frac{1}{2\sqrt{2}} & -\frac{1}{2\sqrt{2}} & \frac{1}{2\sqrt{2}} & 1 + \frac{1}{2\sqrt{2}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ u_{3x} \\ u_{3y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_{1x} \\ r_{1y} \\ r_{2x} \\ r_{2y} \\ 10 \\ 0 \end{bmatrix}$$

(3c) Sistema global reduzido de equações:

O sistema global é partido depois de quatro linhas e quatro colunas:

$$\bar{\mathbf{d}}_E = \begin{bmatrix} \bar{u}_{1x} \\ \bar{u}_{1y} \\ \bar{u}_{2x} \\ \bar{u}_{2y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{d}_F = \begin{bmatrix} u_{3x} \\ u_{3y} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{f}_F = \begin{bmatrix} 10 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{K}_F = \begin{bmatrix} \frac{1}{2\sqrt{2}} & \frac{1}{2\sqrt{2}} \\ \frac{1}{2\sqrt{2}} & 1 + \frac{1}{2\sqrt{2}} \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{r}_E = \begin{bmatrix} r_{1x} \\ r_{1y} \\ r_{2x} \\ r_{2y} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{K}_{EF} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \\ -\frac{1}{2\sqrt{2}} & -\frac{1}{2\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{2\sqrt{2}} & -\frac{1}{2\sqrt{2}} \end{bmatrix}.$$

A matriz desconhecida dos deslocamentos é encontrada da solução do sistema reduzido de equações

$$\frac{AE}{l} \begin{bmatrix} \frac{1}{2\sqrt{2}} & \frac{1}{2\sqrt{2}} \\ \frac{1}{2\sqrt{2}} & 1 + \frac{1}{2\sqrt{2}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{3x} \\ u_{3y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 \\ 0 \end{bmatrix}$$

e é dada por

$$\begin{bmatrix} u_{3x} \\ u_{3y} \end{bmatrix} = \frac{l}{AE} \begin{bmatrix} 10 + 20\sqrt{2} \\ -10 \end{bmatrix}.$$

A matriz desconhecida \mathbf{r} das reações é

$$\mathbf{r}_E = \begin{bmatrix} r_{1x} \\ r_{1y} \\ r_{2x} \\ r_{2y} \end{bmatrix} = \mathbf{K}_E \bar{\mathbf{d}}_E + \mathbf{K}_{EF} \mathbf{d}_F = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \\ -\frac{1}{2\sqrt{2}} & -\frac{1}{2\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{2\sqrt{2}} & -\frac{1}{2\sqrt{2}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 10 + 20\sqrt{2} \\ -10 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 10 \\ -10 \\ -10 \end{bmatrix}.$$

Podem ser facilmente verificados que as equações de equilíbrio são satisfeitas:

$$\sum F_x = 0, \quad \sum F_y = 0, \quad \sum M_2 = 0.$$

Finalmente, no passo do pós-processamento as tensões nos dois elementos são calculadas como a seguir:

$$\sigma^e = E^e \frac{u_{2x}^e - u_{1x}^e}{l^e} = \frac{E^e}{l^e} [-1 \ 0 \ 1 \ 0] \begin{bmatrix} u_{1x}^e \\ u_{1y}^e \\ u_{2x}^e \\ u_{2y}^e \end{bmatrix} = \frac{E^e}{l^e} [-1 \ 0 \ 1 \ 0] \mathbf{R}^e \mathbf{d}^e$$

$$= \frac{E^e}{l^e} [-\cos \phi^e \quad -\sin \phi^e \quad \cos \phi^e \quad \sin \phi^e] \mathbf{d}^e.$$

Para o elemento 1, temos:

$$\phi^{(1)} = 90^\circ \quad (\cos \phi^{(1)} = 0, \sin \phi^{(1)} = 1),$$

$$\mathbf{d}^{(1)} = \begin{bmatrix} u_{1x} \\ u_{1y} \\ u_{3x} \\ u_{3y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 10 + 20\sqrt{2} \\ -10 \end{bmatrix} \frac{l}{AE},$$

$$\sigma^{(1)} = [0 \quad -1 \ 0 \ 1] \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 10 + 20\sqrt{2} \\ -10 \end{bmatrix} \frac{1}{A} = \frac{-10}{A}.$$

Para o elemento 2, temos:

$$\phi^{(2)} = 45^\circ \quad (\cos \phi^{(2)} = 1/\sqrt{2}, \quad \text{sen} \phi^{(2)} = 1/\sqrt{2}),$$

$$\mathbf{d}^{(2)} = \begin{bmatrix} u_{2x} \\ u_{2y} \\ u_{3x} \\ u_{3y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 10 + 20\sqrt{2} \\ -10 \end{bmatrix} \frac{l}{AE},$$

$$\sigma^{(2)} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} -1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 10 + 20\sqrt{2} \\ -10 \end{bmatrix} \frac{1}{A} = \frac{10\sqrt{2}}{A}.$$

2.6 SISTEMAS DE TRELIÇAS TRIDIMENSIONAIS⁴

Considere um elemento de barra em três dimensões como mostrado na Figura 2.15. Como o elemento tem resistência apenas para deformação em direção a sua extensão, podemos escrever a relação entre as forças nodais e os deslocamentos nodais no sistema de coordenadas locais como

$$\begin{bmatrix} F_{1x}^e \\ F_{2x}^e \end{bmatrix} = k^e \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{1x}^e \\ u_{2x}^e \end{bmatrix}. \quad (2.55)$$

Os graus de liberdade inclusos nessas matrizes de deslocamento e de força são apenas aqueles envolvidos na rigidez do sistema.

O elemento nas três direções terá três graus de liberdade por nó: as componentes de translação nas direções x , y e z , portanto

$$\mathbf{d}^e = [u_{1x}^e \quad u_{1y}^e \quad u_{1z}^e \quad u_{2x}^e \quad u_{2y}^e \quad u_{2z}^e]^T. \quad (2.56)$$

Como a matriz de força precisa ser consistente do ponto de vista da energia,

$$\mathbf{F}^e = [F_{1x}^e \quad F_{1y}^e \quad F_{1z}^e \quad F_{2x}^e \quad F_{2y}^e \quad F_{2z}^e]^T. \quad (2.57)$$

Para obter a equação de rigidez em termos das forças nodais e dos deslocamentos (2.57) e (2.56), respectivamente, vamos agora construir a matriz rotacional \mathbf{R}^e para treliças tridimensionais. Observe que o vetor unitário ao longo do elemento é dado por

$$\vec{i}' = \frac{1}{l^e} (x_{21}^e \vec{i} + y_{21}^e \vec{j} + z_{21}^e \vec{k}), \quad (2.58)$$

onde $x_{21}^e = x_2^e - x_1^e$ e assim por diante. Se tratarmos os deslocamentos nodais como vetores, então

$$u_{1x}^e \vec{i}' + u_{1y}^e \vec{j}' + u_{1z}^e \vec{k}' = u_{1x}^e \vec{i} + u_{1y}^e \vec{j} + u_{1z}^e \vec{k} \quad (2.59)$$

para $I = 1$ e 2.

Tomando um produto escalar dos termos com \vec{i}' dessa expressão, encontramos (devido à ortogonalidade dos vetores unitários) que

$$u_{1x}^e = u_{1x}^e \vec{i} \cdot \vec{i}' + u_{1y}^e \vec{j} \cdot \vec{i}' + u_{1z}^e \vec{k} \cdot \vec{i}' \quad (2.60)$$

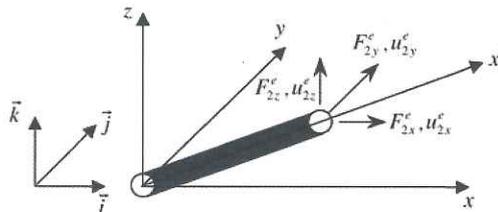


Figura 2.15 Um elemento de treliça tridimensional na coordenada local.

⁴Opcional para todas as trajetórias.

Da Figura 2.15 podemos ver que substituindo (2.58) em (2.60) encontramos que

$$u'_{ix} = \frac{1}{l^e} [x_{21}^e u'_{ix} + y_{21}^e u'_{iy} + z_{21}^e u'_{iz}] \quad (2.61)$$

Usando essa expressão para escrever as relações entre \mathbf{d}'^e e \mathbf{d}^e , temos

$$\begin{bmatrix} u'_{1x} \\ u'_{2x} \end{bmatrix} = \frac{1}{l^e} \underbrace{\begin{bmatrix} x_{21}^e & y_{21}^e & z_{21}^e & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & x_{21}^e & y_{21}^e & z_{21}^e \end{bmatrix}}_{\mathbf{R}^e} \mathbf{d}^e, \quad (2.62)$$

que define a matriz \mathbf{R}^e . A rigidez global é então dada por (2.50)

$$\mathbf{K}^e = \mathbf{R}^{eT} \mathbf{K}'^e \mathbf{R}^e$$

6×2 2×2 2×6

onde \mathbf{K}'^e é a matriz dada em (2.55) e \mathbf{R}^e é a dada em (2.62). O resultado é uma matriz 6×6 . Não vale a pena multiplicar as matrizes; isso pode ser feito facilmente com um programa de computador. Esse procedimento pode também ser usado para obter a rigidez do elemento em duas dimensões: a matriz \mathbf{R}^e então seria a matriz 2×4 com as colunas com z_{21}^e termos interrompidos e o resultado idêntico a (2.47).

REFERÊNCIAS

George, A. and Liu J.W. (1986) *Computer Solution of Large Sparse Positive Definite Systems*, Prentice Hall, Englewood Cliffs, NJ.
 Saad, Y. (1996) *Iterative Methods for Sparse Linear Systems*, PWS Publishing Company, Boston, MA.

Problemas

Problema 2.1

Para o sistema de molas dado na Figura 2.16,

- Numere os elementos e os nós.
- Monte a matriz global de rigidez e de força.
- Parta o sistema e resolva para os deslocamentos nodais.
- Calcule as forças de reações.

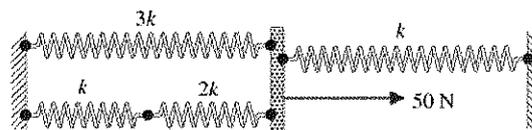


Figura 2.16 Dados do Problema 2.1.

Problema 2.2

Mostre que a rigidez equivalente de uma mola alinhada na direção x para a barra de espessura t com um furo retangular centrado mostrado na Figura 2.17 é

$$k = \frac{5Etab}{(a+b)l},$$

onde E é o módulo de Young e t é a largura da barra (Sugestão: subdivida a barra com um furo retangular em 3 elementos).

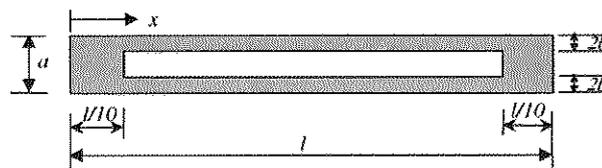


Figura 2.17 Dados do Problema 2.2.

Problema 2.3

Considere a estrutura de treliça dada na Figura 2.18. Os nós A e B são fixos. Uma força igual a 10 N atua no nó C, na direção positiva x. As coordenadas das junções são dadas em metros. O módulo de Young é $E = 10^{11}$ Pa e as áreas das seções transversais de todas as barras são $A = 2 \cdot 10^{-2} \text{ m}^2$.

- Numere os elementos e os nós.
- Monte a matriz global de rigidez e de força.
- Parta o sistema e resolva para os deslocamentos nodais.
- Calcule as tensões e as reações.

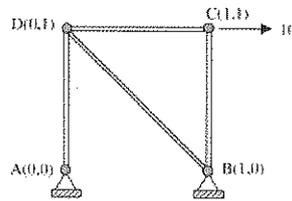


Figura 2.18 Dados do Problema 2.3.

Problema 2.4

Considere a estrutura de três barras sujeita a carga prescrita no ponto B igual a 10^3 N, como mostrado na Figura 2.19. O módulo de Young é $E = 10^{11}$ Pa, a área da seção transversal da barra BC é $2 \cdot 10^{-2} \text{ m}^2$ e as áreas das barras BD e BF são 10^{-2} m^2 . Observe que o ponto D é livre para se mover na direção x. As coordenadas das junções são dadas em metros.

- Construa a matriz global de rigidez e a matriz de carga.
- Parta as matrizes e resolva para os deslocamentos desconhecidos no ponto B e o deslocamento em direção x do ponto D.
- Encontre as tensões nas três barras.
- Encontre as reações nos nós C, D e F.

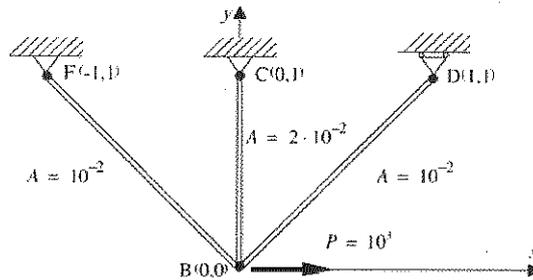


Figura 2.19 Dados do Problema 2.4.

Problema 2.5

Em cada uma das duas estruturas planas mostradas na Figura 2.20, blocos rígidos são conectados por molas lineares. Imagine que apenas deslocamentos horizontais sejam permitidos. Em cada caso, escreva as equações reduzidas globais de equilíbrio em termos da rigidez k^e da mola, dos deslocamentos nodais desconhecidos u_i e das cargas aplicadas f_i . Você deve refazer o problema numerando os nós, de modo que aqueles nos quais os deslocamentos são prescritos sejam numerados primeiramente.

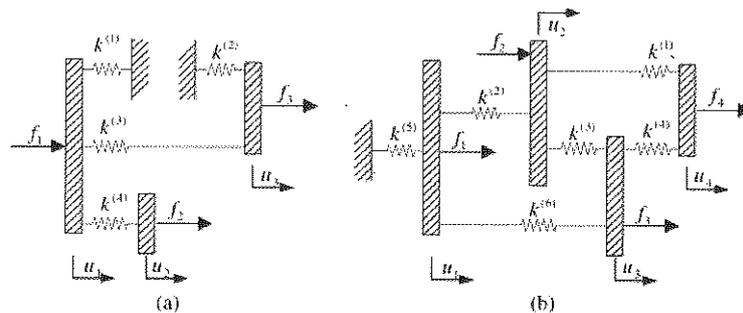


Figura 2.20 Dados do Problema 2.5.

Problema 2.6

A estrutura plana mostrada na Figura 2.21 consiste em uma barra rígida e leve e em molas lineares de rigidezes $k^{(1)}$ e $k^{(2)}$. Apenas pequenos deslocamentos verticais são permitidos. A matriz reduzida de rigidez \hat{K} dessa estrutura é 2×2 , mas pode ter várias formas, dependendo da escolha da matriz global de deslocamento. Determine \hat{K} para cada uma das seguintes escolhas de translações laterais:

- u_{1y} em $x = 0$ e u_{2y} em $x = L$ (veja Figura 2.21, a direita).
- u_{1y} em $x = 0$ e u_{Ay} em $x = L/2$.
- u_{2y} em $x = L$ e u_{By} em $x = 2L$.

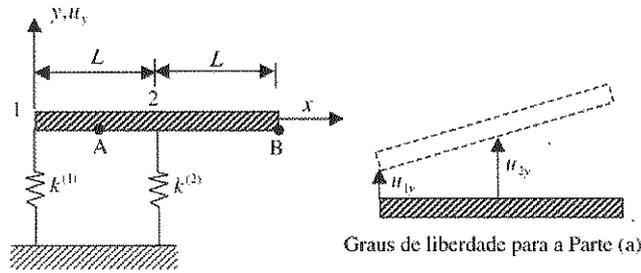


Figura 2.21 Dados do Problema 2.6.

Problema 2.7

Modifique o código de elementos finitos do MATLAB para forçar condições de contorno de deslocamentos usando o método da penalidade (veja Equação [2.33]).

- Resolva para os deslocamentos nodais e tensões da estrutura mostrada na Figura 2.22.
- Trace a estrutura deformada com o MATLAB. Para isso, acrescente o $\text{mag} \times$ deslocamento às coordenadas nodais. O fator mag é para aumentar os deslocamentos, de modo que eles sejam visíveis.

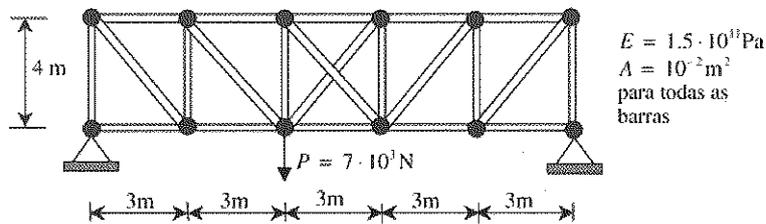


Figura 2.22 Dados do Problema 2.7.

Problema 2.8

Usando o código de elementos finitos do MATLAB, encontre os deslocamentos e as forças nas duas estruturas dadas na Figura 2.23. Para a estrutura (b), explore a simetria. Para as duas treliças, verifique o equilíbrio no nó 1. Considere o módulo de Young $E = 10^{11}$ Pa, as áreas de todas as seções transversais de barra 10^{-2} m², as forças $F = 10^3$ N e $L = 2$ m.

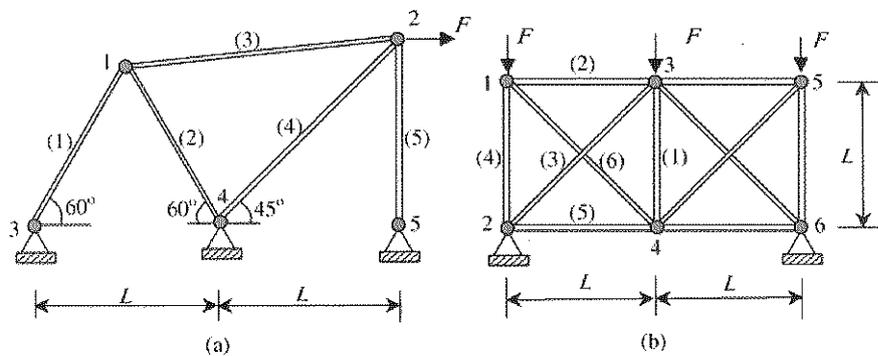


Figura 2.23 Dados do Problema 2.8.