Capítulo 3

Métodos aproximados

A complexidade do modelo matemático que representa o comportamento de muitos problemas de engenharia levou ao desenvovimento de métodos aproximados para sua solução, podendo-se destacar dois tipos de métodos: os variacionais e os dos resíduos ponderados.

Dentre os primeiros, podem ser citados os métodos de Kantorovich, de Trefftz e de Rayleigh-Ritz.

Os segundos compreendem os métodos dos mínimos quadrados, da colocação, do subdomínio e de Galerkin.

Os métodos de Rayleigh-Ritz e de Galerkin são os mais conhecidos e deles originaram o método dos elementos finitos; por essa razão, apenas esses dois são descritos a seguir.

O leitor interessado em conhecer os outros métodos pode recorrer aos autores: Reddy (1988), Segerlind e Cook além de outros.

3.1 Método de Rayleigh-Ritz

No cálculo variacional, procura-se a função $y(x)$ que dentre todas as funções admissíveis é a solução exata para minimizar um determinado funcional.

No método de Rayleigh-Ritz, a função $y(x)$ (suposta exata) é substituída por uma função aproximada $v(x)$, formada por uma combinação linear de funções $\phi_i(x)$. Após a substituição de $v(x)$ no funcional, este é minimizado.

A função $v(x)$ é uma solução aproximada e não exata como $y(x)$! A escolha adequada das funções $\phi_i(x)$ é importante para se obter uma boa aproximação para a solução do problema.

Suponha-se, então, que se queira encontrar a função $v(x)$ que minimiza o funcional:

$$Y = \int_{x1}^{x2} F(x, y, y')dx$$

com as condições de contorno $y(x_1) = y(x_2) = 0$.

Assume-se que a solução pode ser obtida considerando a função $v(x)$ como uma combinação linear de funções $\phi_i(x)$ tal que:

$$y(x) \cong v(x) = \sum_{i=1}^{n} a_i \phi_i(x) \tag{3.1}$$

As funções $\phi_i(x)$, denominadas *funções de forma*, são funções linearmente independentes e cada uma delas individualmente satisfaz as condições de contorno:

$$\phi_i(x_1) = \phi_i(x_2) = 0 \quad ; \quad i = 1, 2, \ldots, n \tag{3.2}$$

Essas funções são contínuas até o grau $m - 1$, sendo m a ordem da maior derivada do funcional.

Os coeficientes a_i, a serem determinados, são denominados *parâmetros de deslocamentos*[1] e a função $v(x)$ é conhecida como *função aproximadora.*

Substituindo y por v no funcional e impondo a condição de estacionariedade (mínimo), tem-se:

$$\delta Y = \frac{\partial Y}{\partial a_1}\delta a_1 + \frac{\partial Y}{\partial a_2}\delta a_2 + \cdots + \frac{\partial Y}{\partial a_n}\delta a_n = 0 \tag{3.3}$$

Como as variações δa_i são arbitrárias, a equação (3.3) se transforma em um sistema de equações homogêneas da forma:

$$\frac{\partial Y}{\partial a_i} = 0 \quad ; \quad i = 1, 2, \ldots, n \tag{3.4}$$

Se Y é uma função quadrática de ϕ_i e ${\phi'}_i$, então essas equações são lineares em a_i.

Aumentando o número n de termos da função $v(x)$, a solução, em geral, é melhorada, e para que se obtenha uma seqüência de soluções convergentes para a solução exata, as seguintes condições devem ser satisfeitas:

a) as funções aproximadoras $v(x)$ devem ser contínuas até uma ordem menor do que a maior derivada do integrando,

b) cada função $\phi_i(x)$ deve satisfazer, individualmente, as condições essenciais de contorno e

c) a seqüência de funções deve ser completa. Diz-se que $v(x)$ é completa quando a seguinte condição é satisfeita:

$$\lim_{n\to\infty} \int_{x1}^{x2} (y - \sum_{i=1}^{n} a_i\phi_i)^2 dx < \lambda$$

sendo λ um número tão pequeno como se deseja.

As funções que satisfazem as duas primeiras condições são chamadas admissíveis.

[1] Mais à frente, serão denominados *parâmetros nodais.*

Para verificar a convergência do método é preciso considerar duas ou mais tentativas para a função aproximadora. A convergência é verificada comparando sucessivos valores $Y^{(i)}$ do funcional minimizado obtido com a seguinte seqüência:

$$\begin{aligned} v^{(1)} &= a_1^{(1)}\phi_1^{(1)} \\ v^{(2)} &= a_1^{(2)}\phi_1^{(2)} + a_2^{(2)}\phi_2^{(2)} \\ \vdots & \qquad \vdots \\ v^{(n)} &= a_1^{(n)}\phi_1^{(n)} + a_2^{(n)}\phi_2^{(n)} + \cdots + a_n^{(n)}\phi_n^{(n)} \end{aligned} \tag{3.5}$$

Uma vez que a $n^{\text{ésima}}$ função aproximadora inclui todas as funções contidas na aproximação anterior e Y é minimizado em cada passo, então a seguinte condição é verificada:

$$Y^{(1)} \geq Y^{(2)} \geq \cdots \geq Y^{(n)} \tag{3.6}$$

Essa convergência para a solução exata é chamada monotônica, e as igualdades (3.5) formam uma seqüência minimizante. Utilizando uma seqüência minimizante de funções aproximadoras, fica assegurada a convergência monotônica do funcional. Observa-se que, para a solução convergir para a solução exata, as funções devem ser admissíveis [condições a) e b)] e completas [condição c)].

Exemplo 1

Como primeiro exemplo de aplicação, considere-se a viga da Figura 2.4 e o funcional que caracteriza a energia potencial total[2] da viga dado por [ver igualdade (2.24)]:

$$\Pi = \int_0^l \frac{EI}{2}\left[\frac{d^2v(x)}{dx^2}\right]^2 dx - \int_0^l qv(x)dx \tag{3.7}$$

Toma-se como primeira aproximação para a função $v(x)$ o seguinte polinômio:

$$v_1(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 \tag{3.8}$$

Considerando as condições de contorno, pode-se escrever que:

de $\quad v_1(0) = 0 \quad$ tem-se $\quad a_0 = 0 \quad$ e de $\quad v_1(l) = 0 \quad$ tem-se $\quad a_1 = -a_2l$

A função $v_1(x)$ fica, assim, com a seguinte expressão:

$$v_1(x) = a_2(x^2 - lx) \tag{3.9}$$

[2] A partir de agora, passa-se a designar por Π o funcional energia potencial total.

Derivando $v_1(x)$ e substituindo no funcional Π dado por (3.7), obtém-se:

$$\Pi = \int_0^l 2EIa_2^2 dx - \int_0^l qa_2(x^2 - lx)dx$$

A condição de estacionariedade exige que:

$$\delta\Pi = \frac{\partial\Pi}{\partial a_2}\delta a_2 = 0$$

Como δa_2 é arbitrário, resulta que:

$$\frac{\partial\Pi}{\partial a_2} = \int_0^l 4EIa_2 dx - \int_0^l q(x^2 - lx)dx = 0$$

Integrando e resolvendo, obtém-se:

$$a_2 = -\frac{ql^2}{24EI}$$

A função $v_1(x)$ passa a ter a forma:

$$v_1(x) = -\frac{ql^2}{24EI}(x^2 - lx) \tag{3.10}$$

Os esforços internos[3] são:

$$M(\frac{l}{2}) = -EIv_1'' = -\frac{ql^2}{12}$$

$$V(0) = -EIv_1''' = 0 \tag{3.11}$$

e a energia potencial total Π_1 vale:

$$\Pi_1 = -\frac{q^2l^5}{288EI} \tag{3.12}$$

Como se vê, os esforços obtidos em (3.11) e a máxima deflexão dada por $\frac{ql^4}{96EI}$ não correspondem aos valores corretos.

Como segunda aproximação, adota-se a função:

$$v_2(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3$$

[3] Lembrar que, de acordo com a orientação do eixo $v(x)$ da Figura 2.4, a carga q é negativa. Portanto os valores encontrados para os deslocamentos e esforços devem ser multiplicados por (-1).

Impondo as condições de contorno:

$$\text{para} \quad v_2(0) = 0, \quad \text{tem-se} \quad a_0 = 0$$

de $v_2(l) = 0$, tem-se $a_1 + a_2 l + a_3 l^2 = 0$ ou $a_1 = -a_2 l - a_3 l^2$
A função aproximadora fica:

$$v_2(x) = a_2(x^2 - lx) + a_3(x^3 - l^2 x) \tag{3.13}$$

A condição de mínimo é dada por:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Pi}{\partial a_2} &= \int_0^l EI(4a_2 + 12a_3 x)dx - \int_0^l q(x^2 - lx)dx = 0 \\ \frac{\partial \Pi}{\partial a_3} &= \int_0^l EI(12a_2 + 36a_3 x)dx - \int_0^l q(x^3 - l^2 x)dx = 0 \end{aligned} \tag{3.14}$$

Resolvendo esse sistema de equações, obtém-se:

$$a_2 = -\frac{ql^2}{24EI} \quad e \quad a_3 = 0$$

sendo, então, a função v_2 igual à anterior.

Admitindo uma terceira função aproximadora dada por:

$$v_3(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + a_4 x^4$$

e considerando as condições de contorno, tem-se:

$$\text{de} \quad v_3(0) = 0, \quad \text{tem-se} \quad a_0 = 0$$

de $v_3(l) = 0$, tem-se $a_1 + a_2 l + a_3 l^2 + a_4 l^3 = 0$ ou $a_1 = -a_2 l - a_3 l^2 - a_4 l^3$

A função aproximadora tem a seguinte expressão:

$$v_3(x) = a_2(x^2 - lx) + a_3(x^3 - l^2 x) + a_4(x^4 - l^3 x) \tag{3.15}$$

A condição de mínimo para a energia é dada por:

$$\frac{\partial \Pi}{\partial a_2} = \int_0^l EI(4a_2 + 12a_3 x + 24a_4 x^2)dx - \int_0^l q(x^2 - lx)dx = 0$$

$$\frac{\partial \Pi}{\partial a_3} = \int_0^l EI(24a_2 x + 72a_3 x^2 + 144a_4 x^3)dx - \int_0^l q(x^3 - l^2 x)dx = 0$$

$$\frac{\partial \Pi}{\partial a_4} = \int_0^l EI(48a_2 x^2 + 144a_3 x^3 + 288a_4 x^4)dx - \int_0^l q(x^4 - l^3 x)dx = 0 \tag{3.16}$$

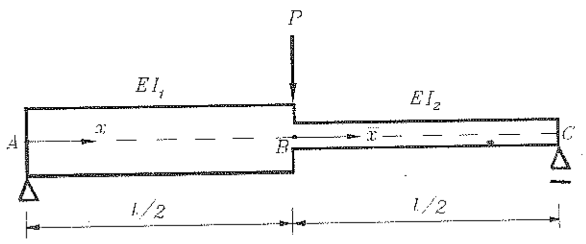

Figura 3.1: Viga com seção variável.

A solução desse sistema de equações fornece:

$$a_2 = 0 \quad ; \quad a_3 = -\frac{ql}{12EI} \quad ; \quad a_4 = \frac{q}{24EI}$$

Substituindo esses valores em (3.15), obtém-se a forma final da função aproximadora:

$$v_3(x) = \frac{ql^4}{48EI}[2(\frac{x}{l})^4 - 4(\frac{x}{l})^3 + 2(\frac{x}{l})] \tag{3.17}$$

A máxima deflexão vale:

$$v_3(\frac{l}{2}) = \frac{5ql^4}{384EI}$$

que é o valor exato.

Os esforços internos são:

$$M(\frac{l}{2}) = \frac{ql^2}{8} \quad e \quad V(0) = \frac{ql}{2}$$

Esses valores também são os corretos. Observa-se também que a derivada quarta de $v_3(x)$ é igual à carga aplicada à viga dividida pela rigidez EI.

A energia de deformação total para esse caso vale:

$$\Pi_3 = -\frac{q^2l^5}{240EI}$$

Nota-se, comparando os valores obtidos para a energia de deformação total, para cada aproximação utilizada, que:

$$\Pi_1 \geq \Pi_2 \geq \Pi_3$$

Exemplo 2

Como segundo exemplo, considere a viga de seção variável da Figura 3.1.

Porque no ponto B há variação brusca da rigidez EI, são adotadas duas funções aproximadoras de terceiro grau: uma para o trecho AB e outra para o trecho BC:

$$v_1(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 \quad \text{trecho AB} \tag{3.18}$$

$$v_2(\bar{x}) = b_0 + b_1 \bar{x} + b_2 \bar{x}^2 + b_3 \bar{x}^3 \quad \text{trecho BC} \tag{3.19}$$

Impondo as condições de contorno:

$$\text{de} \quad v_1(0) = v_2(\frac{l}{2}) = 0 \quad \text{e} \quad v_1''(0) = v_2''(\frac{l}{2}) = 0$$

as condições de compatibilidade no ponto B:

$$v_1(\frac{l}{2}) = v_2(0) \quad \text{e} \quad v_1'(\frac{l}{2}) = v_2'(0)$$

e determinando os coeficientes b_i em função dos a_i, tem-se:

$$\begin{aligned} b_0 &= \frac{1}{2}a_1 l + \frac{1}{8}a_3 l^3 \\ b_1 &= a_1 + \frac{3}{4}a_3 l^3 \\ b_2 &= -\frac{6}{l}a_1 - 3a_3 l \\ b_3 &= \frac{4}{l^2}a_1 + 2a_3 \end{aligned} \tag{3.20}$$

sendo, então, as funções aproximadoras dadas por:

$$v_1(x) = a_1 x + a_3 x^3 \tag{3.21}$$

$$v_2(\bar{x}) = \frac{1}{2}la_1 + \frac{1}{8}l^3 a_3 + (a_1 + \frac{3}{4}l^2 a_3)\bar{x} - (\frac{6}{l}a_1 + 3la_3)\bar{x}^2 + (\frac{4}{l^2}a_1 + 2a_3)\bar{x}^3 \tag{3.22}$$

O funcional que representa a energia potencial total para a viga toda é:

$$\Pi = \frac{1}{2}EI_1 \int_0^{\frac{l}{2}} (v_1'')^2 dx + \frac{1}{2}EI_2 \int_0^{\frac{l}{2}} (v_2'')^2 d\bar{x} - \frac{1}{2}Pl(a_1 + \frac{1}{4}l^2 a_3)$$

Substituindo as derivadas segundas de (3.21) e (3.22), obtém-se:

$$\Pi = \frac{3}{4}EI_1 l^3 a_3^2 + EI_2(\frac{12}{l}a_1^2 + 12la_1a_3 + 3l^3a_3^2) - \frac{1}{2}Pl(a_1 + \frac{1}{4}l^2 a_3)$$

A condição de estacionariedade do funcional permite determinar a_1 e a_2 da seguinte forma:

$$\frac{\partial \Pi}{\partial a_1} = 0 \quad \text{então} \quad a_1 = \frac{Pl^2}{48EI_2} - \frac{1}{2}l^2 a_3 \tag{3.23}$$

e

$$\frac{\partial \Pi}{\partial a_3} = 0 \quad \text{então} \quad a_3 = -\frac{P}{12EI_1}$$

que substituído em (3.23) fornece:

$$a_1 = \frac{Pl^2}{48E}(\frac{1}{I_2} + \frac{2}{I_1})$$

Substituindo a_1 e a_3, determinados acima, nas igualdades (3.20), obtêm-se os valores de b_i:

$$b_0 = \frac{Pl^3}{96E}(\frac{1}{I_1} + \frac{1}{I_2})$$

$$b_1 = \frac{Pl^2}{48E}(\frac{1}{I_2} - \frac{1}{I_1})$$

$$b_2 = -\frac{Pl}{8EI_2}$$

$$b_3 = \frac{P}{12EI_2}$$

Tendo determinado os coeficientes a_i e b_i, as funções aproximadoras resultam:

$$v_1(x) = \frac{P}{48EI_1}\left[-4x^3 + \left(2 + \frac{I_1}{I_2}\right) l^2 x\right]$$

e

$$v_2(\bar{x}) = \frac{P}{96EI_2}\left[8\bar{x}^3 - 12l\bar{x}^2 + 2\left(1 - \frac{I_2}{I_1}\right) l^2 \bar{x} + \left(1 + \frac{I_2}{I_1}\right) l^3\right]$$

que são as representações exatas das deflexões do eixo baricêntrico da viga. Se $I_1 = I_2 = I$, então:

$$v_1(x) = \frac{P}{48EI}(-4x^3 + 3l^2 x) \tag{3.24}$$

e

$$v_2(\bar{x}) = \frac{P}{96EI}(8\bar{x}^3 - 12l\bar{x}^2 + 2l^3) \tag{3.25}$$

No ponto B, tem-se:

$$v_1(\frac{l}{2}) = v_2(0) = \frac{Pl^3}{48EI}$$

valor exato da deflexão nesse ponto.

Note-se que, mudando a origem das coordenadas $\bar{x}$, passando a orientá-las a partir de C em direção a B, as igualdades (3.24) e (3.25) igualam-se, e os coeficientes a_i ficam iguais aos b_i.

Esse é, pois, o procedimento para se empregar o método de Rayleigh-Ritz. As funções aproximadoras mais comumente utilizadas são polinomiais e trigonométricas.

3.2 Método de Galerkin

O método de Galerkin não requer a existência de um funcional. Ele utiliza diretamente a equação diferencial (forma forte) que descreve matematicamente o problema a ser analisado.

Embora seja diferente do método de Rayleigh-Ritz, o método de Galerkin produz os mesmos resultados para alguns casos, como será visto adiante.

Para resolver um sistema de equações diferenciais, ou uma equação diferencial pelo método de Galerkin, substitui-se nele, ou nela, uma ou mais funções aproximadoras que devem satisfazer as condições de contorno.

Como a função aproximadora, ou as funções aproximadoras, não é, ou não são, a solução exata da equação diferencial, ou do sistema de equações diferenciais, tem-se um ou mais resíduos que devem ser ponderados através de funções ponderadoras, e o produto entre a função residual e cada função ponderadora é suposto igual a zero no domínio da integração, determinando condição de ortogonalidade.

Suponha-se um sistema de equações lineares da forma:

$$Lv = f \tag{3.26}$$

onde L é um operador e a função v satisfaz certas condições de contorno.

Admite-se uma função aproximadora $\bar{v}$ para v da forma:

$$\bar{v} = \sum_{i=1}^{n} a_i \phi_i \tag{3.27}$$

onde ϕ_i são funções que satisfazem as condições de contorno do problema.

Substituindo v por $\bar{v}$, a igualdade (3.26) não mais se verifica, havendo, então, um erro dado por:

$$\epsilon = L\bar{v} - f \tag{3.28}$$

O método de Galerkin exprime a condição de ortogonalidade entre a função ϵ e as funções ponderadoras ϕ_i, resultando:

$$\int_V (L\bar{v} - f)\phi_i dV = 0 \quad ; \quad i = 1, 2, \cdots, n \tag{3.29}$$

Os coeficientes a_i provêm da solução do sistema de n equações representado pela igualdade (3.29). Os coeficientes a_i são determinados, então, de modo que os resíduos se anulem em cada integração ponderada.

Exemplo 3

Resolver o problema da viga da Figura 2.4. A energia potencial total é representada pela igualdade (3.7).

A primeira variação do funcional Π fornece:

$$\delta\Pi = \int_0^l \left(EI\frac{d^2v}{dx^2}\frac{d^2\delta v}{dx^2} - q\delta v \right) dx$$

Integrando por partes a última igualdade e anulando-a, tem-se:

$$\int_0^l \left(EI\frac{d^4v}{dx^4} - q \right) \delta v dx + EI\frac{d^2v}{dx^2}\frac{d\delta v}{dx}\bigg|_0^l - EI\frac{d^3v}{dx^3}\delta v\bigg|_0^l = 0$$

Lembrando que:

$$V = -EI\frac{d^3v}{dx^3} \quad \text{força cortante}$$

e

$$M = -EI\frac{d^2v}{dx^2} \quad \text{momento fletor}$$

essa equação fica:

$$\int_0^l \left(EI\frac{d^4v}{dx^4} - q \right) \delta v dx - M\frac{d\delta v}{dx}\bigg|_0^l + V\delta v|_0^l = 0$$

Se houver força cortante V^* e momento fletor M^* aplicados em ponto de coordenada $x = x^*$ do eixo da viga, a essa equação devem ser acrescentados os termos:

$$-V^*\delta v|_{x=x^*} \qquad \text{e} \qquad -M^*\frac{d\delta v}{dx}\bigg|_{x=x^*}$$

Supondo que haja apenas a carga q, e as condições de contorno levam os dois últimos termos a se anularem, a equação acima reduz-se a:

$$\int_0^l \left(EI\frac{d^4v}{dx^4} - q \right) \delta v dx = 0 \tag{3.30}$$

Notar que no item 2.5 obteve-se a mesma equação com a condição de estacionariedade do funcional energia potencial total para a mesma viga da Figura 2.4.

Sendo $\bar{v} = \bar{v}(x)$ a função aproximada, (3.30) pode ser escrita, por analogia com (3.29), como:

$$\int_0^l (L\bar{v} - q)\,\delta\bar{v}dx = 0 \tag{3.31}$$

Assumindo para a função aproximadora a forma:

$$\bar{v} = \sum_{i=1}^{n} a_i\phi_i$$

A variação dessa função é:

$$\delta\bar{v} = \sum_{i=1}^{n} \delta a_i\phi_i$$

que levada em (3.31) fornece:

$$\int_0^l (L\bar{v} - q)\sum_{i=1}^{n} \delta a_i\phi_i dx = 0$$

Desmembrando essa equação, tem-se:

$$\int_0^l L\bar{v}\sum_{i=1}^{n} \delta a_i\phi_i dx = \int_0^l q\sum_{i=1}^{n} \delta a_i\phi_i dx$$

da qual resulta:

$$\int_0^l (L\bar{v} - q)\phi_i dx = 0 \tag{3.32}$$

que é formalmente igual à equação (3.29), mostrando que neste caso há equivalência entre o método de Rayleigh-Ritz e o de Galerkin.

Para resolver o problema proposto, supõe-se como função aproximadora a série trigonométrica:

$$\bar{v}(x) = a_1 \sin\frac{\pi x}{l} + a_2 \sin\frac{2\pi x}{l} + a_3 \sin\frac{3\pi x}{l} + a_4 \sin\frac{4\pi x}{l} \tag{3.33}$$

que satisfaz as condições de contorno essenciais: $\bar{v}(0) = 0$ e $\bar{v}(l) = 0$.

A derivada de quarta ordem da função $\bar{v}(x)$ é:

$$\bar{v}^{IV}(x) = \frac{\pi^4}{l^4}\left[a_1 \sin\frac{\pi x}{l} + 16a_2 \sin\frac{2\pi x}{l} + 81a_3 \sin\frac{3\pi x}{l} + 256a_4 \sin\frac{4\pi x}{l}\right]$$

Reescrevendo a equação (3.32) com a derivada quarta de $\bar{v}(x)$ no lugar do operador L, resulta:

$$\int_0^l (EI\bar{v}^{IV} - q)\phi_i dx = 0 \quad \text{com} \quad i = 1, 2, 3, 4$$

sendo ϕ_i dado por:

$$\phi_1 = \sin\frac{\pi x}{l} \qquad \phi_2 = \sin\frac{2\pi x}{l}$$

$$\phi_3 = \sin\frac{3\pi x}{l} \qquad \phi_4 = \sin\frac{4\pi x}{l}$$

O resultado são quatro equações escritas como:

$$\int_0^l (EI\bar{v}^{IV} - q)\sin\frac{\pi x}{l} = 0$$

$$\int_0^l (EI\bar{v}^{IV} - q)\sin\frac{2\pi x}{l} = 0$$

$$\int_0^l (EI\bar{v}^{IV} - q)\sin\frac{3\pi x}{l} = 0$$

$$\int_0^l (EI\bar{v}^{IV} - q)\sin\frac{4\pi x}{l} = 0$$

A solução desse sistema de equações fornece:

$$a_1 = \frac{4ql^4}{\pi^5 EI} \quad , \quad a_2 = 0 \quad , \quad a_3 = \frac{4ql^4}{243\pi^5 EI} \quad \text{e} \quad a_4 = 0$$

A função aproximadora, então, fica:

$$\bar{v}(x) = \frac{4ql^4}{\pi^5 EI}\left(\sin\frac{\pi x}{l} + \frac{1}{243}\sin\frac{3\pi x}{l}\right)$$

Para $x = l/2$, a deflexão vale:

$$f = \bar{v}(\frac{l}{2}) = \frac{ql^4}{76,8EI}$$

que é o valor exato.

Exemplo 4

Como outro exemplo de aplicação do método de Galerkin, seja encontrar a solução da seguinte equação diferencial:

$$\frac{d^2v}{dx^2} + \frac{dv}{dx} + x = 0 \tag{3.34}$$

com as condições de contorno: $v(0) = v(1) = 0$.

Adotando como primeira aproximação para v:

$$v_1(x) = x(1-x)a_1$$

tem-se:

$$\int_0^1 \left(\frac{d^2v}{dx^2} + \frac{dv}{dx} + x\right)_1 x(1-x)dx = 0 \tag{3.35}$$

Substituindo as derivadas de v_1 em (3.35), obtém-se:

$$\int_0^1 (a_1 - 2xa_1 + x)x(1-x)dx = 0$$

multiplicando e integrando resulta:

$$a_1 = \frac{1}{\cancel{6}\,4}$$

e a primeira aproximação fica sendo:

$$v_1(x) = \frac{1}{\cancel{6}\,4}x(1-x) \tag{3.36}$$

Tomando como segunda aproximação:

$$v_2(x) = x(1-x)a_1 + x^2(1-x)a_2 = x(1-x)(a_1 + xa_2)$$

tem-se:

$$\int_0^1 \left(\frac{d^2v}{dx^2} + \frac{dv}{dx} + x\right)_2 x(1-x)dx = 0 \tag{3.37}$$

$$\int_0^1 \left(\frac{d^2v}{dx^2} + \frac{dv}{dx} + x\right)_2 x^2(1-x)dx = 0 \tag{3.38}$$

Substituindo as derivadas de $v_2(x)$ em (3.37) e (3.38) e operando, obtém-se o seguinte sistema de equações:

$$\begin{aligned} a_1 + \frac{1}{5}a_2 &= \frac{1}{4} \\ \frac{11}{6}a_1 + \frac{4}{3}a_2 &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

cuja solução fornece:

$$a_1 = \frac{7}{29} \quad e \quad a_2 = \frac{5}{116}$$

Então, a segunda aproximação fica:

$$v_2(x) = x(1-x)\left(\frac{7}{29} + \frac{5}{116}x\right) \tag{3.39}$$

Supondo a terceira função aproximadora como sendo:

$$v_3(x) = x(1-x)(a_1 + xa_2 + x^2a_3)$$

tem-se:

$$\int_0^1 \left(\frac{d^2v}{dx} + \frac{dv}{dx} + x\right)_3 x(1-x)dx \tag{3.40}$$

$$\int_0^1 \left(\frac{d^2v}{dx} + \frac{dv}{dx} + x\right)_3 x^2(1-x)dx \tag{3.41}$$

$$\int_0^1 \left(\frac{d^2v}{dx} + \frac{dv}{dx} + x\right)_3 x^3(1-x)dx \tag{3.42}$$

Substituindo as derivadas de $v_3(x)$ em (3.40), (3.41) e (3.42) e integrando, resulta o seguinte sistema de equações:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{3}a_1 + \frac{3}{20}a_2 + \frac{1}{12}a_3 &= \frac{1}{12} \\
\frac{11}{60}a_1 + \frac{1}{10}a_2 + \frac{2}{21}a_3 &= \frac{1}{20} \\
\frac{7}{60}a_1 + \frac{11}{105}a_2 + \frac{3}{35}a_3 &= \frac{1}{30}
\end{aligned}$$

cuja solução fornece:

$$a_1 = 0,235671 \quad ; \quad a_2 = -0,018690 \quad ; \quad a_3 = 0,090958$$

A terceira função aproximadora fica sendo:

$$v_3(x) = x(1-x)(0,235671 - 0,018690x + 0,090958x^2)$$

A solução exata da equação diferencial (3.34) é:

$$v(x) = \frac{1}{2(\frac{1}{e}-1)}(1-e^{-x}) - \frac{1}{2}x^2 + x$$

No quadro abaixo, tem-se uma comparação entre os valores calculados com as funções aproximadoras e a solução exata.

Quadro 1 – Método de Galerkin e solução exata.

x	$v_1(x)$	$v_2(x)$	$v_3(x)$	exata
0,1	0,015000	0,022112	0,021124	0,019727
0,2	0,026666	0,040000	0,037691	0,036666
0,3	0,035000	0,053405	0,050033	0,049990
0,4	0,040000	0,062069	0,058260	0,059226
0,5	0,041666	0,065733	0,062266	0,063770

Exemplo 5

A partir da equação diferencial que rege um determinado problema, encontrar o funcional correspondente.

No Capítulo 2, os problemas foram expostos a partir da formulação variacional, resultando uma equação diferencial – equação de Euler-Lagrange – que, resolvida, fornece a função minimizadora do referido funcional.

Assim, para uma viga com carregamento transversal uniforme sobre seu eixo, o funcional que representa a energia potencial total, para essa viga, é da forma:

$$\Pi = \int_0^l \left[\frac{EI}{2}(v'')^2 - qv\right] dx$$

Após a imposição da condição de estacionariedade ($\delta\Pi = 0$) desse funcional, e de algumas passagens algébricas, chega-se à equação diferencial:

$$EIv^{IV} - q = 0$$

que é a equação de equilíbrio da viga.

Às vezes, há equações diferenciais muito difíceis de resolver, sendo mais fácil obter soluções aproximadas, utilizando a formulação variacional e o método de Rayleigh-Ritz.

Para isso, tem-se de percorrer o caminho inverso do descrito acima.

Seja, então, encontrar o funcional correspondente à equação diferencial:

$$-\frac{d}{dx}\left(\alpha\frac{dv}{dx}\right) + \beta v = f(x) \tag{3.43}$$

sendo: α e β funções de x. A função $f(x)$ é conhecida e a função $v(x)$ que se quer determinar deve satisfazer as condições de contorno em $x = x_0$ e $x = x_1$.

Para iniciar o processo, deve-se multiplicar a equação (3.43) pela variação de v e integrá-la no domínio, como:

$$\int_{x_0}^{x_1} \delta v \left[-\frac{d}{dx}\left(\alpha \frac{dv}{dx}\right) + \beta v - f(x) \right] dx = 0$$

Desenvolvendo as derivadas indicadas no integrando, tem-se:

$$\int_{x_0}^{x_1} \left[-\delta v \frac{d\alpha}{dx}\frac{dv}{dx} - \delta v \alpha \frac{d^2 v}{dx^2} + \delta v \beta v - \delta v f(x) \right] dx = 0 \qquad (3.44)$$

Para que v e δv tenham a mesma ordem de derivada, elimina-se a derivada segunda através do seguinte artifício:

$$\alpha \frac{d}{dx}\left(\delta v \frac{dv}{dx}\right) = \alpha \frac{d\delta v}{dx}\frac{dv}{dx} + \alpha \delta v \frac{d^2 v}{dx^2}$$

ficando a equação (3.44) com a forma:

$$\int_{x_0}^{x_1} \left[\alpha \frac{d\delta v}{dx}\frac{dv}{dx} + \delta v \beta v - \delta v f(x) \right] dx - \int_{x_0}^{x_1} \left[\delta v \frac{d\alpha}{dx}\frac{dv}{dx} + \alpha \frac{d}{dx}\left(\delta v \frac{dv}{dx}\right) \right] dx = 0 \qquad (3.45)$$

A segunda integral pode ser escrita em forma mais adequada para mostrar que ela se anula:

$$\int_{x_0}^{x_1} \left[\delta v \frac{d\alpha}{dx}\frac{dv}{dx} + \alpha \frac{d}{dx}\left(\delta v \frac{dv}{dx}\right) \right] dx = \int_{x_0}^{x_1} \frac{d}{dx}\left[\alpha \left(\delta v \frac{dv}{dx}\right) \right] dx =$$

$$\alpha \delta v \frac{dv}{dx}\Big|_{x=x0}^{x=x1} = 0$$

já que δv é nulo nos pontos x_0 e x_1.

Então, resta apenas a primeira integral da equação (3.45):

$$\int_{x_0}^{x_1} \left[\alpha \frac{d\delta v}{dx}\frac{dv}{dx} + \delta v \beta v - \delta v f(x) \right] dx = 0 \qquad (3.46)$$

Essa equação é a forma fraca da equação diferencial (3.43). Com as propriedades dos funcionais apresentadas no Capítulo 2, que permitem que o operador variacional abranja toda a integral que identifica o funcional, a equação (3.46) fica:

$$\delta \int_{x_0}^{x_1} \left[\frac{1}{2}\alpha \left(\frac{dv}{dx}\right)^2 + \frac{1}{2}\beta v^2 - v f(x) \right] dx \equiv \delta Y = 0$$

sendo o funcional dado por:

$$Y = \frac{1}{2}\int_{x_0}^{x_1} \left[\alpha \left(\frac{dv}{dx}\right)^2 + \beta v^2 \right] dx - \int_{x_0}^{x_1} v f(x) dx$$