

Fundamentos de Dinâmica Veicular

Capítulo 7

Estabilidade Direcional

Nesta aula

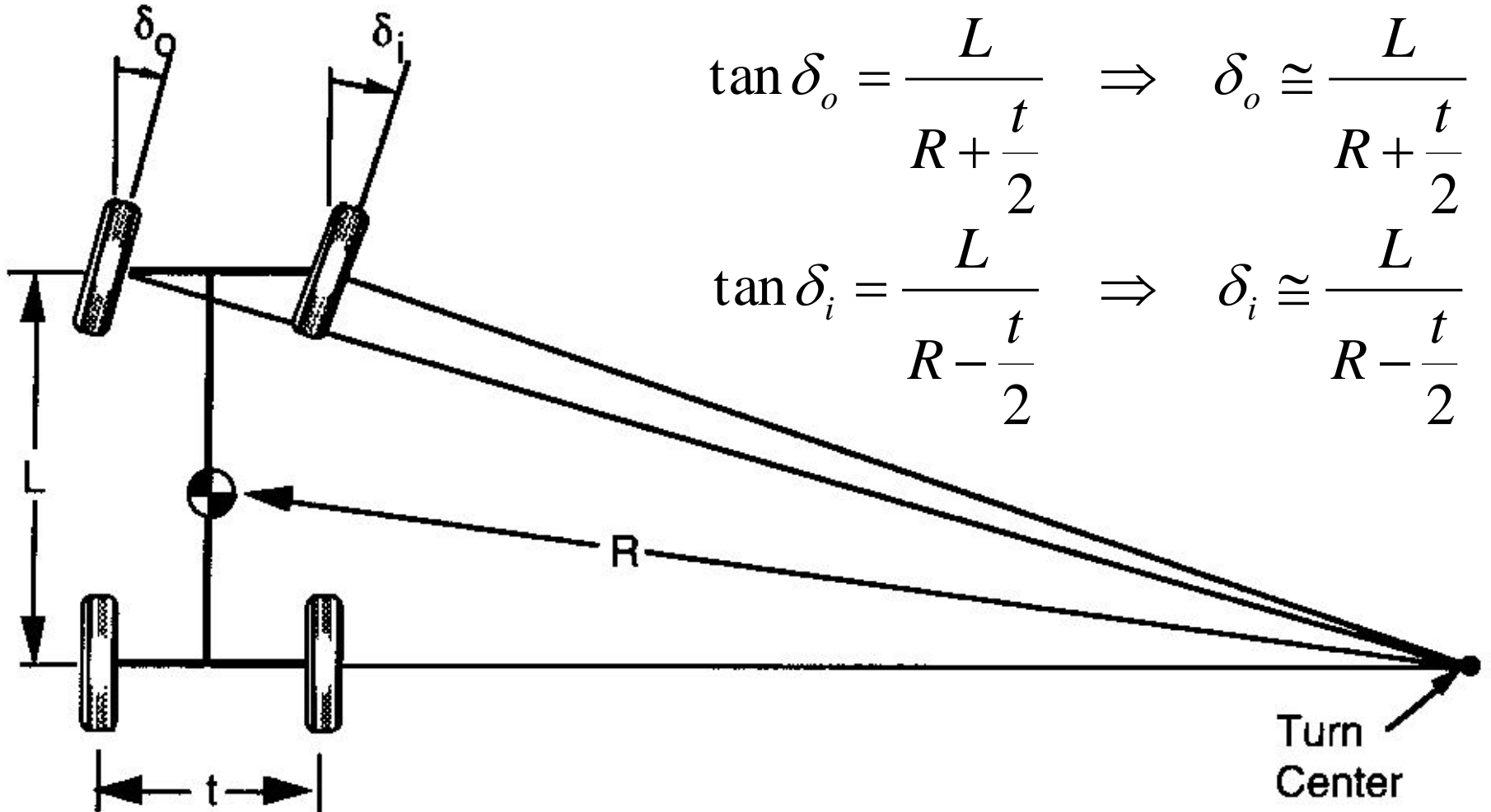
- Comportamento em resposta direcional
 - **Curvas em baixa velocidade**
 - Curvas em alta velocidade
 - Efeitos da suspensão

Curvas em baixa velocidade

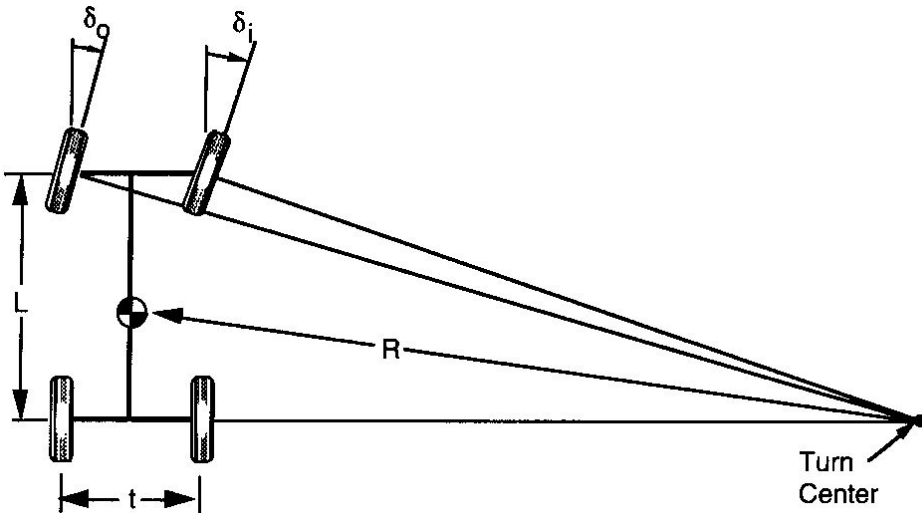
Ângulos de Ackerman

$$\tan \delta_o = \frac{L}{R + \frac{t}{2}} \Rightarrow \delta_o \cong \frac{L}{R + \frac{t}{2}}$$

$$\tan \delta_i = \frac{L}{R - \frac{t}{2}} \Rightarrow \delta_i \cong \frac{L}{R - \frac{t}{2}}$$



Curvas em baixa velocidade



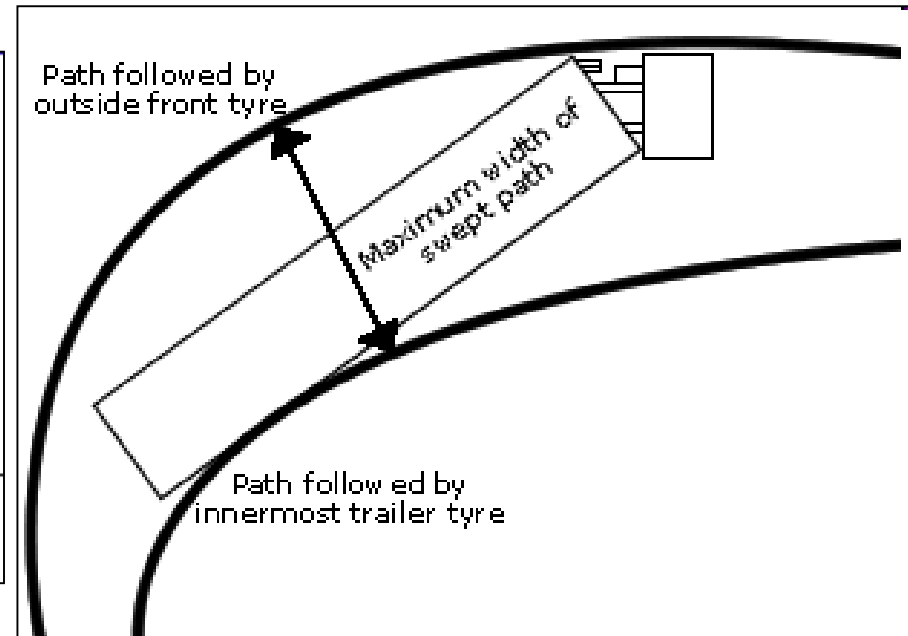
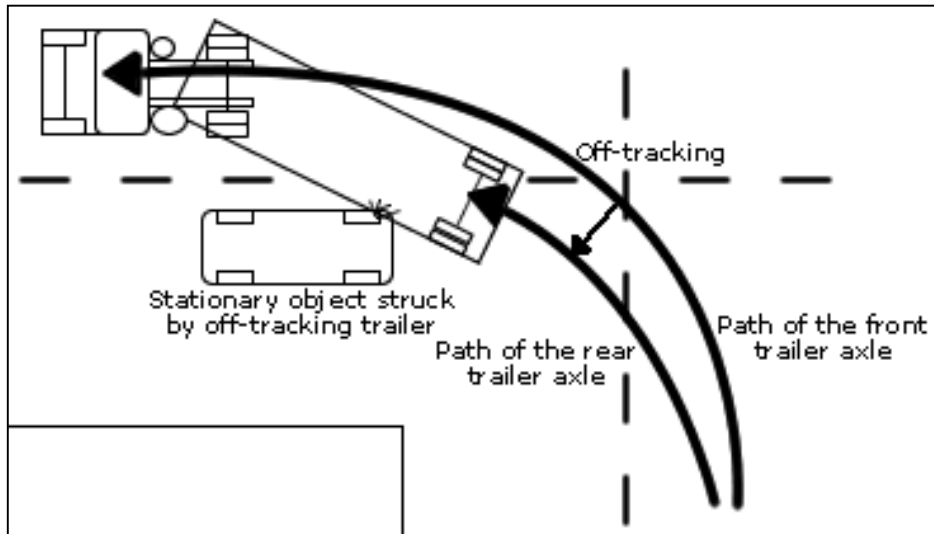
Ângulos de Ackerman

$$\tan \delta_o = \frac{L}{R + \frac{t}{2}} \Rightarrow \delta_o \cong \frac{L}{R + \frac{t}{2}}$$

$$\tan \delta_i = \frac{L}{R - \frac{t}{2}} \Rightarrow \delta_i \cong \frac{L}{R - \frac{t}{2}}$$

- Geometria de Ackerman: torques de esterçamento aumentam com o ângulo → **Reação natural**
- Geometria paralela: torques crescem inicialmente mas decrescem a partir de um certo ponto → **Indesejável**

Curvas em baixa velocidade

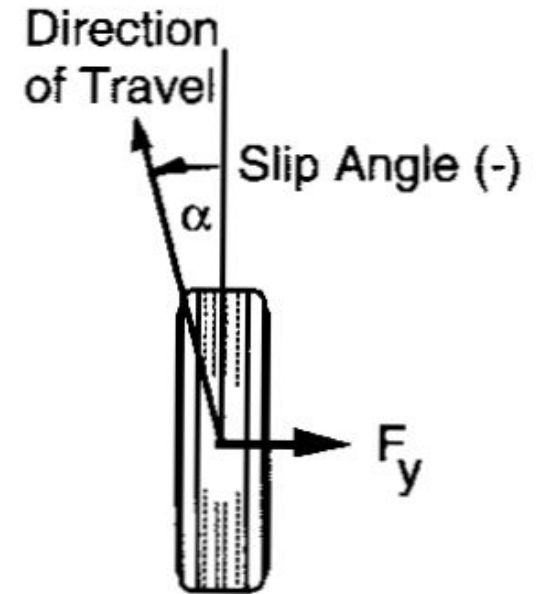
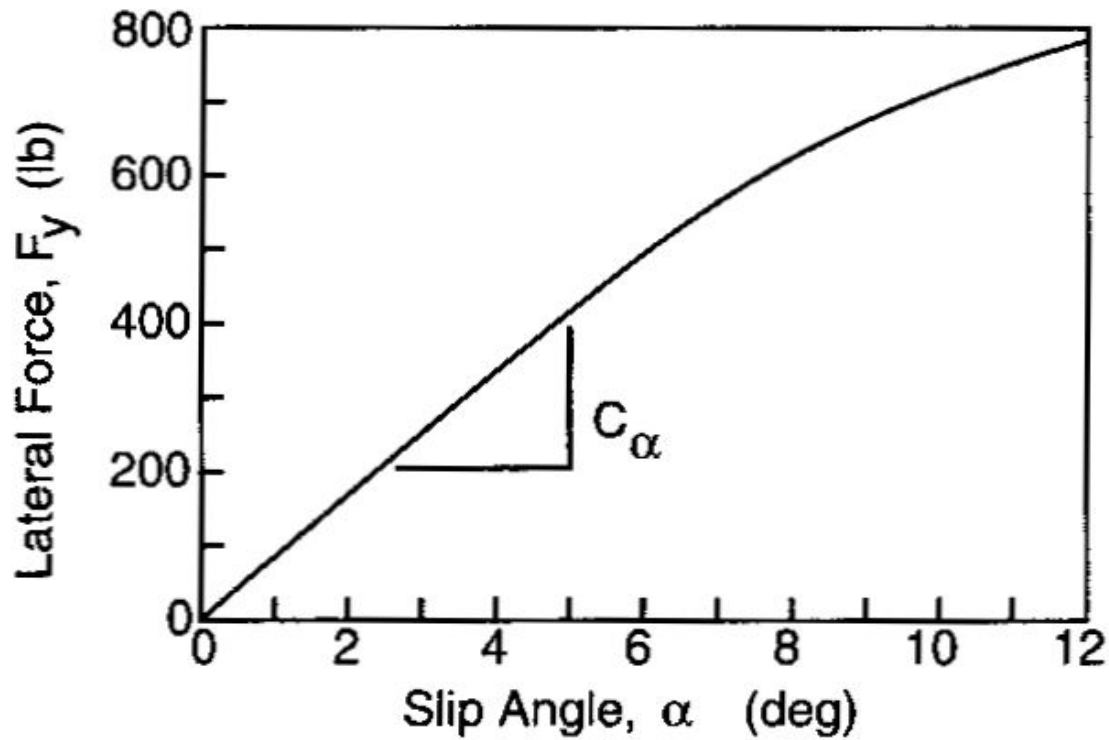


Nesta aula

- Comportamento em resposta direcional
 - Curvas em baixa velocidade
 - **Curvas em alta velocidade**
 - Efeitos da suspensão
- Atividade prática

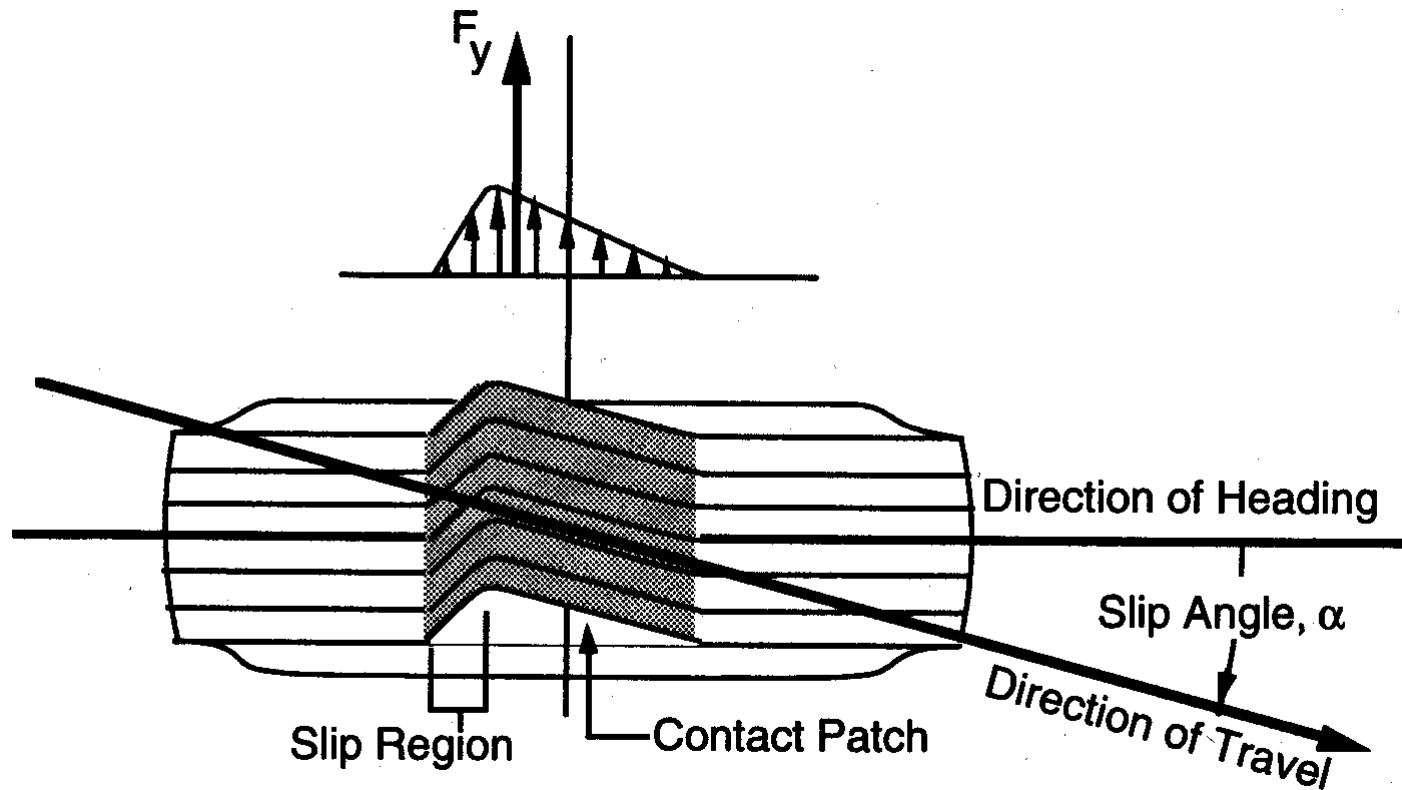
Deriva

Deriva (*slip angle*) - α



Deriva

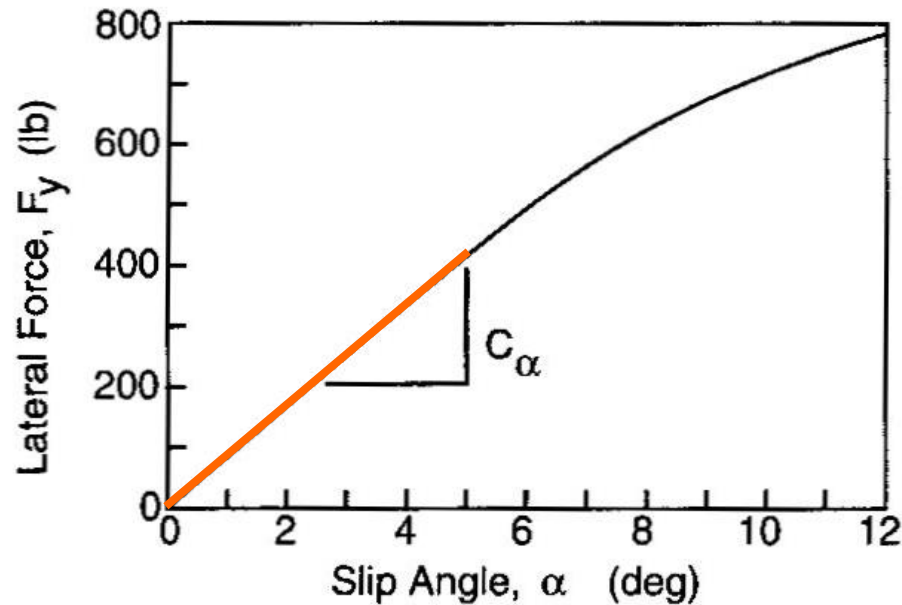
- Diferença entre a direção do movimento do veículo e a direção da roda
- Mola torcional



Deriva (*sleep angle*)



Força lateral (*cornering force*)

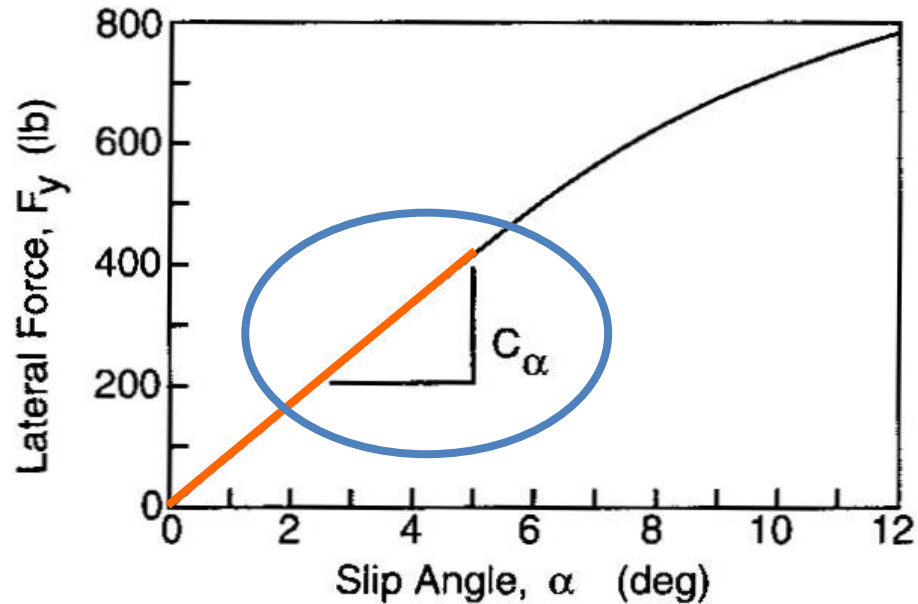


$$F_y = C_\alpha \cdot \alpha$$

para $\alpha < 5^\circ \Rightarrow$ comportamento aproximadamente linear

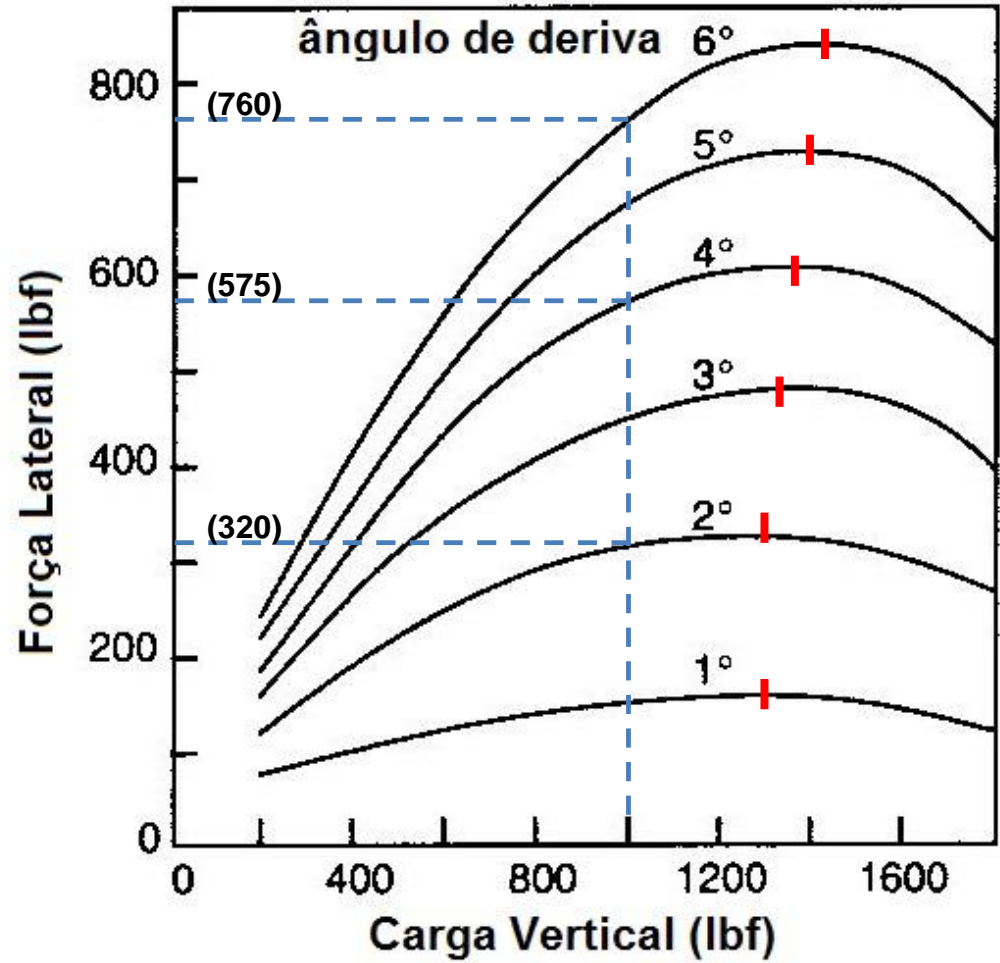
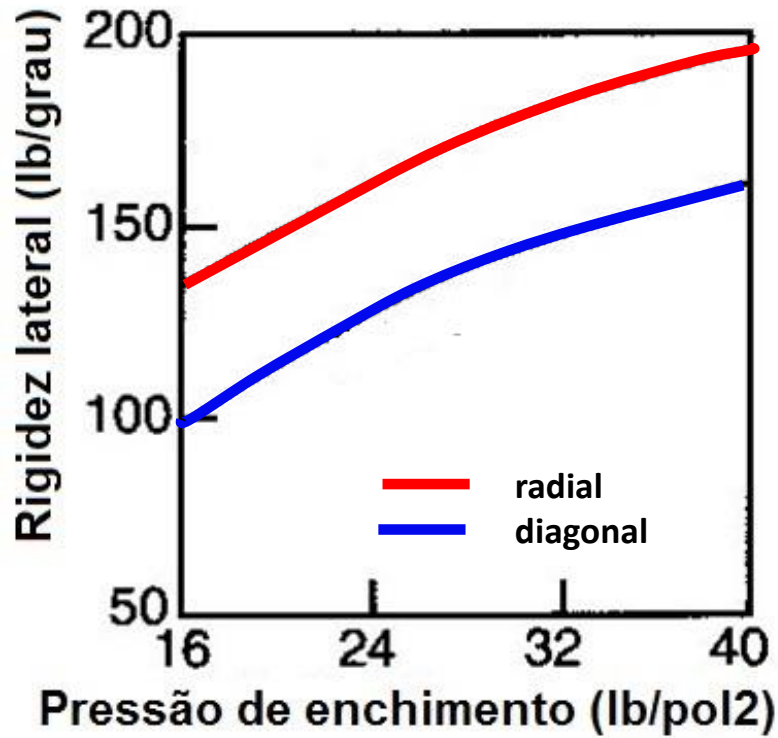
$C_\alpha \Rightarrow$ rigidez lateral $\left[\frac{\text{N}}{\text{grau}} \right]$ (cornering stiffness)

Rigidez lateral - C_{α} (*cornering stiffness*)

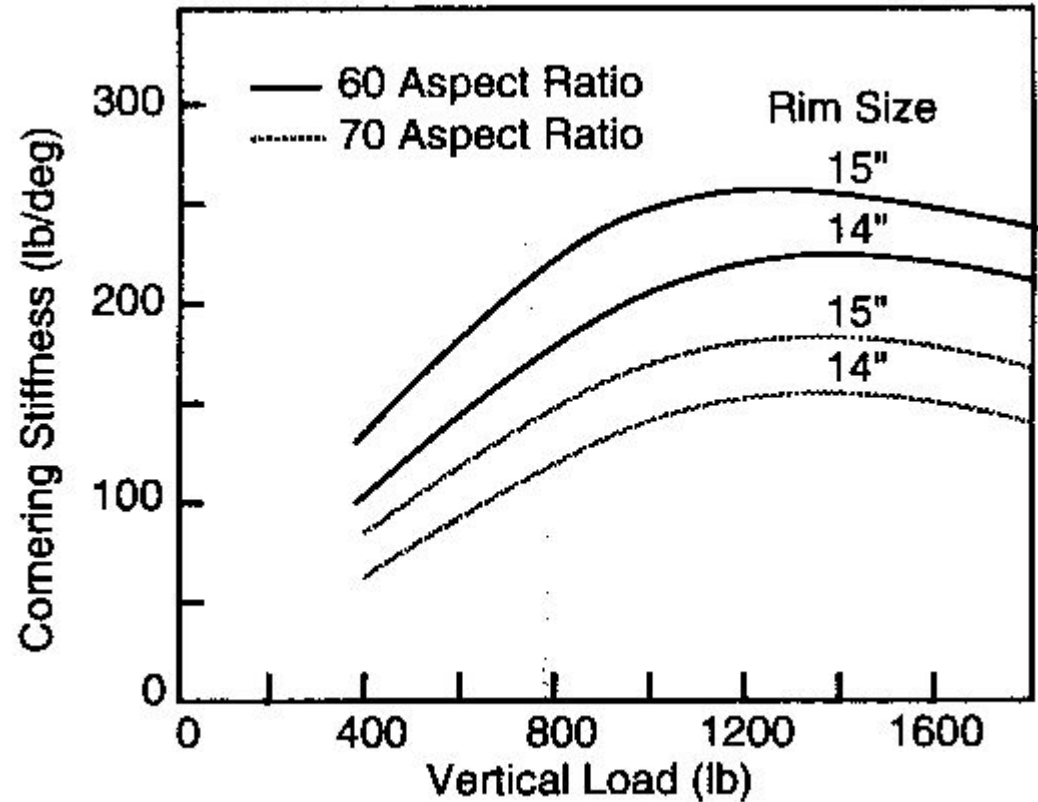
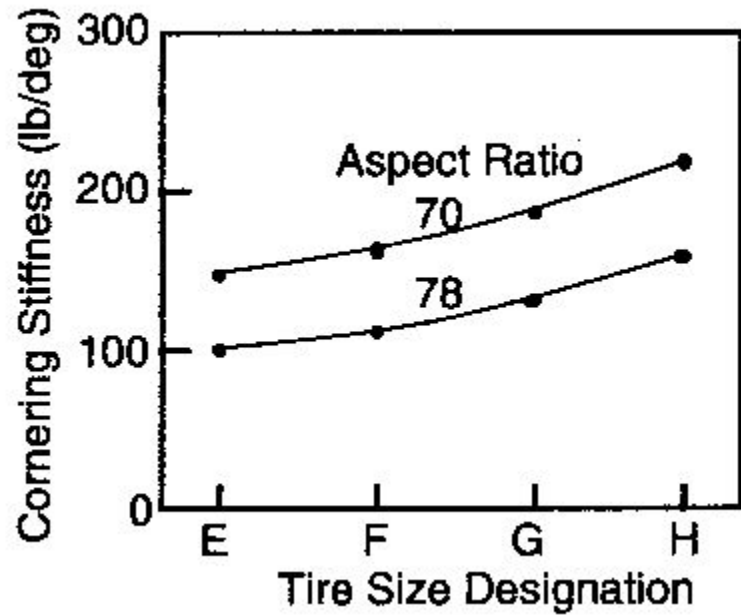


- Depende de:
 - tamanho e tipo do pneu
 - número de lonas
 - ângulo das lonas
 - largura da roda
 - desenho dos canais

Rigidez lateral - C_{α}



Rigidez lateral - C_{α}

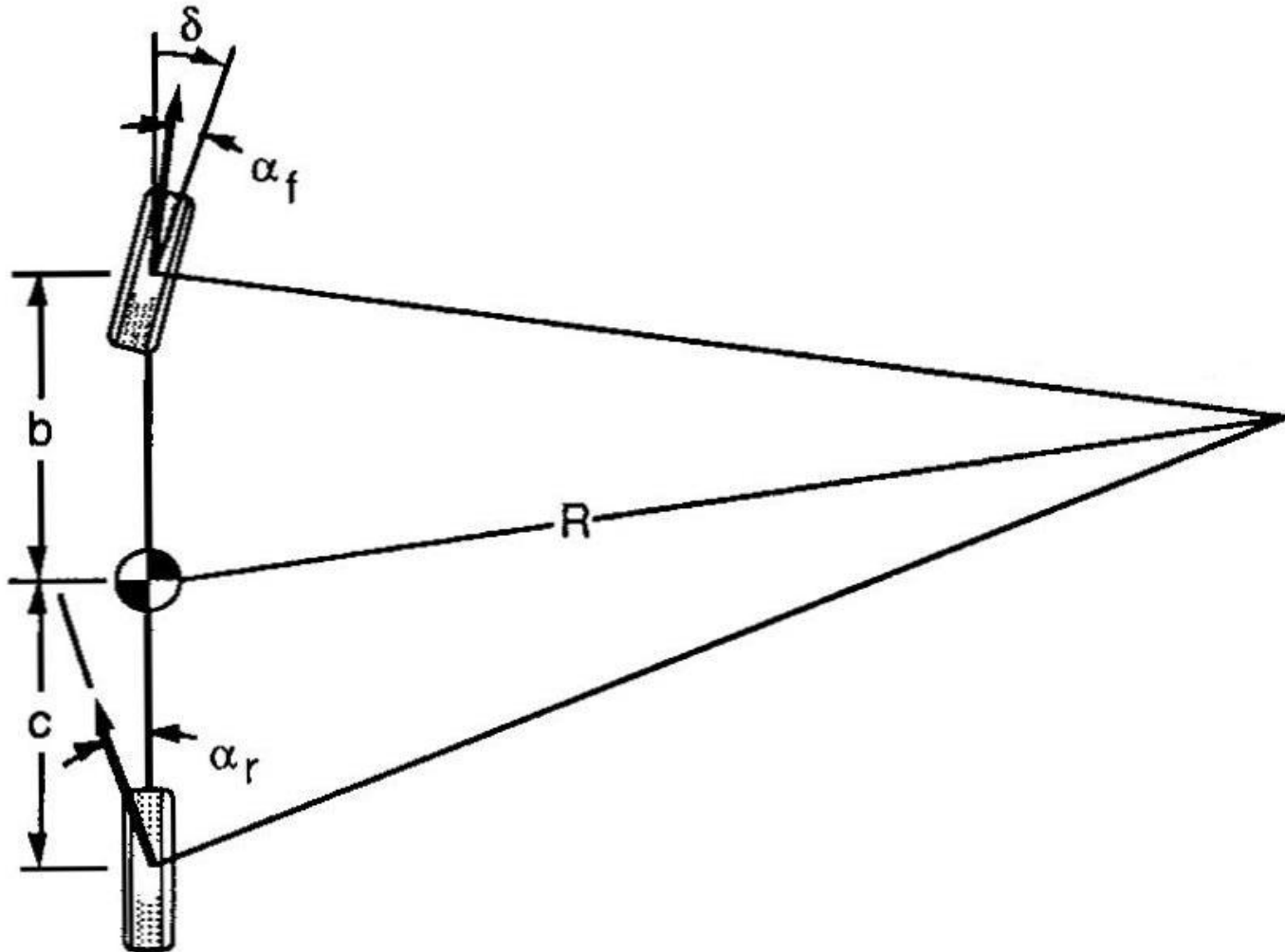


Coeficiente lateral - CC_{α}

$$CC_{\alpha} = \frac{C_{\alpha}}{F_z} = \frac{F_y}{F_z \cdot \alpha}$$

$CC_{\alpha} \Rightarrow$ coeficiente lateral $\left[\frac{\text{N}}{\text{N} \cdot \text{grau}} \right]$

Modelo de bicicleta



Modelo de bicicleta

$$\sum F_y = F_{yf} + F_{yr} = M \cdot \frac{V^2}{R}$$

$$\sum M_{CG} = F_{yf} \cdot b - F_{yr} \cdot c = 0$$

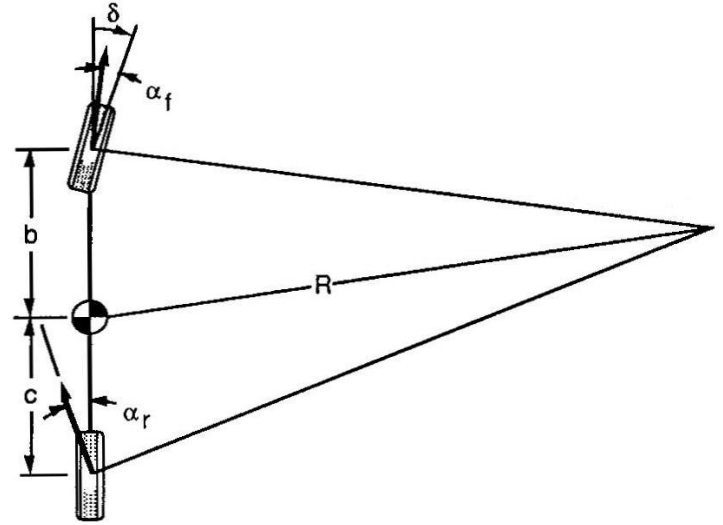
$$F_{yf} = F_{yr} \cdot \frac{c}{b}$$

$$M \cdot \frac{V^2}{R} = F_{yr} \cdot \left(\frac{c}{b} + 1 \right) = F_{yr} \cdot \left(\frac{b+c}{b} \right) = F_{yr} \cdot \left(\frac{L}{b} \right)$$

$$F_{yr} = M \cdot \frac{b}{L} \cdot \frac{V^2}{R} = \frac{W_r}{g} \cdot \frac{V^2}{R}$$

...

$$F_{yf} = M \cdot \frac{c}{L} \cdot \frac{V^2}{R} = \frac{W_f}{g} \cdot \frac{V^2}{R}$$



Modelo de bicicleta

$$C_{ar} \cdot \alpha_r = \frac{W_r}{g} \cdot \frac{V^2}{R} \Rightarrow \alpha_r = \frac{W_r \cdot V^2}{C_{ar} \cdot g \cdot R}$$

$$C_{af} \cdot \alpha_f = \frac{W_f}{g} \cdot \frac{V^2}{R} \Rightarrow \alpha_f = \frac{W_f \cdot V^2}{C_{af} \cdot g \cdot R}$$

$$\delta = \frac{180}{\pi} \cdot \frac{L}{R} + \alpha_f - \alpha_r$$

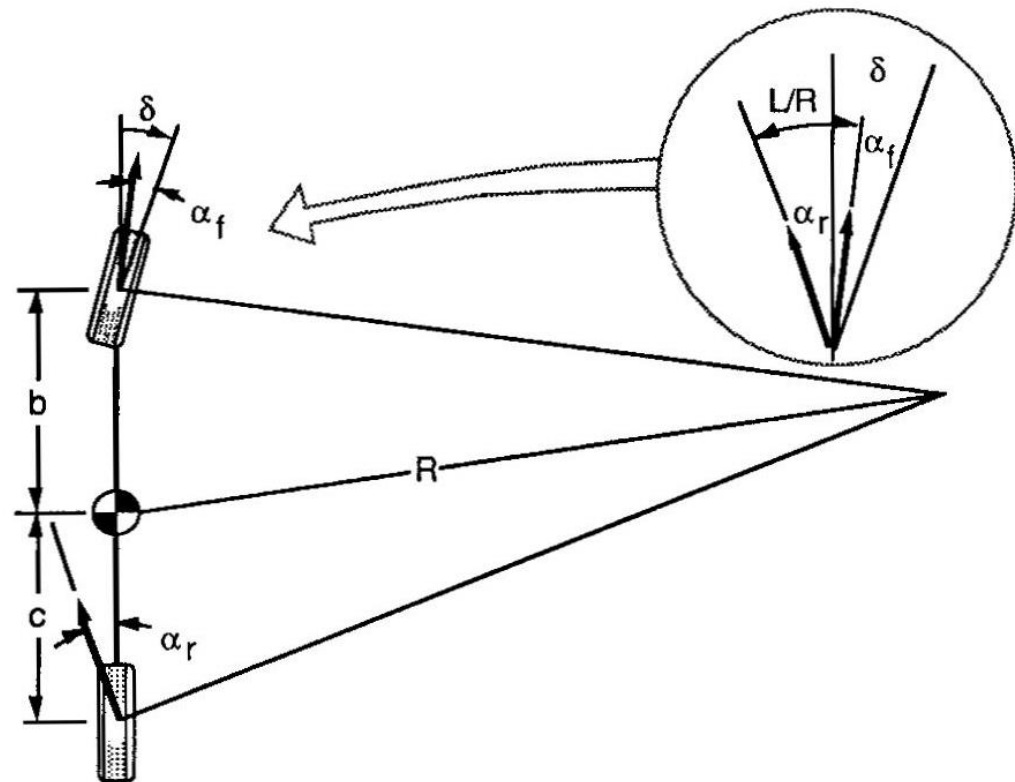
$$\delta = \frac{180}{\pi} \cdot \frac{L}{R} + \frac{W_f \cdot V^2}{C_{af} \cdot g \cdot R} - \frac{W_r \cdot V^2}{C_{ar} \cdot g \cdot R}$$

$$\delta = \frac{180}{\pi} \cdot \frac{L}{R} + \left(\frac{W_f}{C_{af}} - \frac{W_r}{C_{ar}} \right) \cdot \frac{V^2}{g \cdot R}$$

$$\delta = \frac{180}{\pi} \cdot \frac{L}{R} + K \cdot a_y$$

$K \rightarrow$ gradiente de sub-esterçamento (understeer gradient) (grau/g)

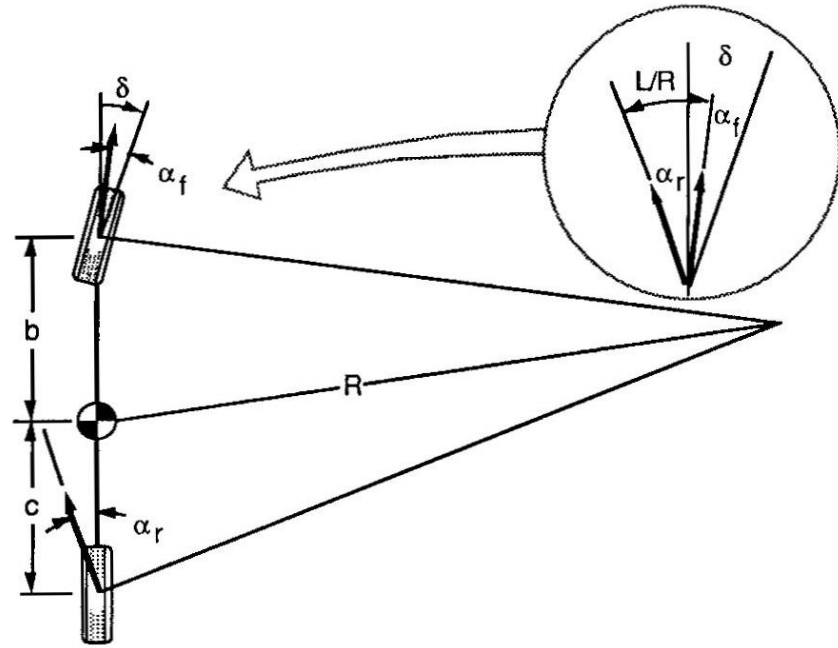
$a_y \rightarrow$ aceleração lateral (g)



Comportamento neutro

$$\delta = \frac{180}{\pi} \cdot \frac{L}{R} + \alpha_f - \alpha_r = \frac{180}{\pi} \cdot \frac{L}{R} + K \cdot a_y$$

$$K = \left(\frac{W_f}{C_{\alpha f}} - \frac{W_r}{C_{\alpha r}} \right)$$



1- Neutro

$$\frac{W_f}{C_{\alpha f}} = \frac{W_r}{C_{\alpha r}} \Rightarrow K = 0 \Rightarrow \alpha_f = \alpha_r$$

- Nenhuma mudança no volante é necessária
- O ângulo da curva é o ângulo de Ackerman
- A força lateral no CG produz derivas idênticas na dianteira e na traseira

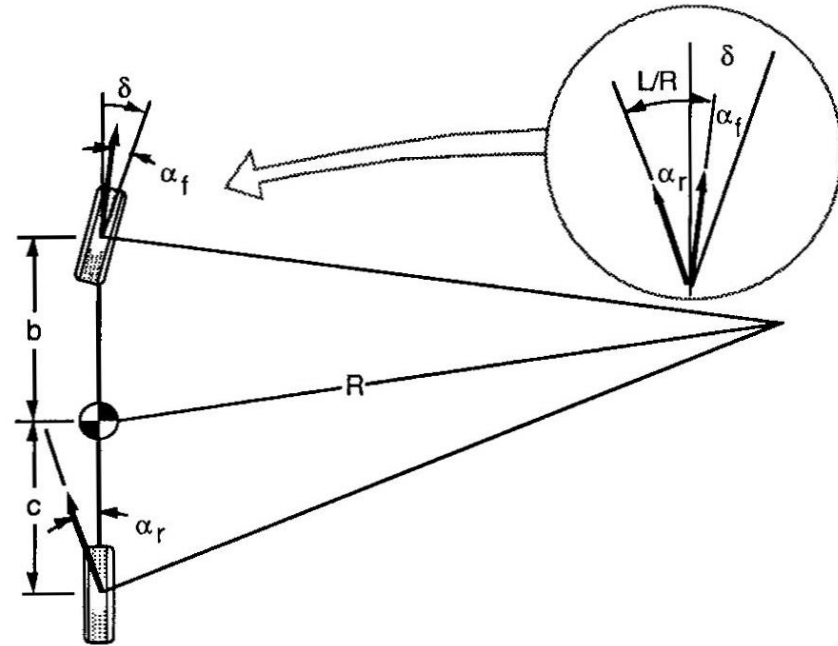
Comportamento sub-esterçante

$$\delta = \frac{180}{\pi} \cdot \frac{L}{R} + \alpha_f - \alpha_r = \frac{180}{\pi} \cdot \frac{L}{R} + K \cdot a_y$$

$$K = \left(\frac{W_f}{C_{\alpha f}} - \frac{W_r}{C_{\alpha r}} \right)$$

2 - Sub - esterçante

$$\frac{W_f}{C_{\alpha f}} > \frac{W_r}{C_{\alpha r}} \Rightarrow K > 0 \Rightarrow \alpha_f > \alpha_r$$



- O ângulo do volante aumenta com a velocidade com o valor de $K \cdot a_y$.
- O ângulo do volante deve ser maior que o de Ackerman.
- A força lateral no CG produz deriva maior na dianteira do que na traseira.
- A dianteira escorrega mais do que a traseira.

Comportamento sub-esterçante



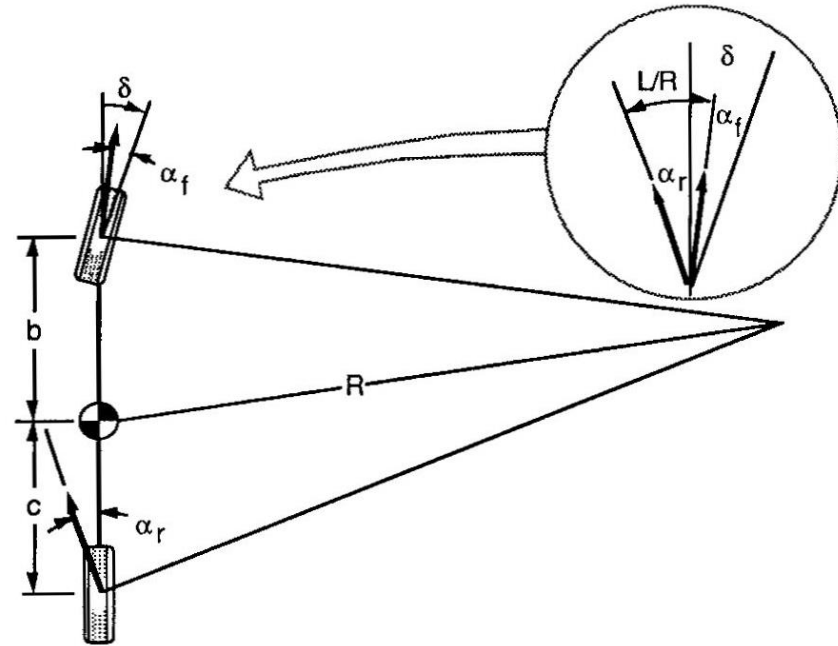
Comportamento sobre-esterçante

$$\delta = \frac{180}{\pi} \cdot \frac{L}{R} + \alpha_f - \alpha_r = \frac{180}{\pi} \cdot \frac{L}{R} + K \cdot a_y$$

$$K = \left(\frac{W_f}{C_{\alpha f}} - \frac{W_r}{C_{\alpha r}} \right)$$

3 - Sobre - esterçante

$$\frac{W_f}{C_{\alpha f}} < \frac{W_r}{C_{\alpha r}} \Rightarrow K < 0 \Rightarrow \alpha_f < \alpha_r$$



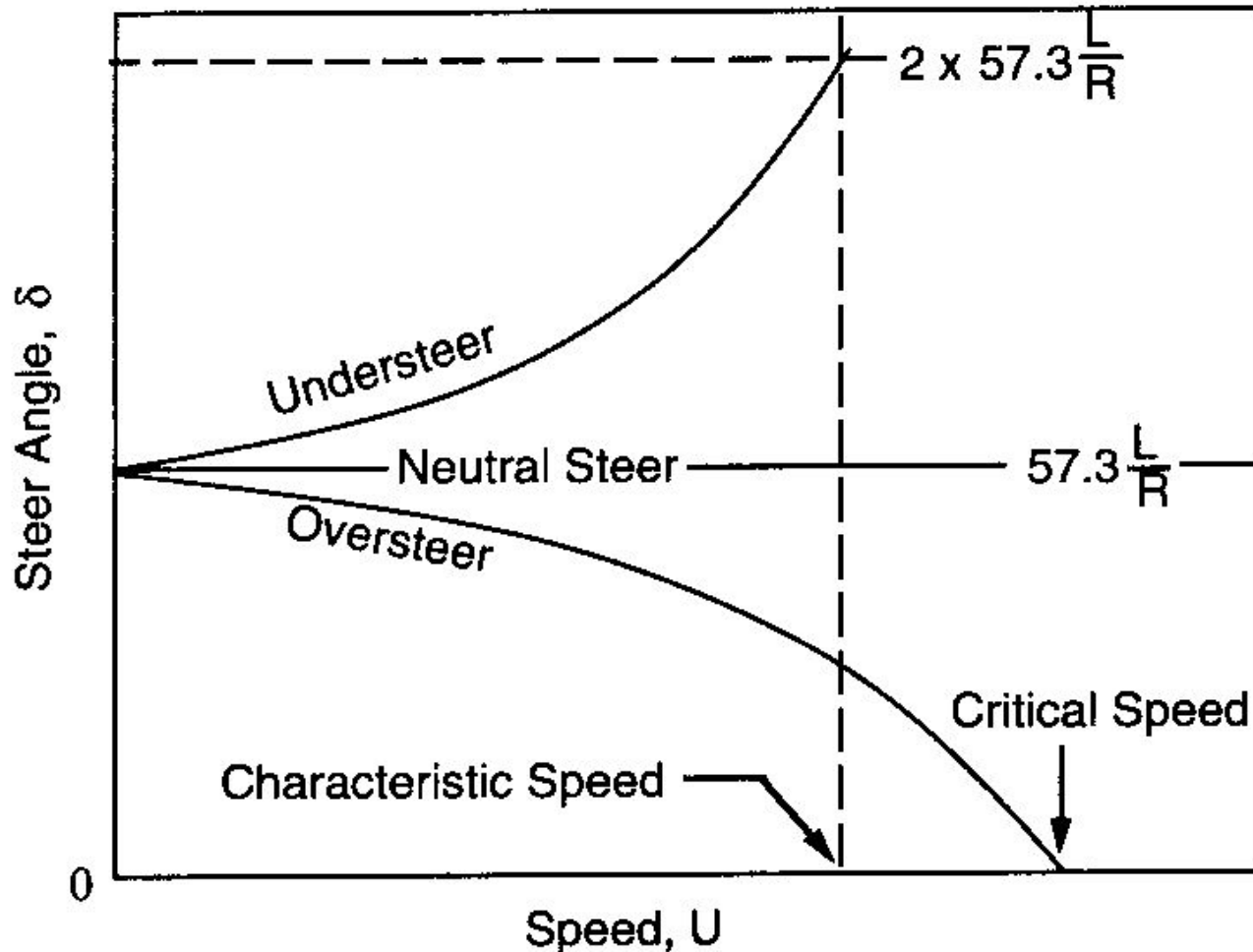
- O ângulo do volante diminui com a velocidade com o valor de $K \cdot a_y$.
- O ângulo do volante deve ser menor que o de Ackerman.
- A força lateral no CG produz deriva maior na traseira do que na dianteira.
- A traseira escorrega mais do que a dianteira.

Comportamento sobre-esterçante



Mudança do ângulo de esterçamento com a velocidade

$$\delta = \frac{180}{\pi} \cdot \frac{L}{R} + \alpha_f - \alpha_r = \frac{180}{\pi} \cdot \frac{L}{R} + K \cdot a_y$$



Velocidade característica

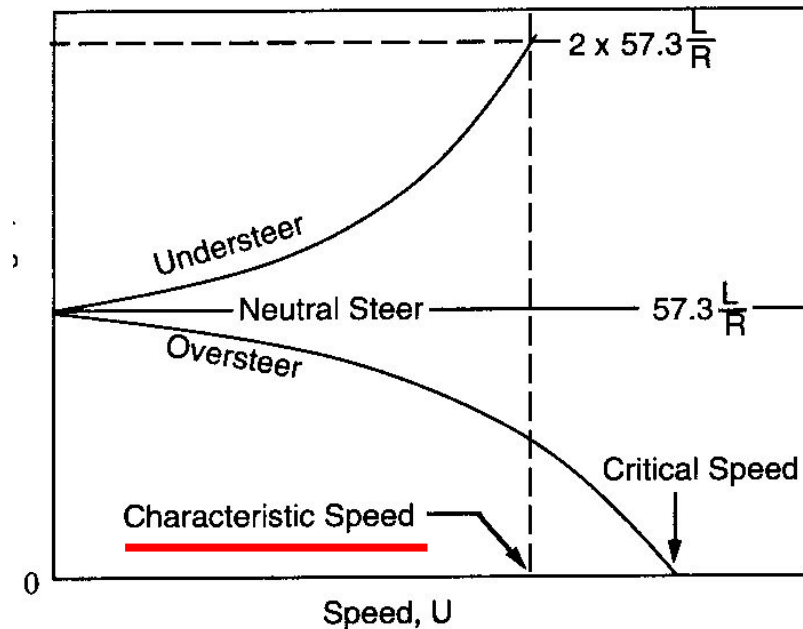
Velocidade, de um veículo sub-esterçante, na qual se deve aplicar um ângulo de direção igual a duas vezes o ângulo de Ackerman.

$$\delta = \frac{180}{\pi} \cdot \frac{L}{R} + K \cdot a_y$$

$$2 \cdot \frac{180}{\pi} \cdot \frac{L}{R} = \frac{180}{\pi} \cdot \frac{L}{R} + K \cdot \frac{V_{car}^2}{g \cdot R}$$

$$\frac{180}{\pi} \cdot \frac{L}{R} = K \cdot \frac{V_{car}^2}{g \cdot R}$$

$$V_{car} = \sqrt{\frac{180}{\pi} \cdot \frac{L \cdot g}{K}}$$



Velocidade crítica

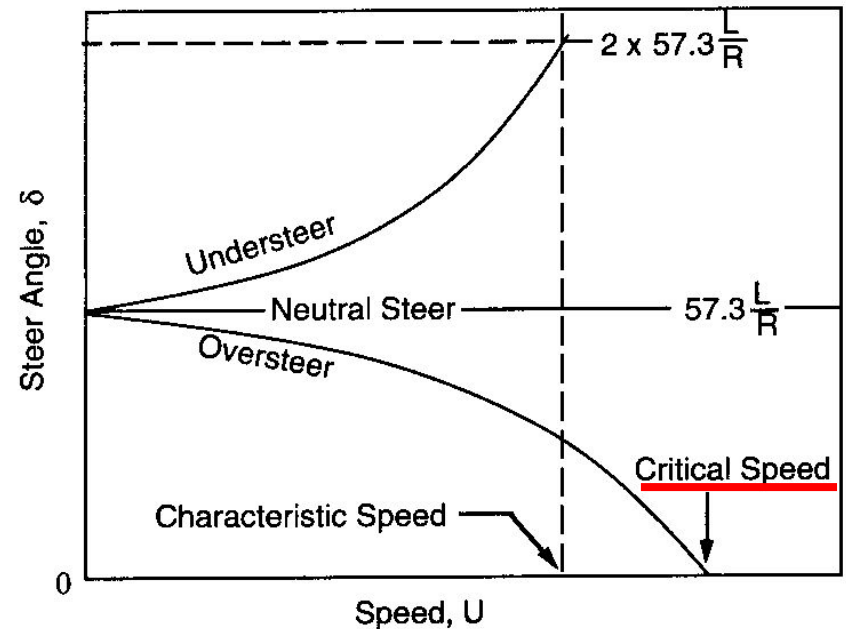
$$\delta = \frac{180}{\pi} \cdot \frac{L}{R} + K \cdot a_y$$

$$0 = \frac{180}{\pi} \cdot \frac{L}{R} + K \cdot \frac{V_{crit}^2}{g \cdot R}$$

$$\frac{180}{\pi} \cdot \frac{L}{R} = -K \cdot \frac{V_{crit}^2}{g \cdot R}$$

$$V_{crit} = \sqrt{-\frac{180}{\pi} \cdot \frac{L \cdot g}{K}}$$

Velocidade, de um veículo sobre-esterçante, na qual o veículo se torna instável.



Ganho de aceleração lateral

$$\delta = \frac{180}{\pi} \cdot \frac{L}{R} + K \cdot a_y$$

...

$K = 0$ (neutro)

Ganho proporcional a V^2 .

$K > 0$ (sub-esterçante)

Ganho é sempre menor que o neutro.

$K < 0$ (sobre-esterçante)

Ganho aumenta até atingir V_{crit} ,
quando tende ao infinito.

$$\frac{a_y}{\delta} = \frac{\frac{V^2}{\frac{180}{\pi} \cdot L \cdot g}}{1 + \frac{K \cdot V^2}{\frac{180}{\pi} \cdot L \cdot g}}$$

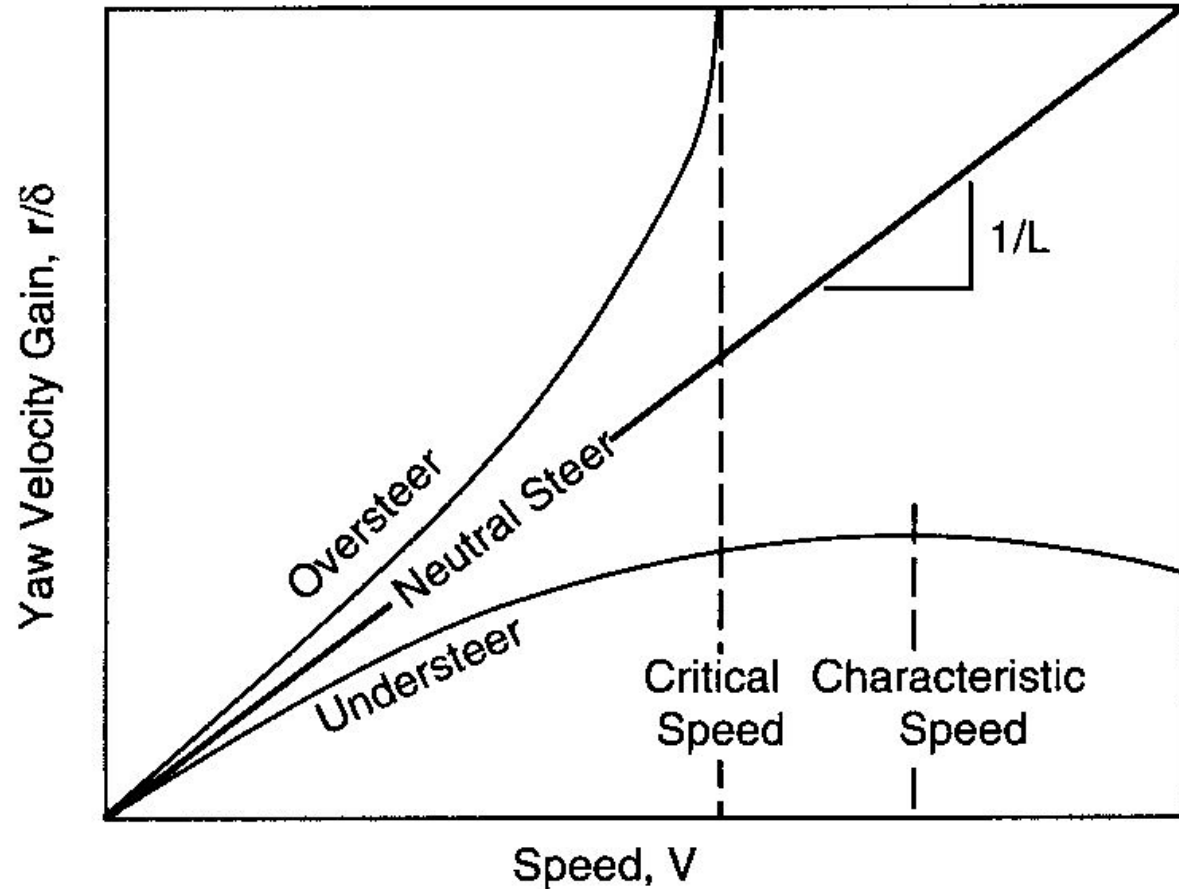
Ganho de velocidade de guindada

$$r = \frac{180}{\pi} \cdot \frac{V}{R}$$

$$\delta = \frac{180}{\pi} \cdot \frac{L}{R} + K \cdot a_y$$

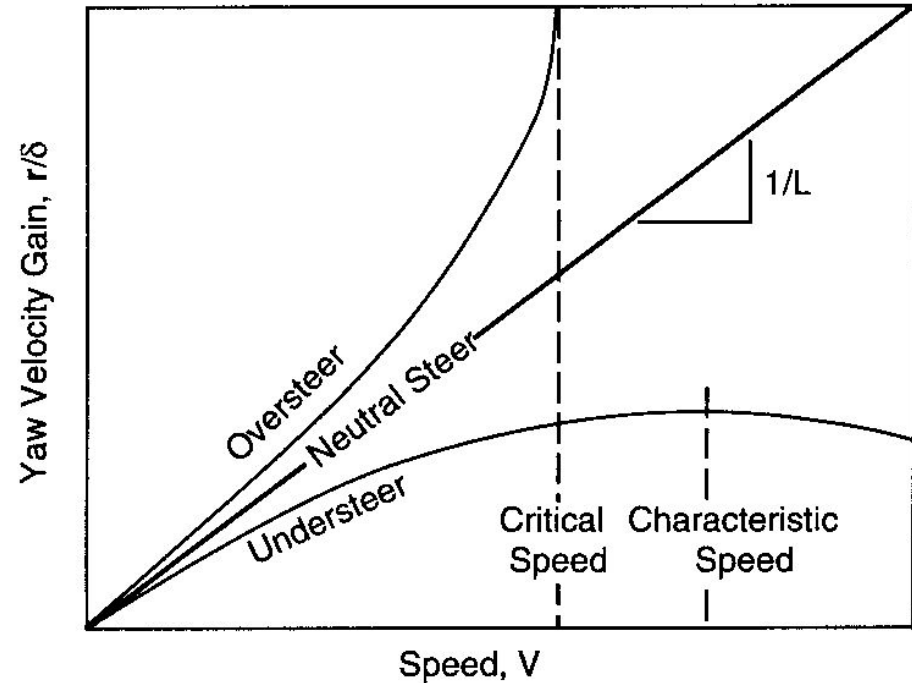
...

$$\frac{r}{\delta} = \frac{\frac{V}{L}}{1 + \frac{K \cdot V^2}{\frac{180}{\pi} \cdot L \cdot g}}$$



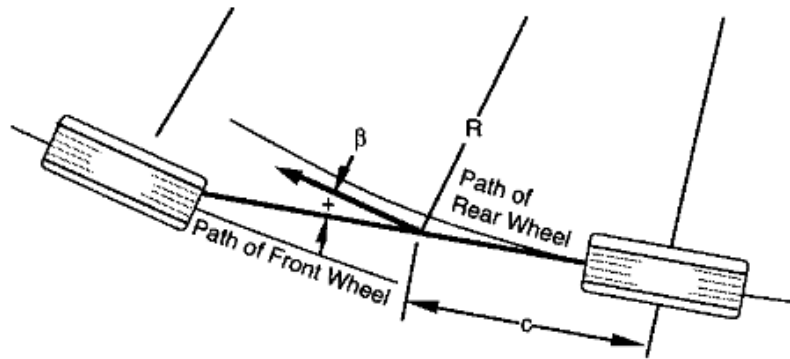
Ganho de velocidade de guindada

$$\frac{r}{\delta} = \frac{\frac{V}{L}}{1 + \frac{K.V^2}{\frac{180}{\pi} \cdot L \cdot g}}$$

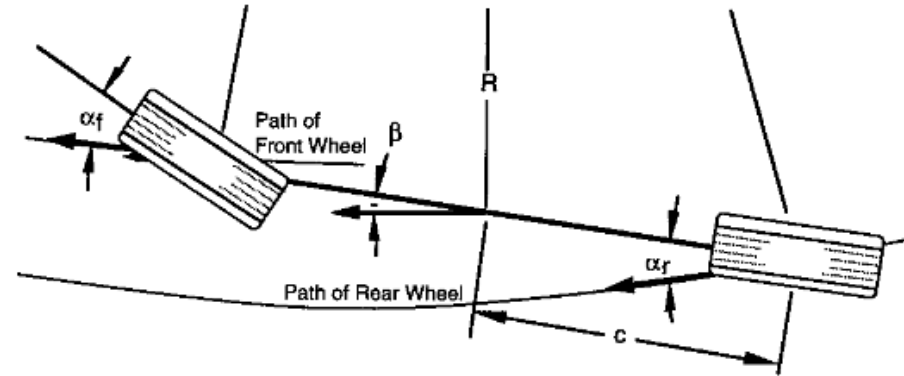


- Neutro: ganho proporcional à velocidade.
- Sobre-esterçante: ganho infinito na velocidade crítica.
- Sub-esterçante: aumenta até a velocidade característica e depois cai.
- Velocidade característica: maior resposta em guinada.

Ângulo de deslizamento lateral (*sideslip angle*)



Em velocidades baixas

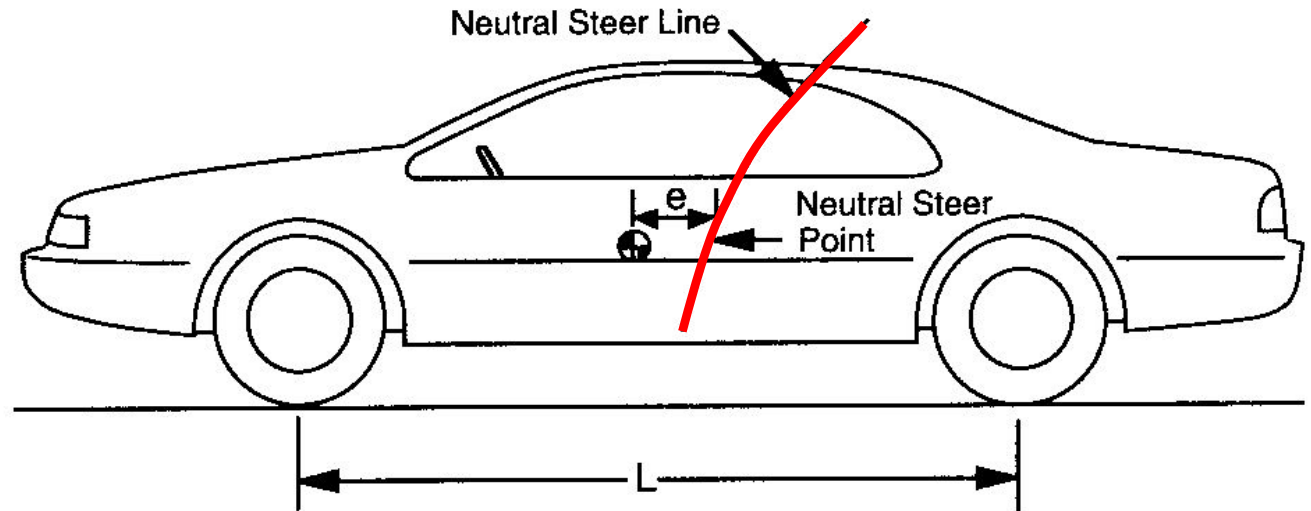


Em velocidades altas

$$\beta = 57,3 \frac{c}{R} - \alpha_r$$

Margem Estática

$$ME = \frac{e}{L}$$



- Linha de esterçamento neutro: linha onde a força lateral não produz guinada.

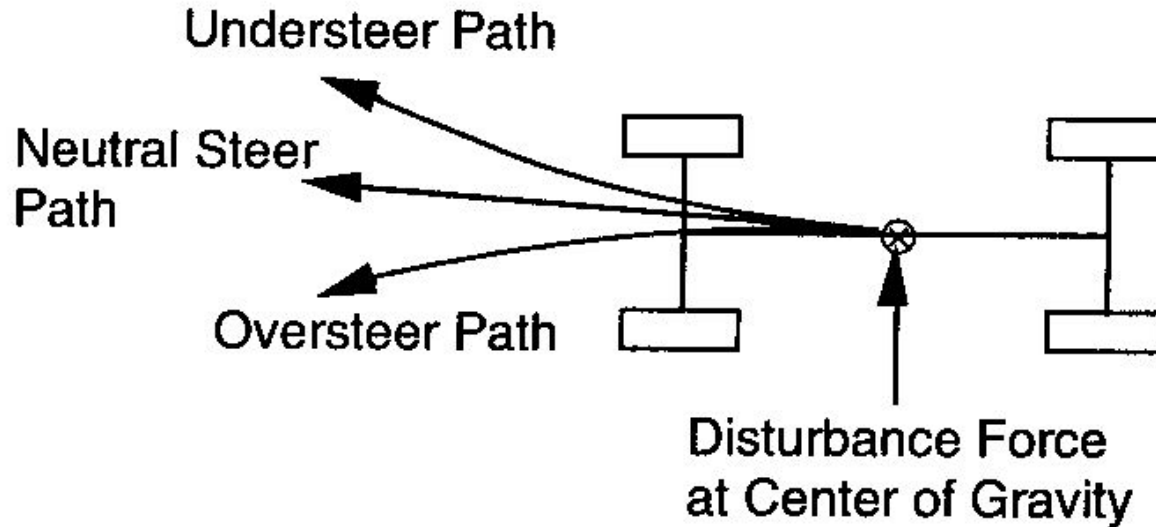
Linha atrás do CG $\Rightarrow ME > 0 \Rightarrow$ sub-esterçante

Linha sobre o CG $\Rightarrow ME = 0 \Rightarrow$ neutro

Linha à frente do CG $\Rightarrow ME < 0 \Rightarrow$ sobre-esterçante

- Veículos urbanos: $+0,05 < ME < +0,07$

Efeitos da Suspensão



- Distribuição do momento de rolagem
- Influência da cambagem
- Esterçamento na rolagem
- Esterçamento devido à força lateral
- Torque alinhante
- Força trativa

Influência da transferência de carga

Exemplo: Considera-se o eixo de um veículo dotado de pneus 5,60/15 comaros 4Jx15, compressão de $1,4\text{kgf}/\text{cm}^2$ (aproximadamente $20\text{lb}/\text{in}^2$). A carga, como o veículo parado, que atua em cada roda é de 3000 N . A curva $S = f(Q)$ para o pneu, com um ângulo de deriva de 8° , é dada na Figura 9.1. É feita a análise da carga lateral absorvida, para cada um dos dois tipos de suspensões especificadas, a seguir.

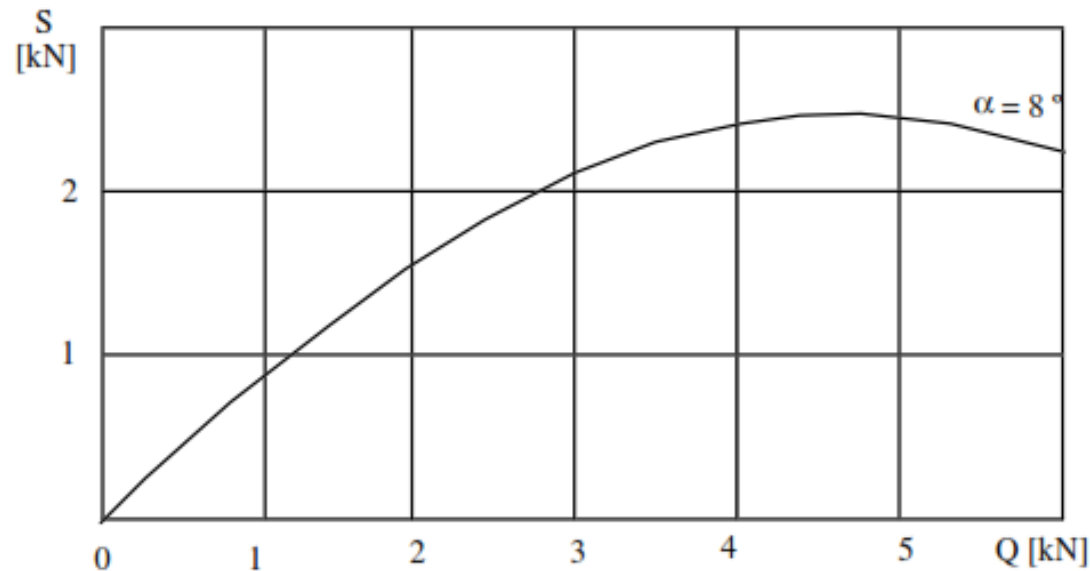


Figura 9.1: Carga lateral absorvida, em função da carga normal sobre a roda, para um dado ângulo de deriva.

Influência da transferência de carga

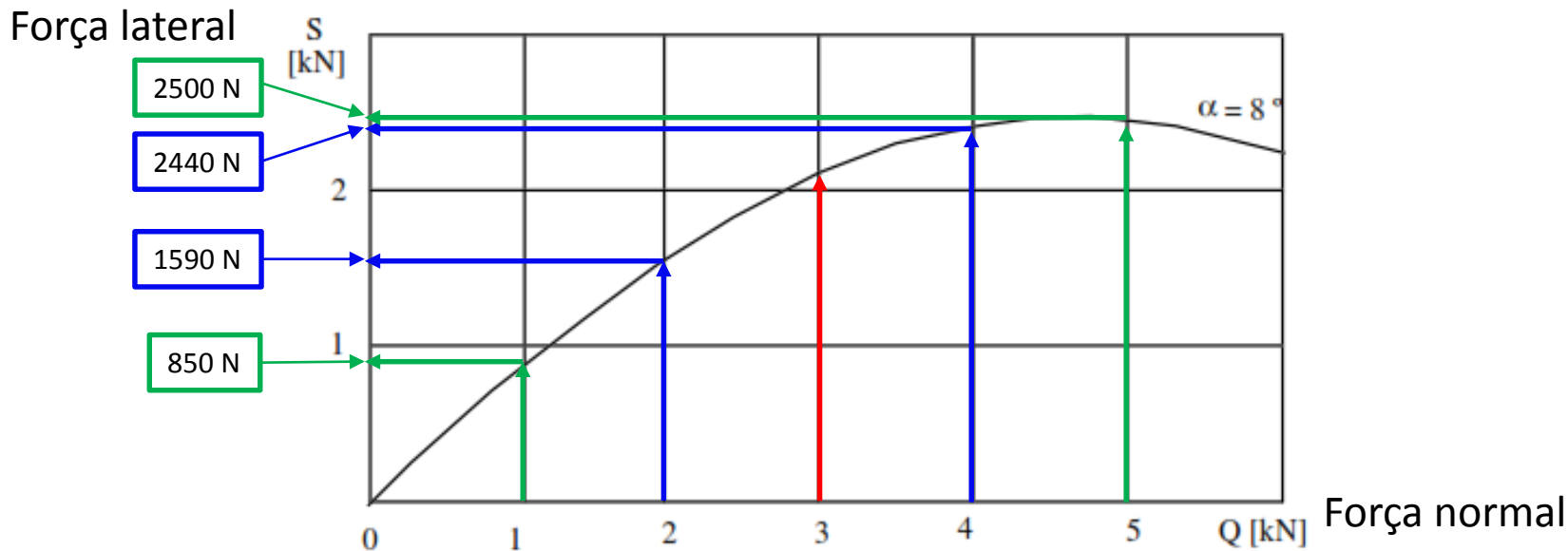


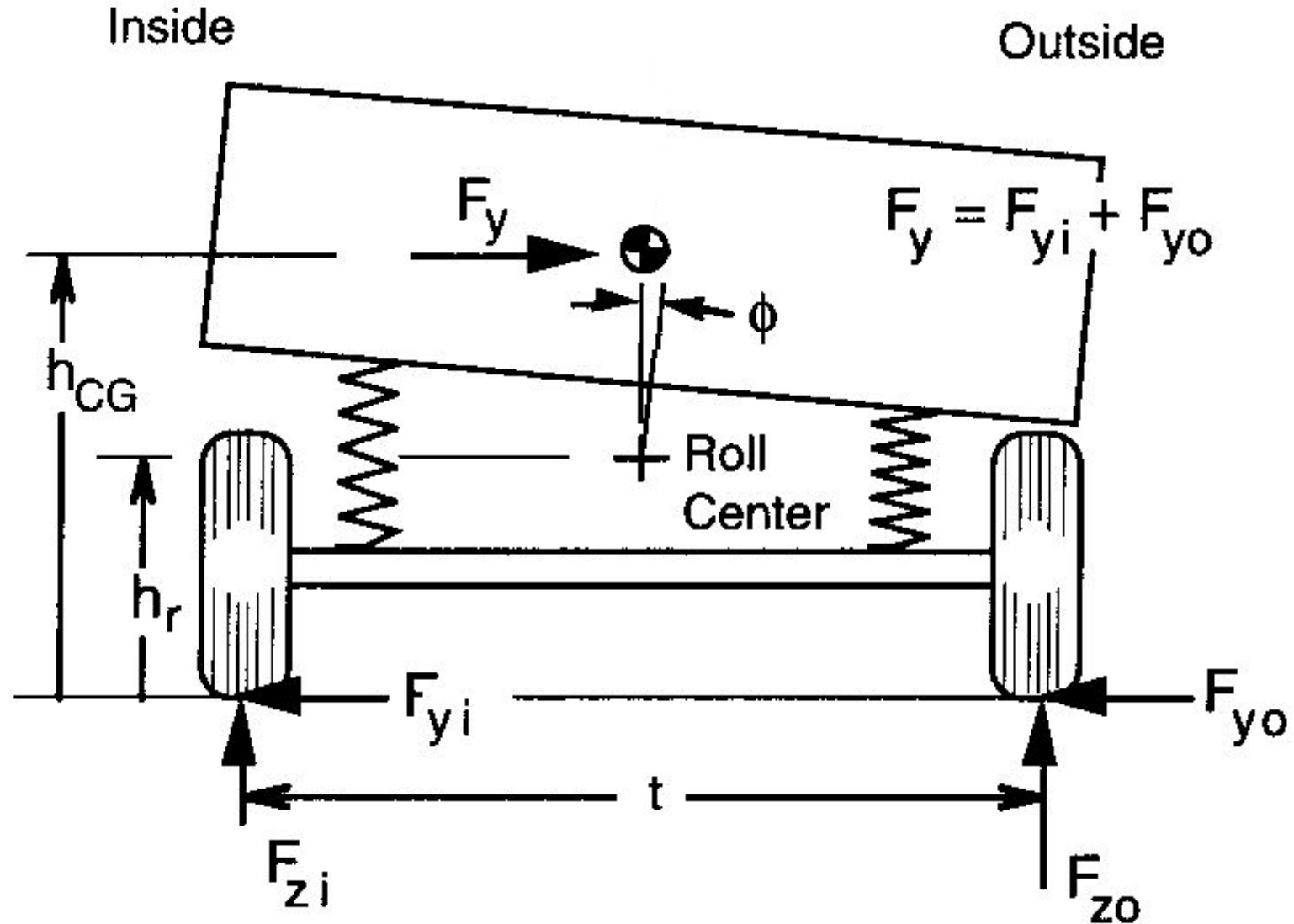
Figura 9.1: Carga lateral absorvida, em função da carga normal sobre a roda, para um dado ângulo de deriva.

			ΔG		
			0	1000	2000
força normal	externa	Q_e	3000	4000	5000
	interna	Q_i	3000	2000	1000
força normal total		Q_e+Q_i	6000	6000	6000
força lateral	externa	S_e	0	2440	2500
	interna	S_i	0	1590	850
força lateral total		S_e+S_i	0	4030	3350

Distribuição do momento de rolagem

- A transferência de carga produzida pelo momento de rolagem altera a força lateral.
- As transferências podem ocorrer de forma diferente nos eixos dianteiro e traseiro.
- Maiores momentos de rolagem na dianteira contribuem para o sub-esterçamento.
- Maiores momentos de rolagem na traseira contribuem para o sobre-esterçamento.
- Influência na escolha das molas e das barras estabilizadoras.

Mecanismo que governa o momento de rolagem



Mecanismo que governa o momento de rolagem

Momento produzido pelas molas

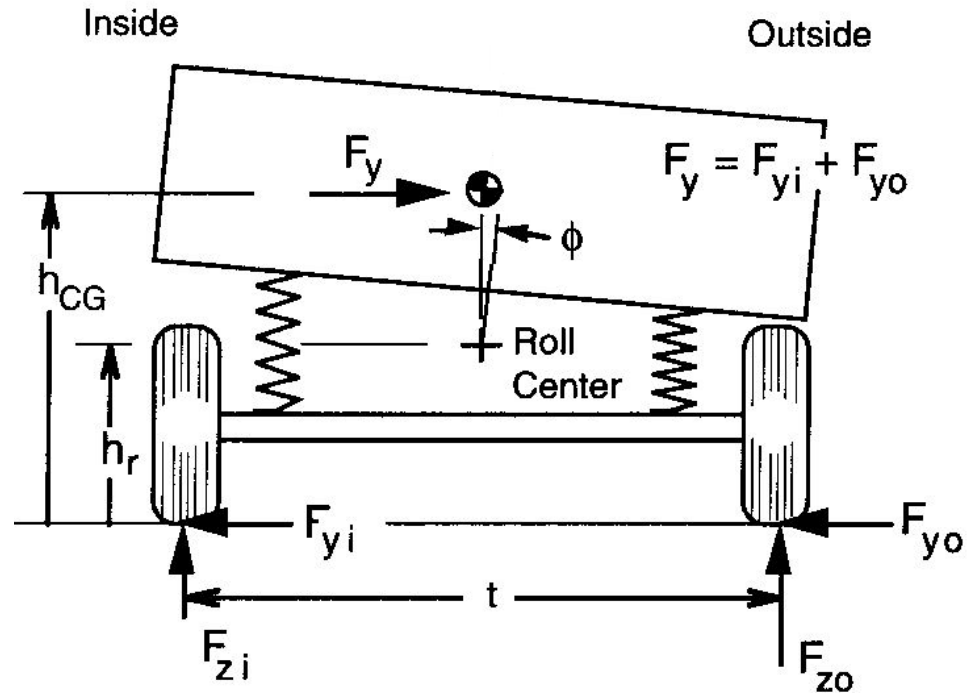
$$M = K_{\phi} \cdot \phi = -F_{zi} \cdot \frac{s}{2} + F_{zo} \cdot \frac{s}{2}$$

$$F_{zi} = F_z - K_s \cdot \frac{s}{2} \cdot \tan \phi$$

$$F_{zo} = F_z + K_s \cdot \frac{s}{2} \cdot \tan \phi$$

$$\tan \phi \cong \phi$$

$$K_{\phi} = \frac{1}{2} \cdot K_s \cdot s^2$$



K_{ϕ} = rigidez de rolagem da suspensão

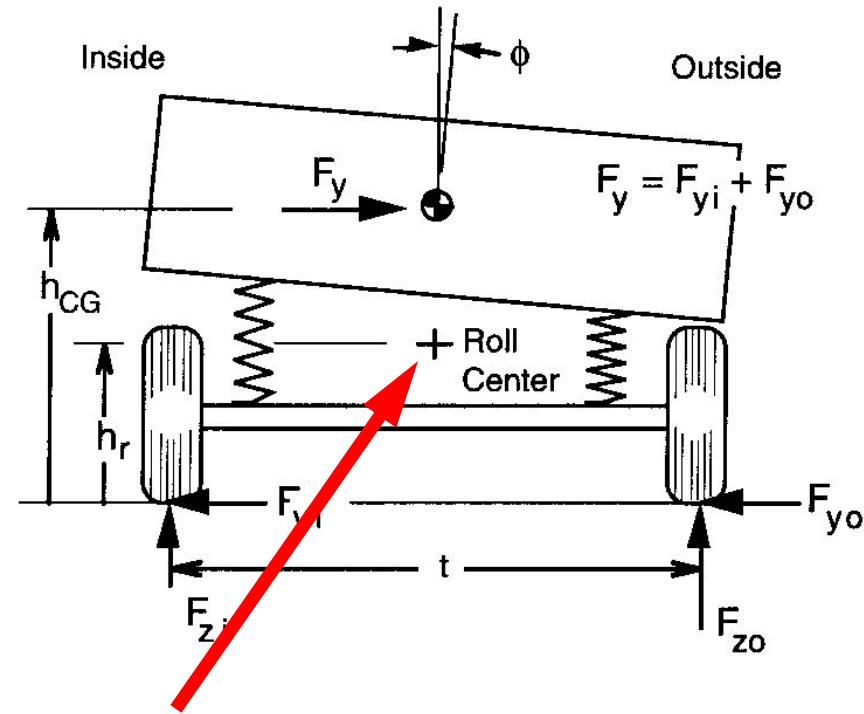
K_s = rigidez de cada mola

s = distância entre as molas

Centro de rolagem

Centro de rolagem (*roll center*)

- Ponto imaginário sobre a carroceria em torno do qual ela rola pela aplicação de um momento puro.
- Ponto onde a força lateral é transmitida do eixo para a carroceria.
- Ponto sobre a carroceria em que a força lateral aplicada não produz nenhum ângulo de rolagem.



Transferência de carga

$$\sum M_{CR} = 0$$

$$-F_{zi} \cdot \frac{t}{2} + F_{zo} \cdot \frac{t}{2} - F_y \cdot h_r - K_\phi \cdot \phi = 0$$

$$F_{zo} - F_{zi} = 2 \cdot F_y \cdot \frac{h_r}{t} + 2 \cdot \frac{K_\phi \cdot \phi}{t} = 2 \cdot \Delta F_z$$

F_{zo} = carga na roda externa

F_{zi} = carga na roda interna

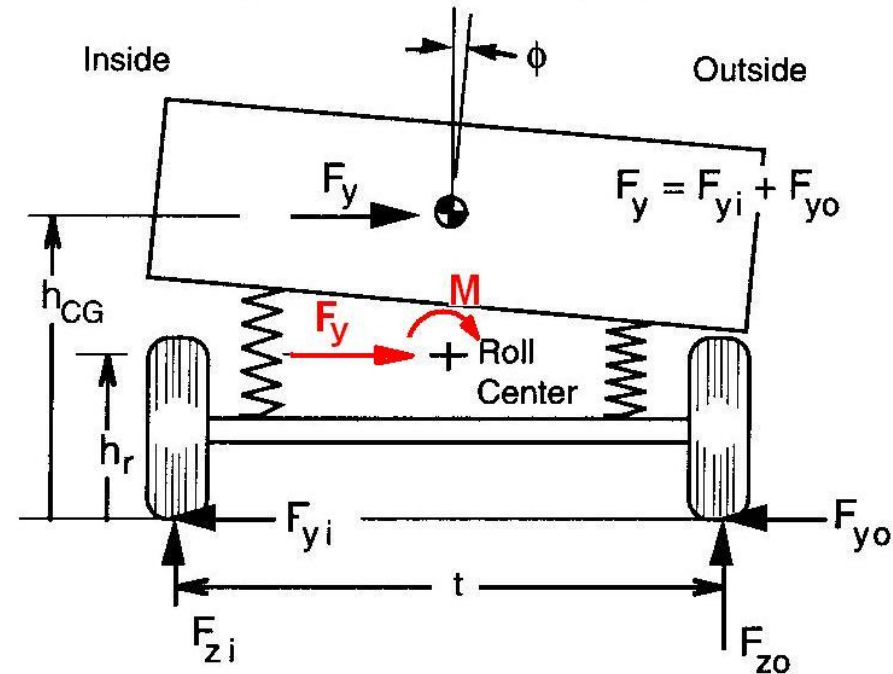
F_y = força lateral = $F_{yi} + F_{yo}$

h_r = altura do centro de rolagem

t = bitola

K_ϕ = rigidez de rolagem da suspensão

ϕ = ângulo de rolagem da carroceria

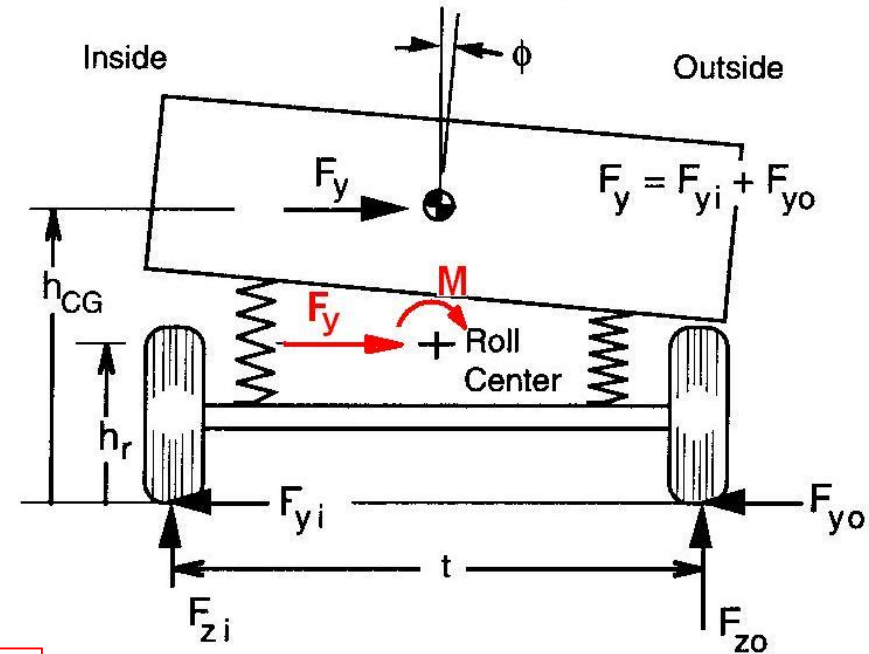


Transferência de carga

$$F_{z_o} - F_{z_i} = 2 \cdot F_y \cdot \frac{h_r}{t} + 2 \cdot \frac{K_\phi \cdot \phi}{t} = 2 \cdot \Delta F_z$$

parcela devido à aplicação da força lateral

parcela devido à rolagem do veículo



Ângulo de rolagem

A distribuição do momento depende do veículo como um todo

$$\sum M_{\text{eixo de rolagem}} = M_{\phi}$$

$$M_{\phi} = \left[W \cdot h_1 \cdot \sin \phi + \frac{W}{g} \cdot \frac{V^2}{R} \cdot h_1 \cdot \cos \phi \right] \cdot \cos \varepsilon$$

Para ϕ e ε muito pequenos

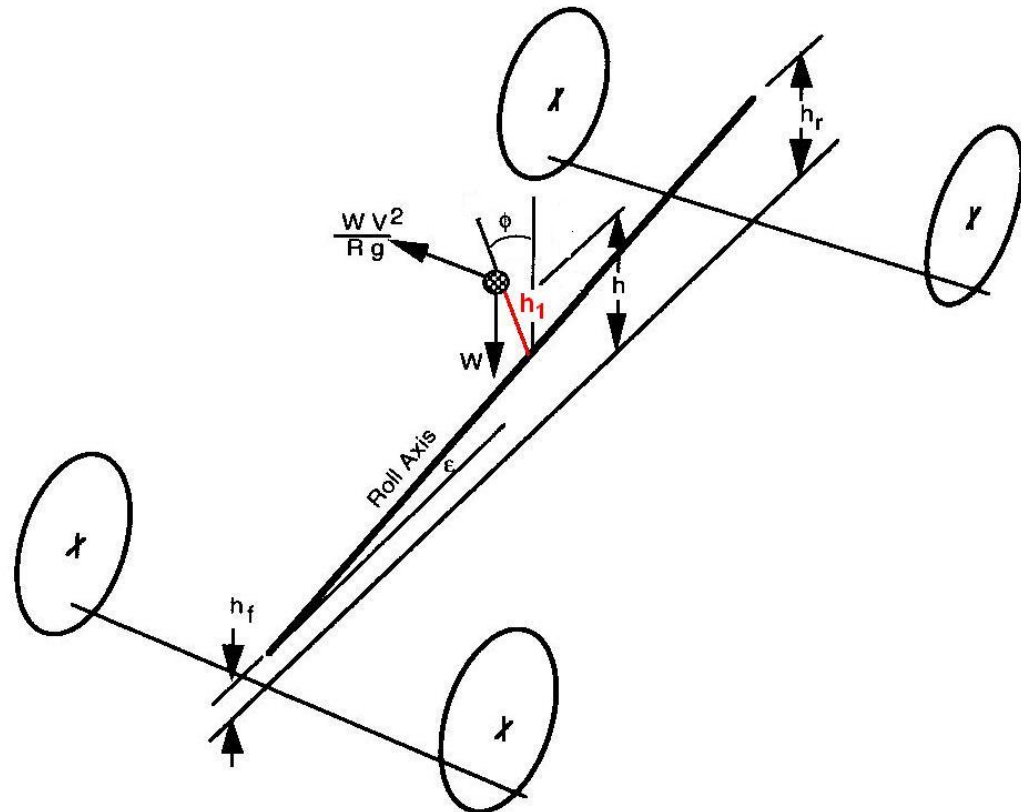
$$M_{\phi} = W \cdot h_1 \left[\frac{V^2}{R \cdot g} + \phi \right]$$

Sendo

$$M_{\phi} = M_{\phi_f} + M_{\phi_r} = (K_{\phi_f} + K_{\phi_r}) \cdot \phi,$$

resulta

$$\phi = \frac{W \cdot h_1 \cdot \frac{V^2}{R \cdot g}}{K_{\phi_f} + K_{\phi_r} - W \cdot h_1}$$



Taxa de rolagem (*roll rate*)

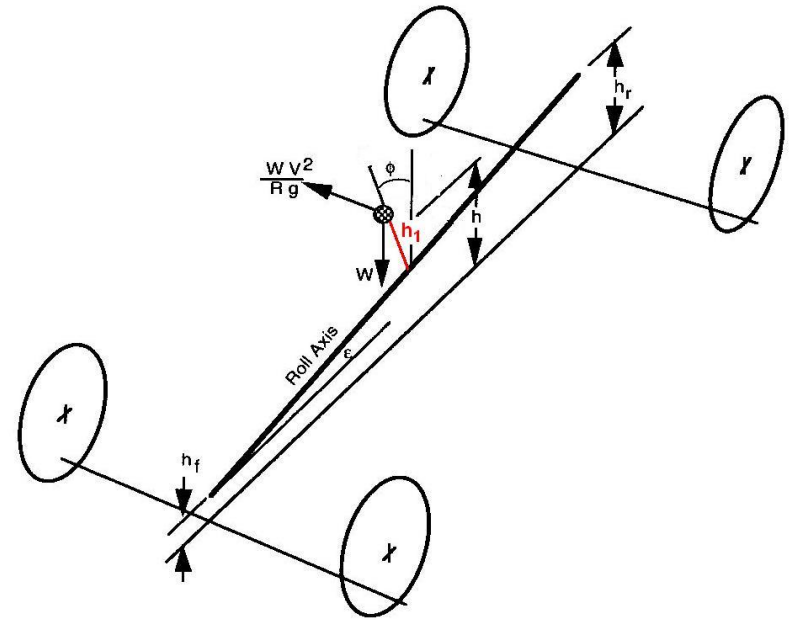
A taxa de rolagem é definida por $R_{\phi} = \frac{d\phi}{da_y}$.

Sendo $\phi = \frac{W \cdot h_1 \cdot \frac{V^2}{R \cdot g}}{K_{\phi f} + K_{\phi r} - W \cdot h_1}$, tem-se:

$$R_{\phi} = \frac{W \cdot h_1}{K_{\phi f} + K_{\phi r} - W \cdot h_1} \quad (\text{graus/g})$$

Para veículos urbanos, R_{ϕ} varia de 3 a 7 $\frac{\text{graus}}{\text{g}}$.

Distribuição do momento de rolagem



$$M_{\phi f} = K_{\phi f} \frac{W \cdot h_1 \cdot \frac{V^2}{R \cdot g}}{K_{\phi f} + K_{\phi r} - W \cdot h_1} + W_f \cdot h_f \cdot \frac{V^2}{R \cdot g} = \Delta F_{z_f} \cdot t_f$$

$$M_{\phi r} = K_{\phi r} \frac{W \cdot h_1 \cdot \frac{V^2}{R \cdot g}}{K_{\phi f} + K_{\phi r} - W \cdot h_1} + W_r \cdot h_r \cdot \frac{V^2}{R \cdot g} = \Delta F_{z_r} \cdot t_r$$

Inclusão da rigidez lateral

$$F_y = C_\alpha \cdot \alpha$$

$$F'_y = C'_\alpha \cdot \alpha = (a \cdot F_z + b \cdot F_z^2) \cdot \alpha$$

Para um mesmo eixo :

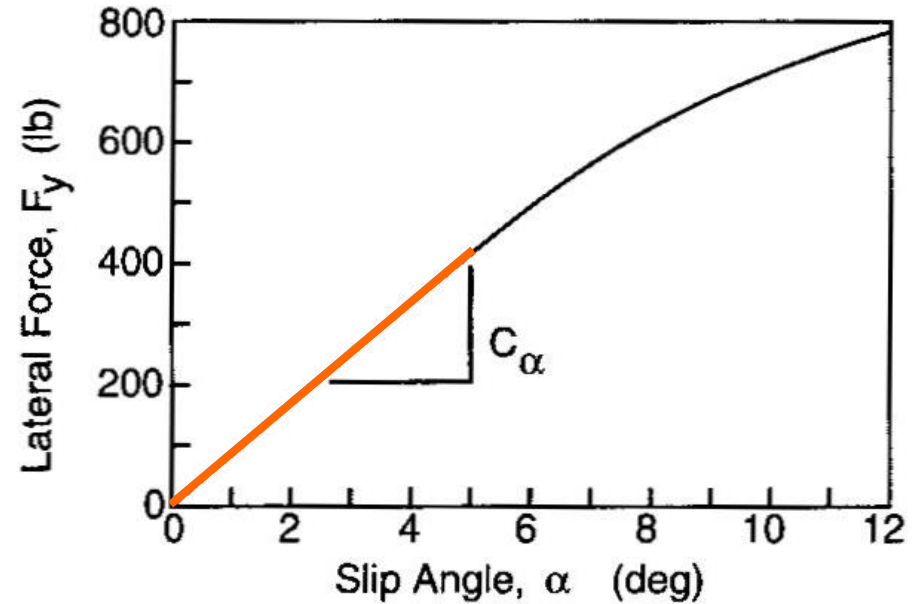
$$F_y = (a \cdot F_{z_o} + b \cdot F_{z_o}^2 + a \cdot F_{z_i} + b \cdot F_{z_i}^2) \cdot \alpha$$

Mas

$$F_{z_o} = F_z + \Delta F_z \quad F_{z_i} = F_z - \Delta F_z$$

resultando

$$F_y = [C_\alpha - 2 \cdot b \cdot \Delta F_z^2] \cdot \alpha = W \cdot \frac{V^2}{R \cdot g}$$



Inclusão da rigidez lateral

Particularizando para cada eixo

$$F_{yf} = \left[C_{\alpha f} - 2.b.\Delta F_{zf}^2 \right] \alpha_f = W_f \cdot \frac{V^2}{R.g}$$

$$F_{yr} = \left[C_{\alpha r} - 2.b.\Delta F_{zr}^2 \right] \alpha_r = W_r \cdot \frac{V^2}{R.g}$$

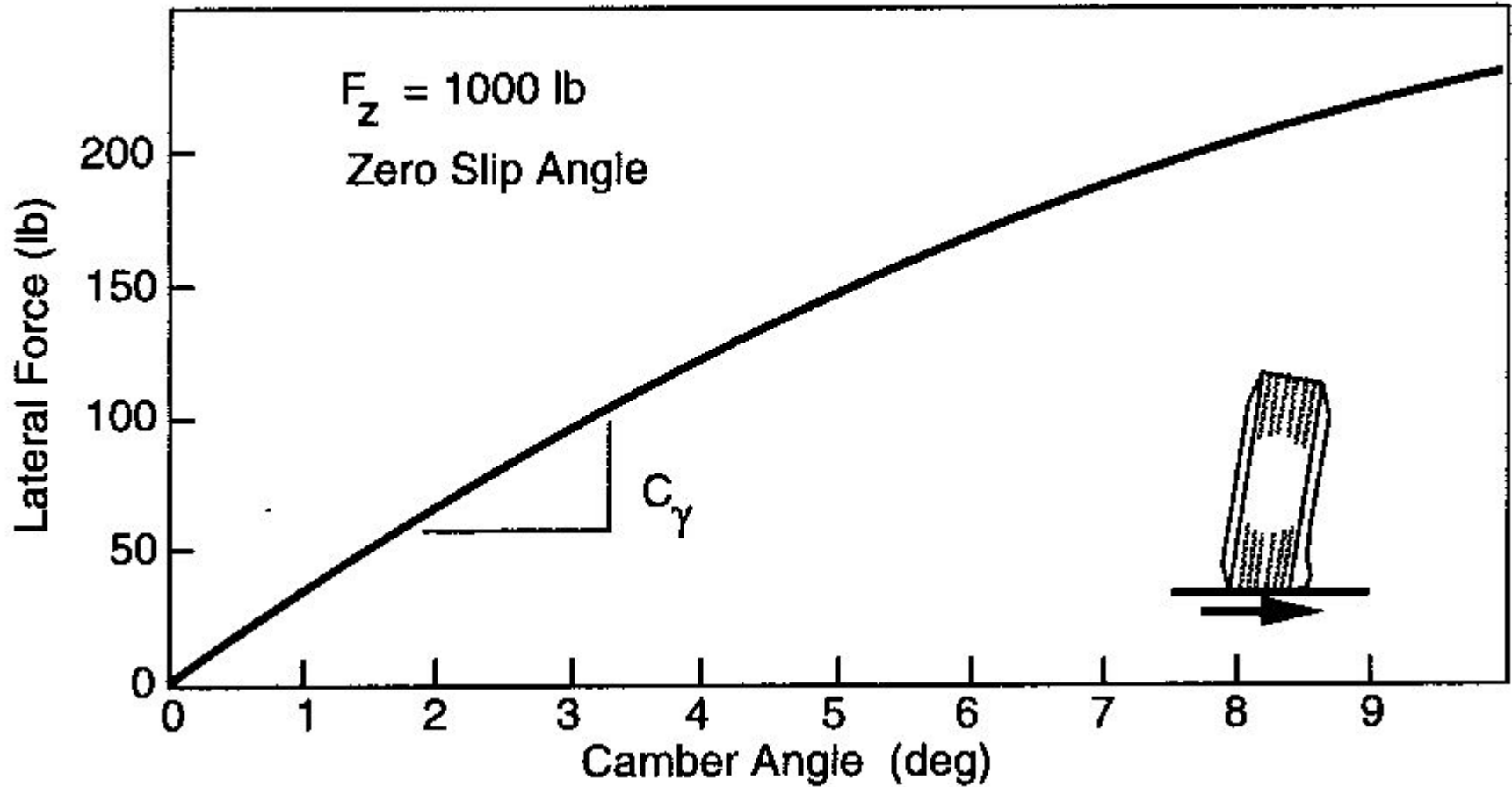
Lembrando que

$$\delta = \frac{180}{\pi} \cdot \frac{L}{R} + \alpha_f - \alpha_r$$

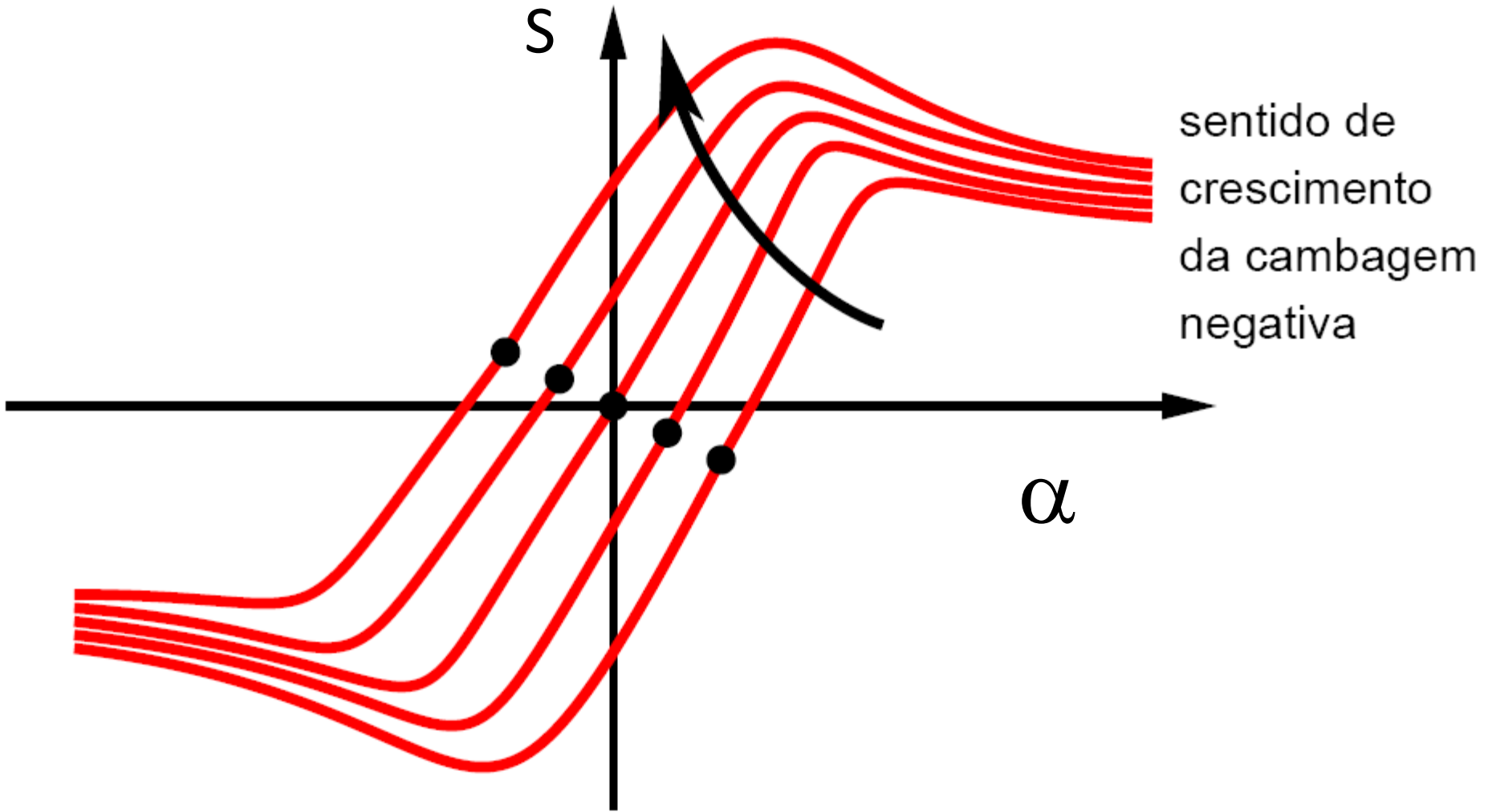
tem - se

$$\delta = \frac{180}{\pi} \cdot \frac{L}{R} + \left[\left(\frac{W_f}{C_{\alpha f}} - \frac{W_r}{C_{\alpha r}} \right) + \left(\frac{W_f}{C_{\alpha f}} \cdot \frac{2.b.\Delta F_{zf}^2}{C_{\alpha f}} - \frac{W_r}{C_{\alpha r}} \cdot \frac{2.b.\Delta F_{zr}^2}{C_{\alpha r}} \right) \right] \cdot \frac{V^2}{R.g}$$

Força de cambagem (*Camber trust*)

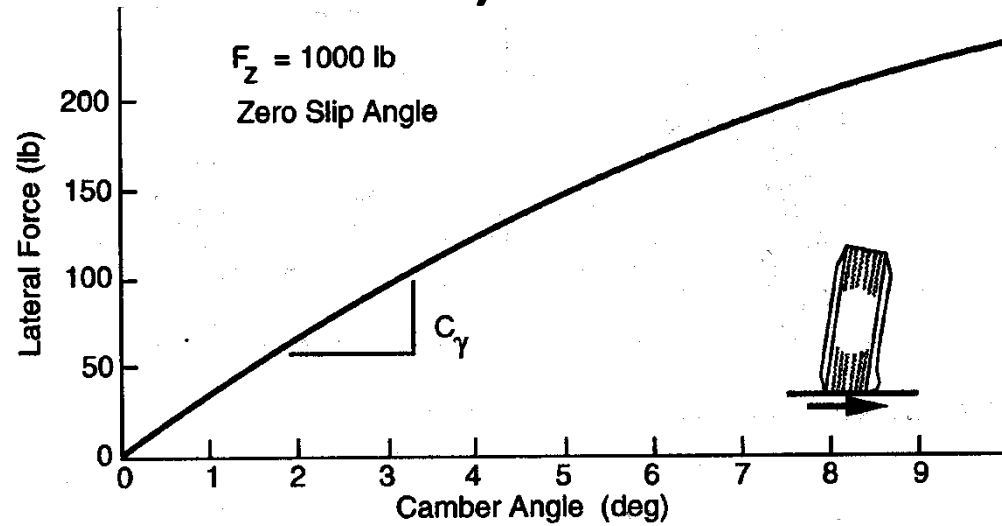


Influência da cambagem



Força de cambagem (*Camber trust*)

- Cambagem: inclinação da roda para fora.

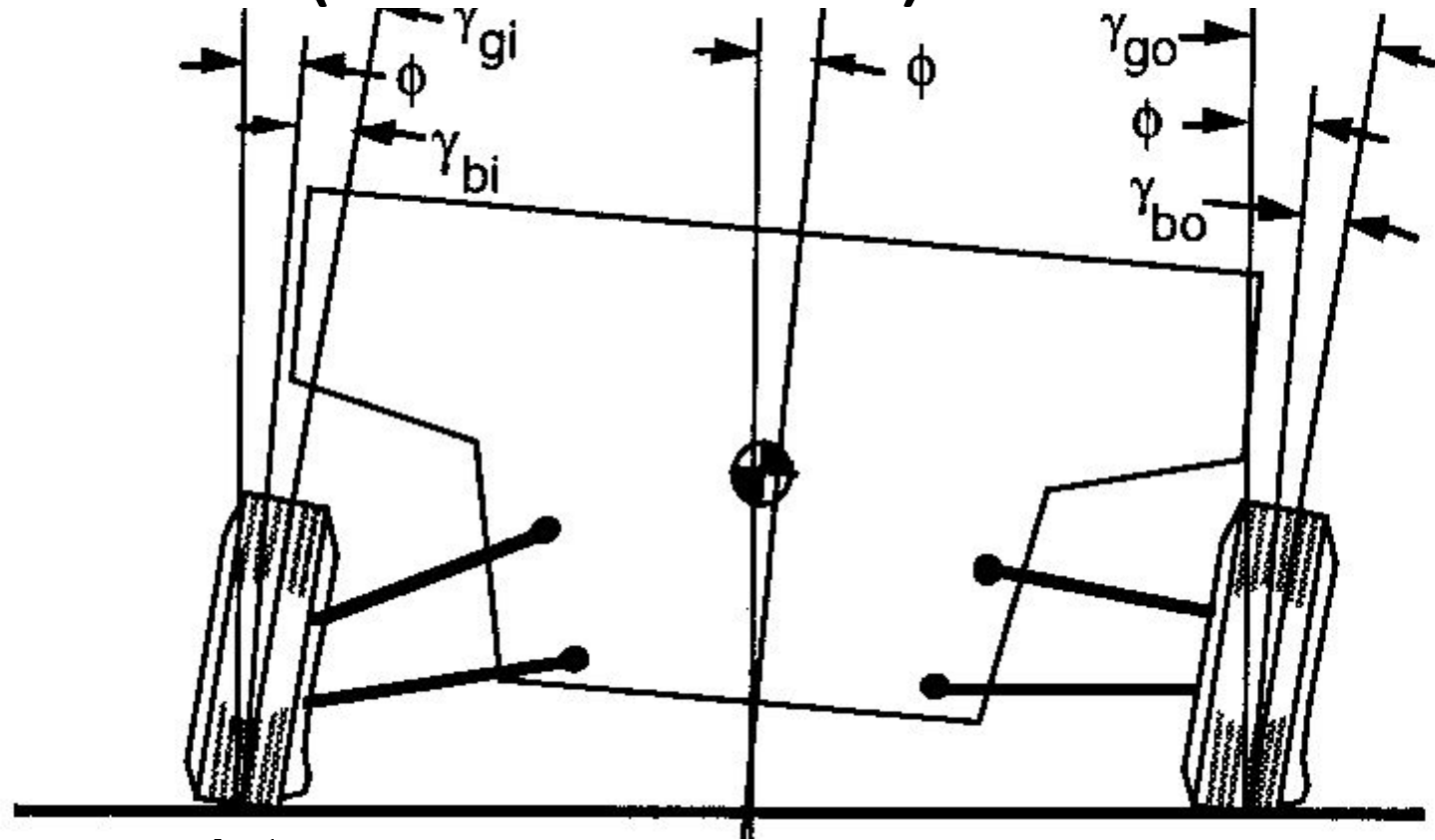


Picture From: <http://www.caterpillar.com>



Picture From: <http://www.motorcyclesafety.state.mn.us>

Força de cambagem (*Camber thrust*)



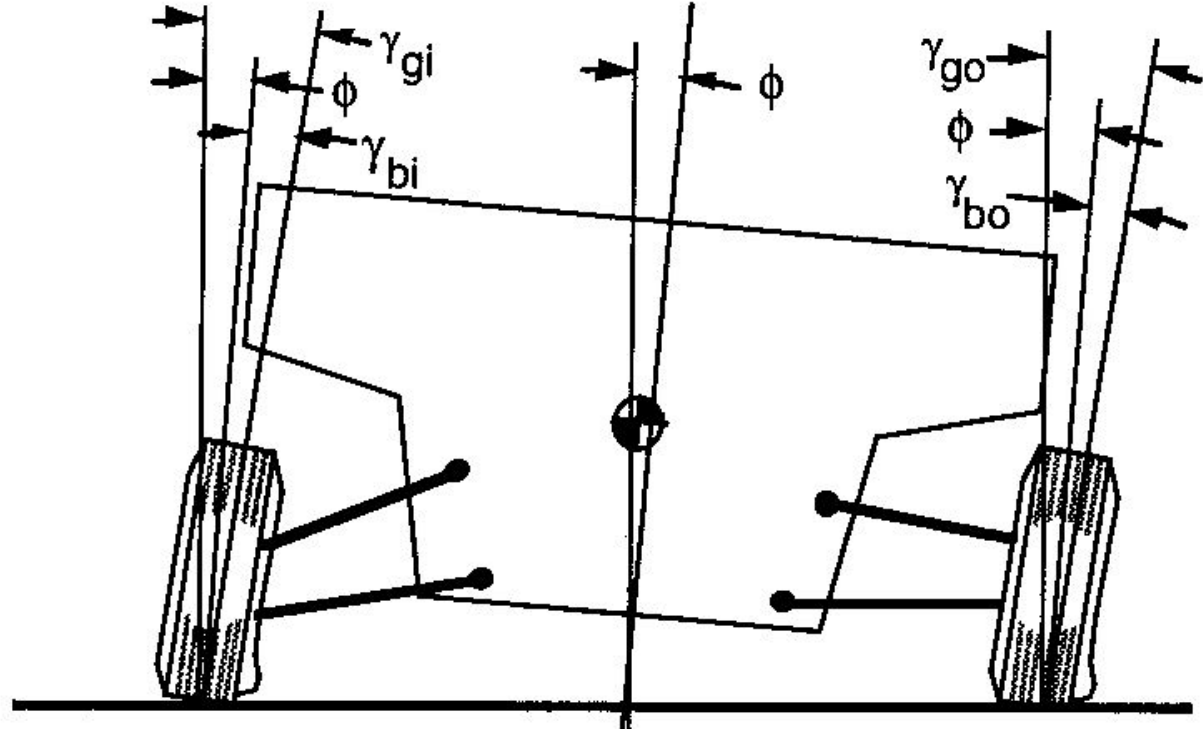
$$\gamma_g = \gamma_b + \phi$$

γ_g = cambagem relativa ao piso

γ_b = cambagem relativa à carroceria

ϕ = ângulo de rolagem da carroceria

Força de cambagem (*Camber trust*)

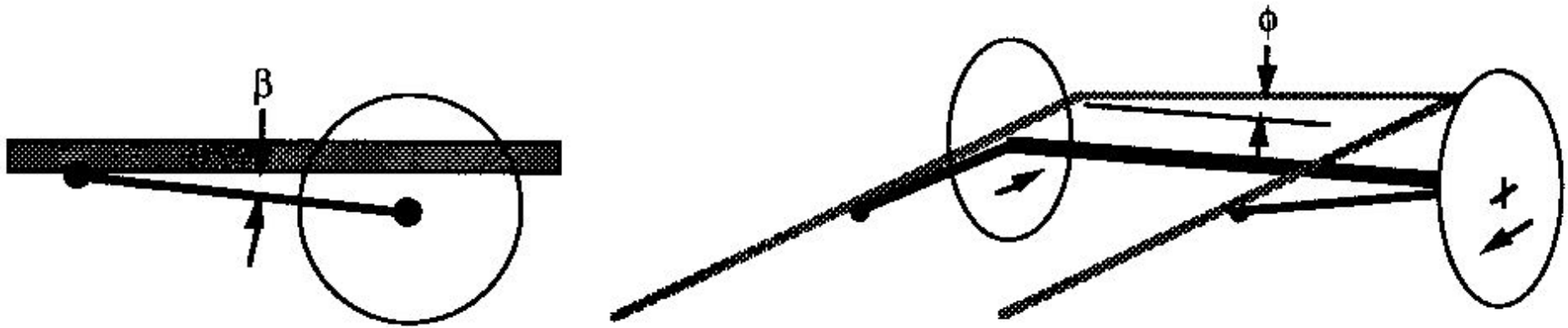


$$F_y = C_\alpha \cdot \alpha + C_\gamma \cdot \gamma$$

$$\alpha = \frac{F_y}{C_\alpha} - \frac{C_\gamma}{C_\alpha} \cdot \gamma$$

$$\delta = \frac{180}{\pi} \cdot \frac{L}{R} + \left[\left(\frac{W_f}{C_{\alpha f}} - \frac{W_r}{C_{\alpha r}} \right) + \left(\frac{C_{\gamma f}}{C_{\alpha f}} \cdot \frac{\partial \gamma_f}{\partial \phi} - \frac{C_{\gamma r}}{C_{\alpha r}} \cdot \frac{\partial \gamma_r}{\partial \phi} \right) \cdot \frac{\partial \phi}{\partial a_y} \right] \cdot \frac{V^2}{R \cdot g}$$

Esterçamento de rolagem (*roll steer*)

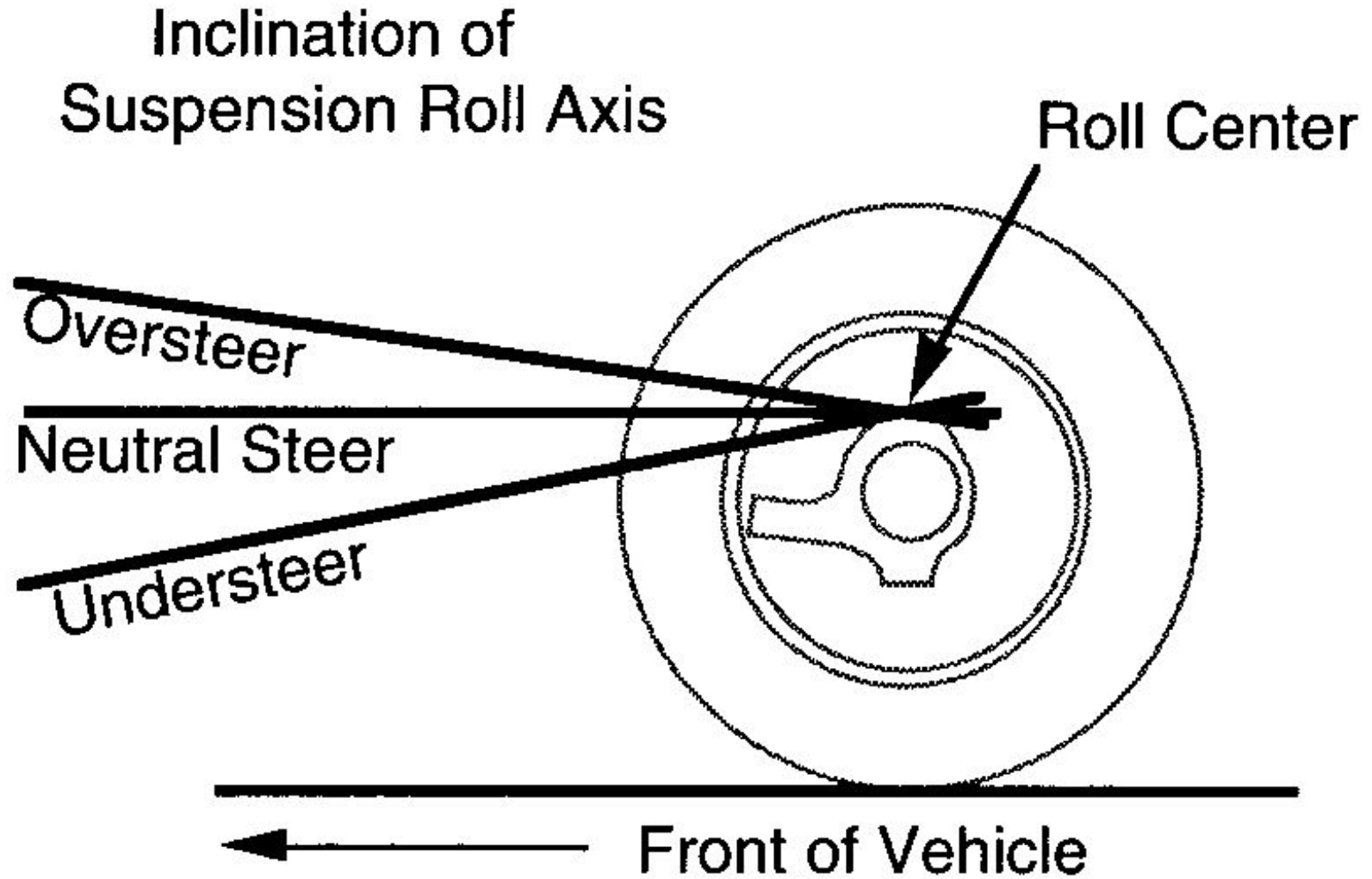


$$K_{roll\ steer} = (\varepsilon_f - \varepsilon_r) \frac{\partial \phi}{\partial a_y}$$

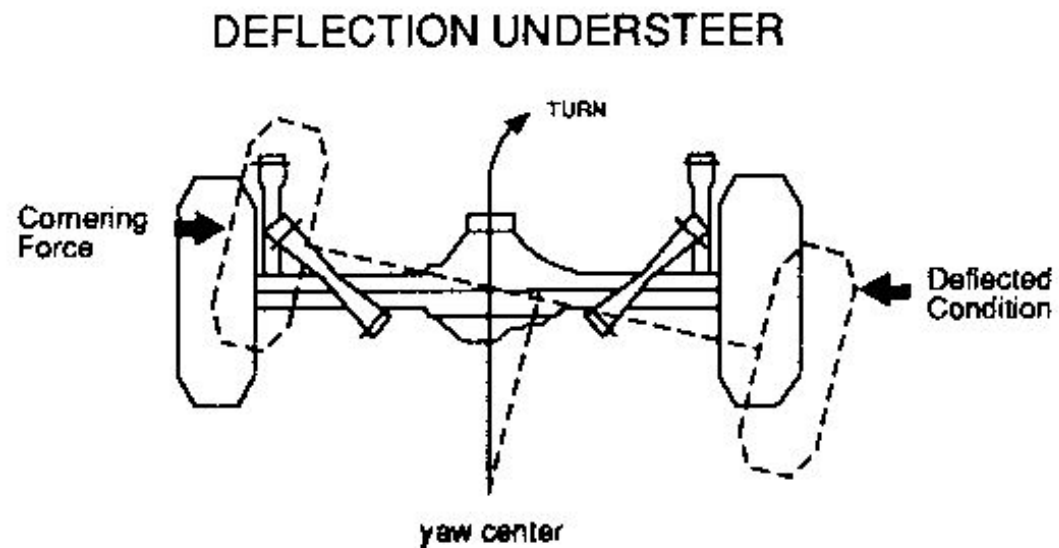
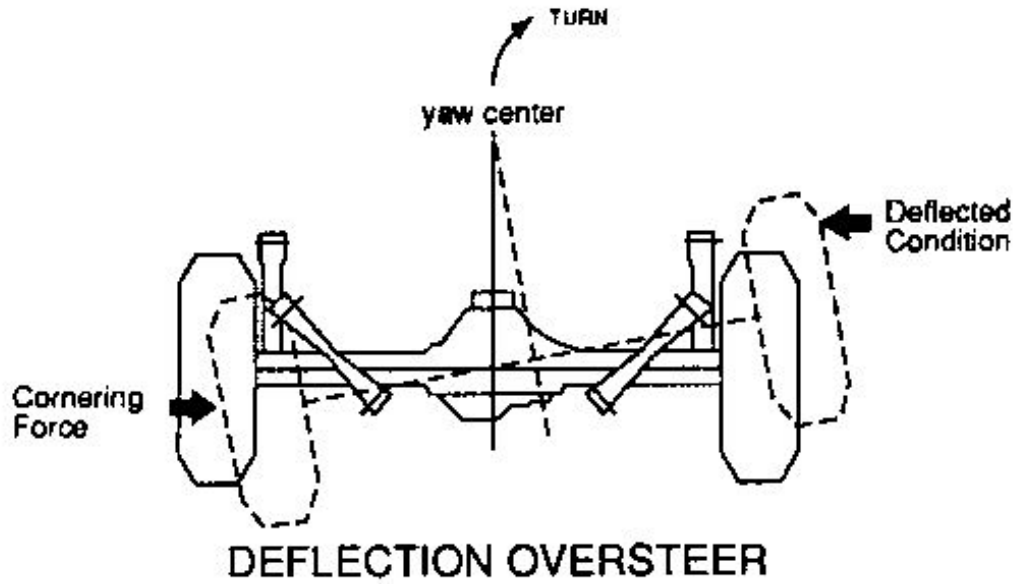
ε_f e ε_r - coeficientes de esterçamento na rolagem
(graus de esterçamento/grau de rolagem)

Em suspensões de braço arrastado, $\varepsilon = \beta$.

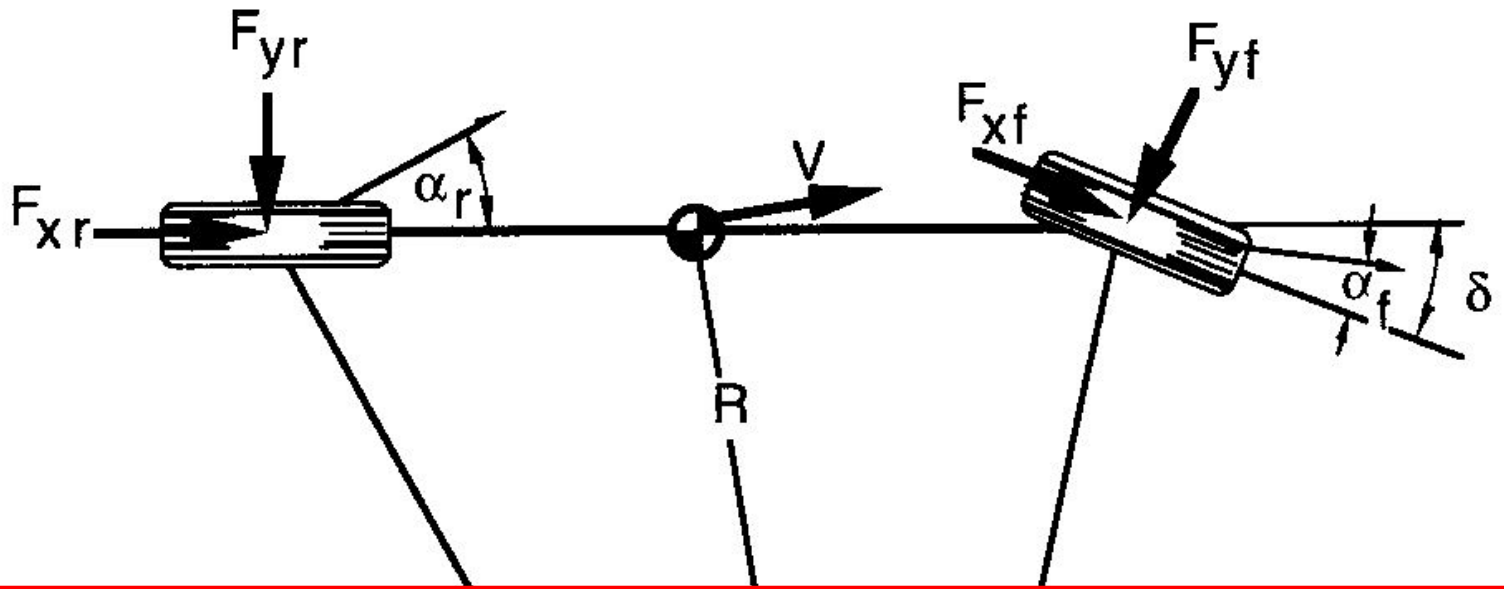
Esterçamento de rolagem (*roll steer*)



Esterçamento de rolagem (*roll steer*)



Influência das forças trativas



$$\delta = \frac{180}{\pi} \cdot \frac{L}{R} + \left[\left(\frac{W_f}{C_{of}} - \frac{W_r}{C_{or}} \right) - \left(\frac{W_f}{C_{of}} \cdot \frac{F_{xf}}{C_{of}} - \frac{W_r}{C_{or}} \cdot \frac{F_{xr}}{C_{or}} \right) \right] \cdot \frac{V^2}{R \cdot g}$$

Exemplo 1

1) A car has a weight of 1901 lb front axle and 1552 lb on the rear with a wheelbase of 100.6 inches. The tires have the following cornering stiffness values:

<u>Load</u>	<u>Cornering Stiffness</u>	<u>Cornering Coefficient</u>
225 lb	67 lb/deg	0.298 lb/lb/deg
450	121	0.269
675	171	0.253
900	225	0.250
1125	257	0.228
1350	300	0.222

Exemplo 1

Determine the following cornering properties for the vehicle:

- a) Ackerman steer angles for 500, 200, 100 and 50 ft turn radius
- b) Understeer gradient
- c) Characteristic speed
- d) Lateral acceleration gain at 60 mph
- e) Yaw velocity gain at 60 mph
- f) Sideslip angle at the CG on an 800 ft radius turn at 60 mph
- g) Static margin

Exemplo 2

2) A passenger car has an equal arm (parallel) independent front suspension and a conventional solid rear axle with leaf spring suspension. The front suspension has a roll stiffness, $K_{\phi f}$, of 1500 in-lb/deg. The leaf springs have a rate of 115 lb/in and a lateral separation of 40 inches.

a) What is the rear suspension roll stiffness?

b) If the sprung mass is 2750 lb at a CG height 8 inches above the roll axis, what is the roll rate?

c) Assuming a camber stiffness that is 10 percent of the cornering stiffness, estimate the understeer gradient due to camber effects.

Respostas

Exemplo 1

a) $0,96^\circ; 2,4^\circ; 4,8^\circ; 9,6^\circ$

b) $0,11 \text{ grau/g}$

c) 268 mph

d) $0,475 \text{ g/grau}$

e) $9,95 \frac{\text{grau/s}}{\text{grau}}$

f) $-0,865^\circ$

g) $0,8 \%$

Exemplo 2

a) 1606 in.lbf/grau

b) $10,5 \text{ grau/g}$

c) $1,05 \text{ grau/g}$

Referência utilizada nesta aula

Gillespie, Thomas D.. FUNDAMENTALS OF VEHICLE DYNAMICS. Warrendale: SAE, 1992. Capítulo 6.