

0

**ANÁLISE DO COMPORTAMENTO DINÂMICO  
DE UM VEÍCULO AUTOMOTIVO**

51/89

Fiche Exemplar corresponde à versão final da Tese  
defendida por Nilson Barbieri e aprovada pela  
Comissão Julgadora em 21/11/89  
Douglas R. Zanpin

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS  
FACULDADE DE ENGENHARIA DE CAMPINAS  
DEPARTAMENTO DE MECÂNICA COMPUTACIONAL

ANÁLISE DO COMPORTAMENTO DINÂMICO  
DE UM VEÍCULO AUTOMOTIVO

NILSON BARBIERI

Tese apresentada à Faculdade de Engenharia  
de Campinas-UNICAMP, como parte dos requisitos  
exigidos para obtenção do título de  
MESTRE EM ENGENHARIA MECÂNICA

Campinas, 21 de Novembro de 1989

**UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS  
FACULDADE DE ENGENHARIA DE CAMPINAS  
DEPARTAMENTO DE MECÂNICA COMPUTACIONAL**

Tese de Mestrado

Análise do Comportamento Dinâmico  
de um Veículo Automotivo

Autor: Nilson Barbieri

Orientador: Prof. Dr. Douglas Eduardo Zampieri

Aprovado por



Prof. Dr. Douglas Eduardo Zampieri



Prof. Dr. Nazem Nascimento



Prof. Dr. Fernando Iguti

Campinas, 21 de Novembro de 1989

À  
Minha Família

# Agradecimentos

Ao amigo Prof. Dr. Douglas Eduardo Zampieri, pelo companheirismo e honestidade que sempre marcaram nossas conversas e também pelo fato de aceitar ser meu orientador de tese.

Ao amigo Prof. Dr. Fausto Rodrigues Filho, pela atenção e pelas orientações.

Aos amigos: Prof. Dr. Fernando Iguti, Prof. Msc. Janito Vaqueiro Ferreira, Prof. Msc. Milton Dias Júnior, Prof. Marco Lúcio Bittencourt, e Engenheiros Alberto Luiz Serpa e Humberto Manoel Dias de Oliveira, pelas contribuições.

A todo o pessoal do DMC e do GEPROM, e a todas as pessoas que direta ou indiretamente contribuíram para a realização deste trabalho.

# Resumo

Analisa-se o comportamento dinâmico de um veículo de quatro rodas através de um modelo com sete graus de liberdade.

Primeiramente estuda-se o comportamento próprio do veículo para as duas condições de carga, descarregado e carregado, através da obtenção dos autovalores e autovetores para as duas situações.

Depois, estuda-se o comportamento do veículo contendo suspensão passiva convencional, trafegando por uma via reta e com perfis determinísticos das irregularidades da via modeladas por funções trigonométricas, no caso, perfis senoidais. Adota-se como critério de análise o deslocamento e a aceleração do centro de gravidade do veículo para diferentes velocidades do mesmo.

Um sistema de suspensão com molas a gás é, então modelado e ajustado ao veículo. A resposta a uma excitação transiente é analisada para três tipos de suspensão: passivo, com molas a gás e semi-ativo com molas a gás.

# Abstract

The theoretical dynamical behaviour of a four wheel car model is analysed.

The physical model with seven degrees of freedom is chosen and after some simplifications the corresponding mathematical model is established.

First it is studied the dynamical eigenbehaviour of the model for both unloaded and loaded conditions through the obtention of the eigenvalues and eigenvectors in different situations: changing the spring stiffness coefficients and the damping coefficient of the dampers (suspensions).

Subsequently it is analysed the behaviour of the vehicle with conventional passive suspension moving on a straight road. This road has a deterministic profile of irregularities. This profile is modeled with trigonometric functions, in this case, sinusoid profile. The analysis criteria adopted are: displacement and the acceleration of the gravity center for different speeds of the vehicle.

A gas spring suspension system is modeled and fitted to the vehicle. In this way, it is analysed the behaviour of the vehicle when crossing a ramp with three different suspension types: conventional passive, passive and semi-active with gas spring, in both unloaded and loaded conditions.

# Conteúdo

<b>1</b>	<b>Introdução</b>	<b>7</b>
<b>2</b>	<b>Modelamento matemático para um veículo contendo elementos passivos de suspensão</b>	<b>9</b>
2.1	Descrição do sistema passivo de suspensões e sistemas de referências	9
2.2	Equacionamento do movimento	15
2.2.1	Translações do corpo principal e dos conjuntos das rodas	15
2.2.2	Rotações do corpo principal e do conjunto traseiro	18
2.3	Tipos de excitações do veículo	20
2.3.1	Configuração senoidal para as irregularidades das vias	20
2.3.2	Configuração do tipo rampa para as irregularidades das vias	22
2.4	Metodologia de Resolução do Sistema	24
<b>3</b>	<b>Comportamento próprio do sistema</b>	<b>30</b>
3.1	Resolução	30
3.2	Resultados e discussões	30
3.2.1	Variações dos autovalores e autovetores devido variações das constantes de rigidez das molas	31
3.2.2	Variação dos autovalores e autovetores devido variações das constantes de amortecimento dos amortecedores	40
<b>4</b>	<b>Comportamento excitado do veículo com elementos passivos de suspensão</b>	<b>49</b>
4.1	Resolução	49
4.2	Resultados e Discussões	49
<b>5</b>	<b>Modelamento do sistema semi-ativo de suspensões a gás</b>	<b>63</b>
5.1	Suspensão a gás semi-ativa - Descrição	63
5.2	Modelamento de um veículo com suspensões passivas a gás	65
5.3	Análise de uma suspensão a gás semi-ativa	67
<b>6</b>	<b>Análise do comportamento do veículo com sistema de suspensões a gás e comparações com o sistema passivo convencional</b>	<b>70</b>
6.1	Resolução	70
6.2	Resultados e discussões	70
6.2.1	Sistemas passivos convencionais e com molas a gás	70
6.2.2	Sistemas de molas a gás passivo e com controle	77



<b>7</b>	<b>Conclusões e Propostas</b>	<b>82</b>
7.1	Conclusões . . . . .	82
7.2	Propostas . . . . .	83
	<b>Bibliografia</b>	<b>84</b>
<b>A</b>	<b>Derivação da característica de uma mola a gás</b>	<b>86</b>
<b>B</b>	<b>Dados</b>	<b>89</b>
<b>C</b>	<b>Solução de equações diferenciais</b>	<b>91</b>
<b>D</b>	<b>Método QR</b>	<b>92</b>
D.1	Matriz de Hessemberg . . . . .	92

# Lista de Figuras

2.1	Modelo físico de um veículo de quatro rodas com parâmetros lineares de suspensão (sistema passivo) . . . . .	10
2.2	Sistema móvel e inercial de referências do corpo principal mostrando a translação e rotações do mesmo. . . . .	12
2.3	Posição final do corpo principal do veículo, incluindo os vetores posição em relação ao sistema móvel de referência. . . . .	13
2.4	Deslocamento do corpo principal do veículo devido a translação $Z$ e rotações $\Psi$ e $\Phi$ . . . . .	14
2.5	Perfil senoidal para modelamento das irregularidades das vias . . . . .	21
2.6	Perfil tipo rampa para modelamento das irregularidades das vias . . . . .	23
3.1	Variações dos autovalores devido variações da rigidez das molas das suspensões. (Veículo descarregado) . . . . .	33
3.2	Variações dos autovalores devido variações da rigidez das molas das suspensões. (Veículo carregado) . . . . .	34
3.3	Variações dos autovalores devido variações das constantes de amortecimento dos amortecedores. (Veículo descarregado) . . . . .	42
3.4	Variações dos autovalores devido variações das constantes de amortecimento dos amortecedores. (Veículo carregado) . . . . .	43
4.1	Variações das forças devido às irregularidades da via . . . . .	52
4.2	Variações das forças devido às irregularidades da via . . . . .	53
4.3	Variações dos deslocamentos do corpo principal do veículo para diferentes velocidades. (Veículo descarregado) . . . . .	54
4.4	Variações dos deslocamentos do corpo principal do veículo para diferentes velocidades. (Veículo carregado) . . . . .	55
4.5	Variações das acelerações do corpo principal do veículo para diferentes velocidades. (Veículo descarregado) . . . . .	56
4.6	Variações das acelerações do corpo principal do veículo para diferentes velocidades. (Veículo carregado) . . . . .	57
4.7	Variações das forças devido às irregularidades da via . . . . .	58
4.8	Variações dos deslocamentos do corpo principal do veículo para diferentes velocidades. (Veículo descarregado) . . . . .	59
4.9	Variações dos deslocamentos do corpo principal do veículo para diferentes velocidades. (Veículo carregado) . . . . .	60
4.10	Variações das acelerações do corpo principal do veículo para diferentes velocidades. (Veículo descarregado) . . . . .	61

4.11	Variações das acelerações do corpo principal do veículo para diferentes velocidades. (Veículo carregado) . . . . .	62
5.1	Diagrama esquemático de um veículo contendo apenas uma roda com uma semi-ativa suspensão a gás. . . . .	64
6.1	Variações das forças devido as irregularidades da via para um veículo trafegando por uma via com perfil do tipo rampa . . . . .	72
6.2	Variações dos deslocamentos do centro de gravidade do veículo passando por uma rampa para dois tipos de sistemas de suspensões. (Veículo descarregado) . . . . .	73
6.3	Variações dos deslocamentos do centro de gravidade do veículo passando por uma rampa para dois tipos de sistemas de suspensões. (Veículo carregado) . . . . .	74
6.4	Variações das acelerações do centro de gravidade do veículo passando por uma rampa para dois tipos de sistemas de suspensões. (Veículo descarregado) . . . . .	75
6.5	Variações das acelerações do centro de gravidade do veículo passando por uma rampa para dois tipos de sistemas de suspensões. (Veículo carregado) . . . . .	76
6.6	Variações dos deslocamentos do centro de gravidade do veículo passando por uma rampa para dois sistemas de suspensões com molas a gás. (Veículo descarregado) . . . . .	78
6.7	Variações dos deslocamentos do centro de gravidade do veículo passando por uma rampa para dois sistemas de suspensões com molas a gás. (Veículo carregado) . . . . .	79
6.8	Variações das acelerações do centro de gravidade do veículo passando por uma rampa para dois sistemas de suspensões com molas a gás. (Veículo descarregado) . . . . .	80
6.9	Variações das acelerações do centro de gravidade do veículo passando por uma rampa para dois sistemas de suspensões com molas a gás. (Veículo carregado) . . . . .	81

# Lista de Tabelas

3.1	Varição do primeiro modo de vibrar devido variações da rigidez das molas. (Veículo descarregado) . . . . .	35
3.2	Varição do segundo modo de vibrar devido variações da rigidez das molas. (Veículo descarregado) . . . . .	35
3.3	Varição do terceiro modo de vibrar devido variações da rigidez das molas. (Veículo descarregado) . . . . .	35
3.4	Varição do quarto modo de vibrar devido variações da rigidez das molas. (Veículo descarregado) . . . . .	36
3.5	Varição do quinto modo de vibrar devido variações da rigidez das molas. (Veículo descarregado) . . . . .	36
3.6	Varição do sexto modo de vibrar devido variações da rigidez das molas. (Veículo descarregado) . . . . .	36
3.7	Varição do sétimo modo de vibrar devido variações da rigidez das molas. (Veículo descarregado) . . . . .	37
3.8	Varição do primeiro modo de vibrar devido variações da rigidez das molas. (Veículo carregado) . . . . .	37
3.9	Varição do segundo modo de vibrar devido variações da rigidez das molas. (Veículo carregado) . . . . .	37
3.10	Varição do terceiro modo de vibrar devido variações da rigidez das molas. (Veículo carregado) . . . . .	38
3.11	Varição do quarto modo de vibrar devido variações da rigidez das molas. (Veículo carregado) . . . . .	38
3.12	Varição do quinto modo de vibrar devido variações da rigidez das molas. (Veículo carregado) . . . . .	38
3.13	Varição do sexto modo de vibrar devido variações da rigidez das molas. (Veículo carregado) . . . . .	39
3.14	Varição do sétimo modo de vibrar devido variações da rigidez das molas. (Veículo carregado) . . . . .	39
3.15	Varição do primeiro modo de vibrar devido variações da constante de amortecimento dos amortecedores. (Veículo descarregado) . . . . .	44
3.16	Varição do segundo modo de vibrar devido variações da constante de amortecimento dos amortecedores. (Veículo descarregado) . . . . .	44
3.17	Varição do terceiro modo de vibrar devido variações da constante de amortecimento dos amortecedores. (Veículo descarregado) . . . . .	44
3.18	Varição do quarto modo de vibrar devido variações da constante de amortecimento dos amortecedores. (Veículo descarregado) . . . . .	45

3.19	Varição do quinto modo de vibrar devido variações da constante de amortecimento dos amortecedores. (Veículo descarregado) . . . . .	45
3.20	Varição do sexto modo de vibrar devido variações da constante de amortecimento dos amortecedores. (Veículo descarregado) . . . . .	45
3.21	Varição do sétimo modo de vibrar devido variações da constante de amortecimento dos amortecedores. (Veículo descarregado) . . . . .	46
3.22	Varição do primeiro modo de vibrar devido variações da constante de amortecimento dos amortecedores. (Veículo carregado) . . . . .	46
3.23	Varição do segundo modo de vibrar devido variações da constante de amortecimento dos amortecedores. (Veículo carregado) . . . . .	46
3.24	Varição do terceiro modo de vibrar devido variações da constante de amortecimento dos amortecedores. (Veículo carregado) . . . . .	47
3.25	Varição do quarto modo de vibrar devido variações da constante de amortecimento dos amortecedores. (Veículo carregado) . . . . .	47
3.26	Varição do quinto modo de vibrar devido variações da constante de amortecimento dos amortecedores. (Veículo carregado) . . . . .	47
3.27	Varição do sexto modo de vibrar devido variações da constante de amortecimento dos amortecedores. (Veículo carregado) . . . . .	48
3.28	Varição do sétimo modo de vibrar devido variações da constante de amortecimento dos amortecedores. (Veículo carregado) . . . . .	48
B.1	Parâmetros do veículo para as duas condições de carga. . . . .	89
B.2	Parâmetros das suspensões . . . . .	90

# Capítulo 1

## Introdução

Nas últimas décadas o projeto de suspensões automotivas, tanto passivas como as denominadas ativas, tem recebido por parte dos pesquisadores grande atenção, e um grande número de trabalhos a este respeito tem sido publicado, alguns modelos testados e construídos. [1] a [13]

O projeto de um determinado sistema de suspensão é um compromisso entre duas finalidades básicas. A primeira finalidade é que a suspensão deve isolar os ocupantes do veículo das irregularidades do solo, ou seja, minimizar os níveis de aceleração para que seus ocupantes possam ter uma viagem confortável, o que sugere o uso de suspensões macias (moles).

A outra finalidade é permitir uma boa manobrabilidade do veículo, ou seja, um adequado controle das mudanças de atitudes do mesmo, e, manter bom contato entre o pneu e a superfície do solo, o que sugere o uso de suspensões duras.

Na tentativa de conciliar estes dois aspectos da suspensão, conforto e segurança, é necessário conhecer o comportamento próprio e excitado do veículo para escolher um sistema que se adapte a estas necessidades básicas, bem como estabelecer tipos de controle e otimização do sistema. [5], [6], [8], [14], [15], [16]

Sharp e Crolla [1] publicaram recentemente um trabalho abordando os diversos aspectos do projeto de suspensões de veículos automotivos, analisando os trabalhos mais recentes relacionados a este assunto e discutindo sobretudo os aspectos citados anteriormente: conforto e segurança.

A atenção é concentrada em carros de passeio e a movimentos de baixa frequência, para os quais as flexibilidades estruturais do chassis e as vibrações da carcaça do pneu tem pouca influência. Salienta-se que nestes casos os movimentos vibratórios na direção vertical normalmente são dominantes.

Seleção de convenientes valores de rigidez e amortecimento dos parâmetros das suspensões são estabelecidos por três critérios de desempenho [4]:

- aceleração do corpo;
- espaço de trabalho da suspensão;
- cargas dinâmicas nos pneus.

Para simplificação das análises do comportamento do veículo, para as duas condições de carga, veículo carregado e descarregado, escolheu-se um modelo simples de pista (via), ou seja, uma pista reta contendo basicamente irregularidades modeladas através de perfis determinísticos, que

podem ser modelados por funções trigonométricas. Escolheu-se, então, como critérios de análises o deslocamento e a aceleração do centro de gravidade do veículo.

Cumprido ressaltar, que uma análise mais acurada, deve envolver configurações aleatórias de perfis de irregularidades, e combinações diferentes de tipos de vias, ou seja, retas, curvas, inclinadas, e demais tipos existentes na prática, o que justificaria uma análise das variações das cargas dinâmicas no veículo.

O modelo do veículo adotado é um caminhão de dois eixos, semelhante ao descrito por Horton and Crolla [3]. Analisa-se primeiramente o comportamento do veículo com um modelo passivo de suspensões, ou seja, com parâmetros lineares constantes de amortecimento e rigidez, em seguida analisa-se o comportamento do veículo com um sistema de suspensões com molas a gás, onde os parâmetros da suspensão são controlados por um sistema de controle com parâmetros passivos. Compara-se os comportamentos do veículo para ambos os sistemas de suspensões, e discute-se possíveis vantagens ou desvantagens dos sistemas.

O trabalho de uma forma geral pode ser resumido como:

- Capítulo 2: Modelamento matemático para um veículo contendo elementos passivos de suspensão  
Escolhe-se o modelo físico de um veículo de quatro rodas, a partir dele e com algumas hipóteses simplificadoras obtém-se o modelo matemático para o mesmo. Escolheu-se um modelo simplificado de sete graus de liberdade para o qual encontraram-se as equações do movimento.
- Capítulo 3: Comportamento próprio do sistema  
Estuda-se o comportamento próprio do veículo para duas situações distintas: variam-se as constantes de rigidez das molas das suspensões mantendo-se fixos os valores das constantes de amortecimento dos amortecedores; e variam-se as constantes de amortecimento dos amortecedores mantendo-se fixos os valores das constantes de rigidez das molas.
- Capítulo 4: Comportamento excitado do veículo com elementos passivos de suspensão  
Analisa-se o comportamento do veículo quando sujeito a forças devido irregularidades da via, para diferentes períodos de excitação e para diferentes velocidades do veículo.
- Capítulo 5: Modelamento do sistema de suspensão com molas a gás  
Desenvolvem-se as equações para determinar os parâmetros das suspensões, primeiramente para um sistema passivo de suspensões e a seguir para um sistema de suspensão com um controle semi-ativo.
- Capítulo 6: Comportamento excitado do veículo com sistemas de suspensões com molas a gás e comparações com sistema passivo convencional.  
Verifica-se o comportamento do veículo para o sistema passivo com molas a gás, para o sistema semi-ativo com molas a gás e compara-se estes dois sistemas com o sistema passivo convencional.
- Capítulo 7: Conclusões  
Analisam-se vantagens e desvantagens dos três tipos de sistemas de suspensões, limitações e propostas para futuros trabalhos.
- Bibliografia e Apêndice

## Capítulo 2

# Modelamento matemático para um veículo contendo elementos passivos de suspensão

### 2.1 Descrição do sistema passivo de suspensões e sistemas de referências

O modelo físico adotado é composto de um corpo principal suspenso de massa  $M$ , suportado por quatro conjuntos de suspensões (mola- amortecedor), sendo as duas dianteiras independentes e as duas traseiras dependentes e ligadas através de um eixo. Estas suspensões são conectadas às rodas. Os conjuntos das rodas dianteiras (1 e 3) são modeladas como sendo dois corpos rígidos de massas  $M_1$  e  $M_3$ ; e o conjunto das rodas traseiras (2 e 4) são modeladas como sendo um único corpo rígido de massa  $M_r$  como mostra a figura 2.1

As suspensões são compostas por molas com parâmetros lineares de rigidez  $K_{si}$  e por amortecedores viscosos em paralelo com parâmetros lineares de amortecimento  $C_{si}$ .

Os pneus são modelados como tendo parâmetros lineares de rigidez  $K_{ri}$  e amortecimento  $C_{ri}$ .

Conforme a figura 2.1 temos:

- $K_{si,i=1,4}$  : coeficientes de rigidez das suspensões
- $C_{si,i=1,4}$  : coeficientes de amortecimento das suspensões
- $K_{ri,i=1,4}$  : coeficientes de rigidez dos pneus
- $C_{ri,i=1,4}$  : coeficientes de amortecimento dos pneus
- $X_f, X_r$  : distâncias laterais das rodas dianteiras e traseiras ao centro de gravidade
- $d$  : distância frontal entre as rodas e o centro de gravidade
- $\Phi$  : rotação do corpo principal em torno do eixo X



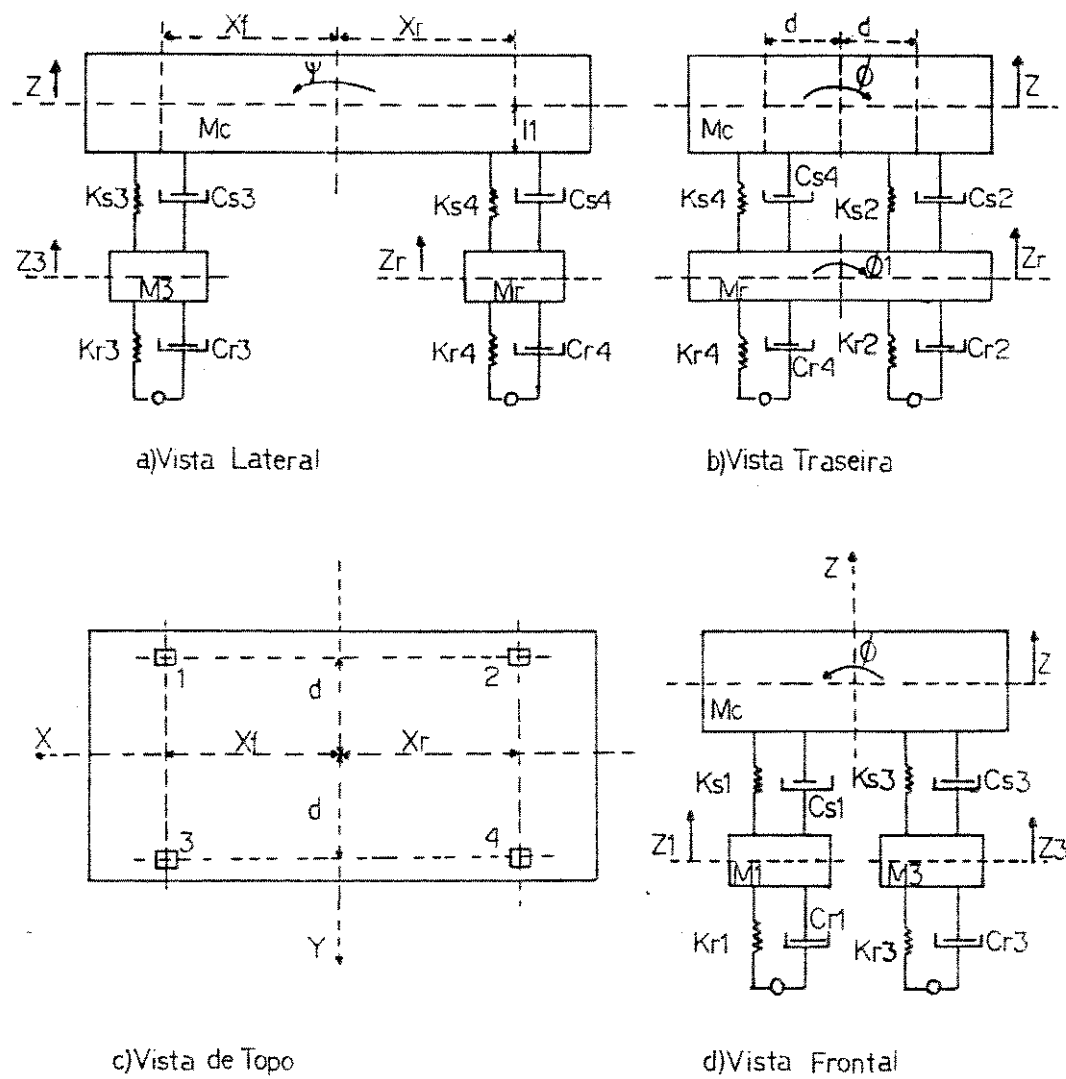


Figura 2.1: Modelo físico de um veículo de quatro rodas com parâmetros lineares de suspensão (sistema passivo)

- $\Phi_1$  : rotação do eixo traseiro em torno do eixo X
- $\Psi$  : rotação do corpo principal em torno do eixo Y

Para avaliar o comportamento do sistema, adota-se um sistema inercial de referência I, de coordenadas X,Y,Z com origem no centro de gravidade do corpo principal, supondo que o mesmo esteja em sua posição de equilíbrio.

Considerou-se um sistema com sete graus de liberdade como mostra a fig.2.1, e são:

- Corpo Principal: Translação vertical (Z), rotação ( $\Psi$ ) em torno do eixo Y e rotação ( $\Phi$ ) em torno do eixo X.
- Conjuntos Dianteiros: Translações verticais ( $Z_1$  e  $Z_3$ ).
- Conjunto Traseiro: Translação vertical ( $Z_r$ ) e rotação ( $\Phi_1$ ) em torno do eixo X.

Para a formulação do modelo matemático fazem-se as seguintes considerações:

- deslocamentos angulares pequenos (linearização).
- forças devido rigidez e amortecimento das suspensões e das rodas consideradas apenas na direção vertical (Z).

Necessita-se de um novo sistema de referência móvel S, de origem G (centro de gravidade) e coordenadas  $\chi, \eta, \xi$ , na direção dos eixos principais de inércia. Na posição de equilíbrio os dois sistemas são coincidentes (Fig. 2.2).

As relações entre os sistemas de coordenadas X,Y,Z e  $\chi, \eta, \xi$  podem ser expressas convenientemente com o auxílio da matriz de transformação de I para S.

Os sistemas inercial e móvel são mostrados na Fig.2.2 após o corpo principal ser submetido a uma translação vertical (Z) e duas rotações, ( $\Phi$ ) em torno do eixo X e ( $\Psi$ ) em torno do eixo Y. Pode-se visualizar as posições iniciais e finais dos dois sistemas.

Conforme [14], [17], [18] a matriz de transformação é a seguinte:

$${}^S[T]^I = \begin{bmatrix} \cos \Psi & \sin \Psi \sin \Phi & -\sin \Psi \cos \Phi \\ 0 & \cos \Phi & \sin \Phi \\ \sin \Psi & -\cos \Psi \cos \Phi & \cos \Psi \sin \Phi \end{bmatrix} \quad (2.1)$$

A velocidade angular devido às rotações :

$$\Omega = \dot{\Phi} + \dot{\Psi} \quad (2.2)$$

No sistema inercial:

$$\{^I\Omega\} = \begin{Bmatrix} \dot{\Phi} \\ \dot{\Psi} \cos \Phi \\ \dot{\Psi} \sin \Phi \end{Bmatrix} \quad (2.3)$$

No sistema móvel:

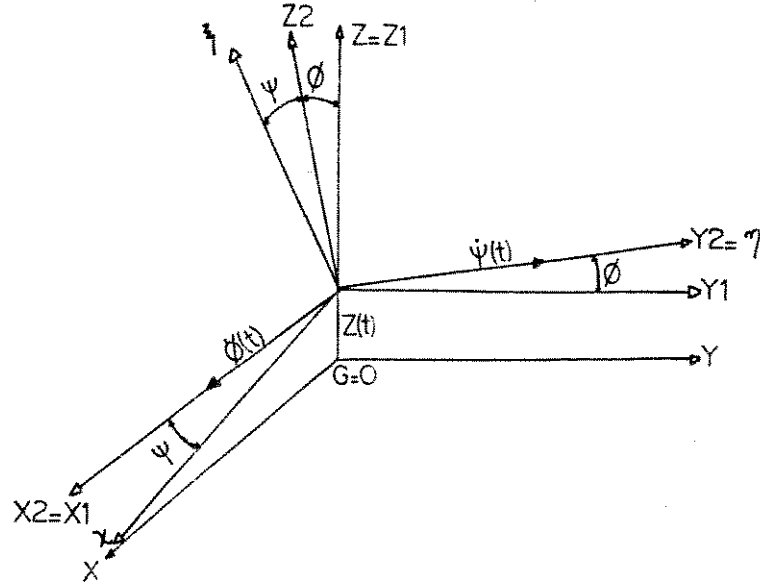


Figura 2.2: Sistema móvel e inercial de referências do corpo principal mostrando a translação e rotações do mesmo.

$$\{ {}^s \Omega \} = \begin{Bmatrix} \dot{\Phi} \cos \Psi \\ \dot{\Psi} \\ \dot{\Phi} \sin \Psi \end{Bmatrix} \quad (2.4)$$

Para se obter os deslocamentos é necessário visualizar-se o corpo principal em sua posição de equilíbrio inicial e a posição final após a translação  $Z$  e as rotações  $\Phi$  e  $\Psi$  (conforme mostrado nas figuras 2.3 e 2.4).

O deslocamento para cada mola é dado por:

$$\bar{1}\bar{1}_2 = \bar{G}\bar{1}_3 + \bar{O}\bar{G} - \bar{O}\bar{1} \quad (2.5)$$

$$\bar{2}\bar{2}_2 = \bar{G}\bar{2}_3 + \bar{O}\bar{G} - \bar{O}\bar{2} \quad (2.6)$$

$$\bar{3}\bar{3}_3 = \bar{G}\bar{3}_3 + \bar{O}\bar{G} - \bar{O}\bar{3} \quad (2.7)$$

$$\bar{4}\bar{4}_3 = \bar{G}\bar{4}_3 + \bar{O}\bar{G} - \bar{O}\bar{4} \quad (2.8)$$

Para a equação 2.5 ,tem-se:

$$\begin{Bmatrix} \bar{1}\bar{1}_{3\lambda} \\ \bar{1}\bar{1}_{3\eta} \\ \bar{1}\bar{1}_{3\xi} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} X_f \\ -d \\ -l_1 \end{Bmatrix} + {}^s [T]^I \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ Z \end{Bmatrix} - {}^s [T]^I \begin{Bmatrix} X_f \\ -d \\ -l_1 \end{Bmatrix} \quad (2.9)$$

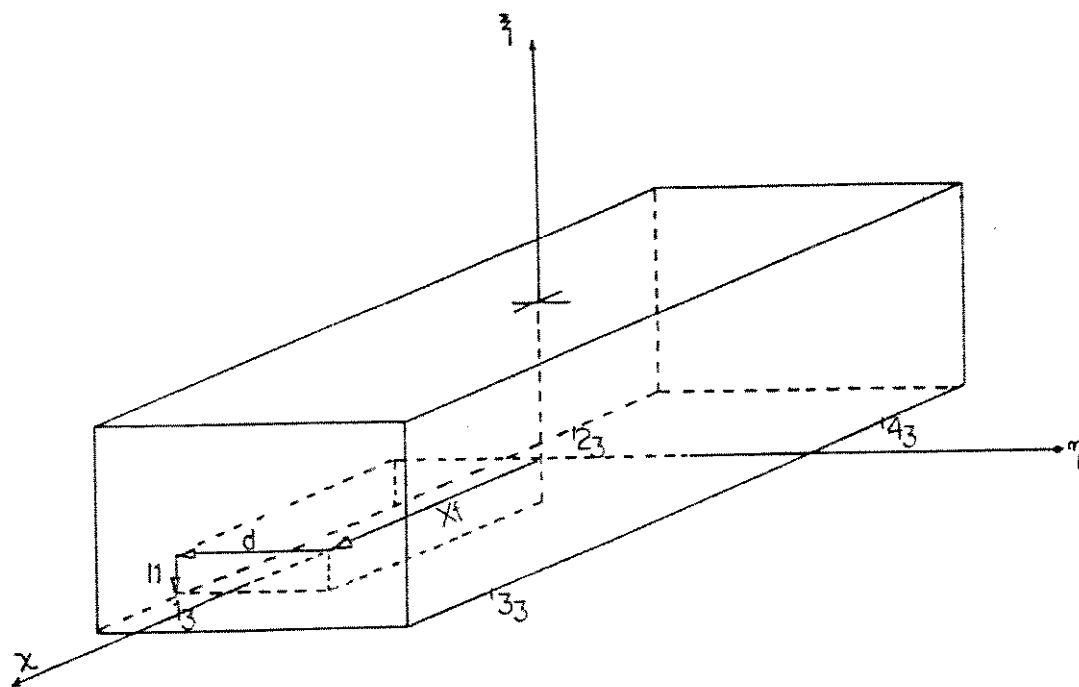


Figura 2.3: Posição final do corpo principal do veículo, incluindo os vetores posição em relação ao sistema móvel de referência.

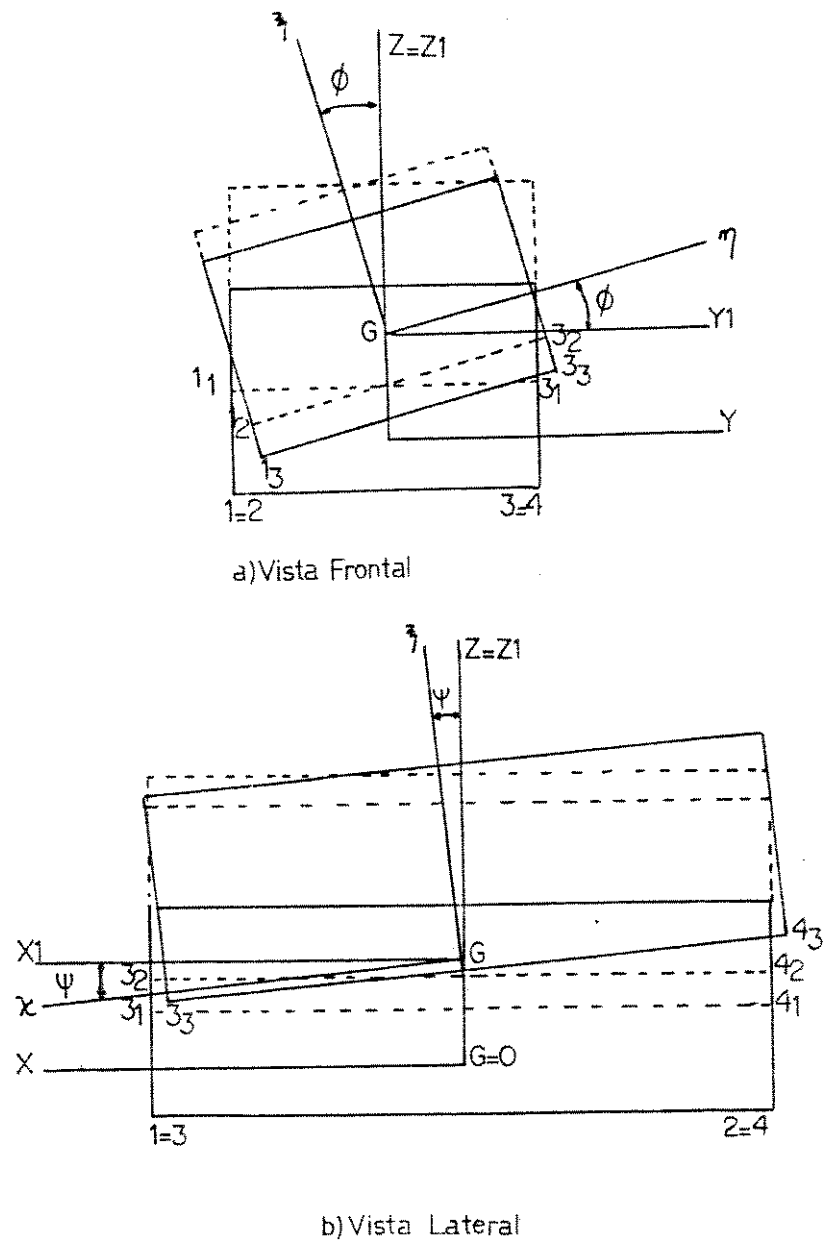


Figura 2.4: Deslocamento do corpo principal do veículo devido a translação  $Z$  e rotações  $\Psi$  e  $\Phi$

Resolvendo esta equação e fazendo as linearizações, temos:

$$\begin{Bmatrix} \bar{11}_{3\lambda} \\ \bar{11}_{3\eta} \\ \bar{11}_{3\xi} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -Z\Psi - l_1\Psi \\ Z\Phi - l_1\Phi \\ -X_f\Psi - d\Phi + Z \end{Bmatrix} \quad (2.10)$$

e derivando esta equação em relação ao tempo, temos:

$$\begin{Bmatrix} \dot{\bar{11}}_{3\lambda} \\ \dot{\bar{11}}_{3\eta} \\ \dot{\bar{11}}_{3\xi} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -\dot{Z}\Psi - Z\dot{\Psi} - l_1\dot{\Psi} \\ \dot{Z}\Phi + Z\dot{\Phi} + l_1\dot{\Phi} \\ -X_f\dot{\Psi} - d\dot{\Phi} + \dot{Z} \end{Bmatrix} \quad (2.11)$$

Os demais deslocamentos e velocidades são deduzidas da mesma forma.

$$\begin{Bmatrix} \bar{22}_{3\lambda} \\ \bar{22}_{3\eta} \\ \bar{22}_{3\xi} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -Z\Psi - l_1\Psi \\ Z\Phi + l_1\Phi \\ X_r\Psi - d\Phi + Z \end{Bmatrix} \quad (2.12)$$

$$\begin{Bmatrix} \dot{\bar{22}}_{3\lambda} \\ \dot{\bar{22}}_{3\eta} \\ \dot{\bar{22}}_{3\xi} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -\dot{Z}\Psi - Z\dot{\Psi} - l_1\dot{\Psi} \\ \dot{Z}\Phi + Z\dot{\Phi} + l_1\dot{\Phi} \\ X_r\dot{\Psi} - d\dot{\Phi} + \dot{Z} \end{Bmatrix} \quad (2.13)$$

$$\begin{Bmatrix} \bar{33}_{3\lambda} \\ \bar{33}_{3\eta} \\ \bar{33}_{3\xi} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -Z\Psi - l_1\Psi \\ Z\Phi + l_1\Phi \\ -X_f\Psi + d\Phi + Z \end{Bmatrix} \quad (2.14)$$

$$\begin{Bmatrix} \dot{\bar{33}}_{3\lambda} \\ \dot{\bar{33}}_{3\eta} \\ \dot{\bar{33}}_{3\xi} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -\dot{Z}\Psi - Z\dot{\Psi} - l_1\dot{\Psi} \\ \dot{Z}\Phi + Z\dot{\Phi} + l_1\dot{\Phi} \\ -X_f\dot{\Psi} + d\dot{\Phi} + \dot{Z} \end{Bmatrix} \quad (2.15)$$

$$\begin{Bmatrix} \bar{44}_{3\lambda} \\ \bar{44}_{3\eta} \\ \bar{44}_{3\xi} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -Z\Psi - l_1\Psi \\ Z\Phi + l_1\Phi \\ X_r\Psi + d\Phi + Z \end{Bmatrix} \quad (2.16)$$

$$\begin{Bmatrix} \dot{\bar{44}}_{3\lambda} \\ \dot{\bar{44}}_{3\eta} \\ \dot{\bar{44}}_{3\xi} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -\dot{Z}\Psi - Z\dot{\Psi} - l_1\dot{\Psi} \\ \dot{Z}\Phi + Z\dot{\Phi} + l_1\dot{\Phi} \\ X_r\dot{\Psi} + d\dot{\Phi} + \dot{Z} \end{Bmatrix} \quad (2.17)$$

## 2.2 Equacionamento do movimento

### 2.2.1 Translações do corpo principal e dos conjuntos das rodas

Conforme o sistema de sete graus de liberdade descrito anteriormente e mostrado na figura 2.1, aplicando a segunda lei de Newton isoladamente para os corpos, temos:

### Translação do corpo principal

$$M_c \ddot{Z} = F_c - (F_{s1} + F_{s2} + F_{s3} + F_{s4}) \quad (2.18)$$

onde:  $F_c$ : força externa e:

$$F_{s1} = K_{s1}(\bar{11}_{3\zeta} - Z_1) + C_{s1}(\dot{\bar{11}}_{3\zeta} - \dot{Z}_1) \quad (2.19)$$

$$F_{s2} = K_{s2}(\bar{22}_{3\zeta} - Z_{r2}) + C_{s2}(\dot{\bar{22}}_{3\zeta} - \dot{Z}_{r2}) \quad (2.20)$$

$$F_{s3} = K_{s3}(\bar{33}_{3\zeta} - Z_3) + C_{s3}(\dot{\bar{33}}_{3\zeta} - \dot{Z}_3) \quad (2.21)$$

$$F_{s4} = K_{s4}(\bar{44}_{3\zeta} - Z_{r4}) + C_{s4}(\dot{\bar{44}}_{3\zeta} - \dot{Z}_{r4}) \quad (2.22)$$

e;

$$Z_{r2} = Z_r - d\Phi_1 \quad (2.23)$$

$$Z_{r4} = Z_r + d\Phi_1 \quad (2.24)$$

Substituindo os valores dos deslocamentos e das velocidades nas expressões das forças (equações 2.19 a 2.22) e substituindo os valores encontrados na equação 2.18, encontramos:

$$\begin{aligned} M_c \ddot{Z} = & -K_{s1}(-X_f \Psi - d\Phi + Z - Z_1) - C_{s1}(-X_f \dot{\Psi} - d\dot{\Phi} + \dot{Z} - \dot{Z}_1) \\ & -K_{s2}(X_r \Psi - d\Phi + Z - Z_r + d\Phi_1) - C_{s2}(X_r \dot{\Psi} - d\dot{\Phi} + \dot{Z} - \dot{Z}_r + d\dot{\Phi}_1) \\ & -K_{s3}(-X_f \Psi + d\Phi + Z - Z_3) - C_{s3}(-X_f \dot{\Psi} + d\dot{\Phi} + \dot{Z} - \dot{Z}_3) \\ & -K_{s4}(X_r \Psi + d\Phi + Z - Z_r - d\Phi_1) - C_{s4}(X_r \dot{\Psi} + d\dot{\Phi} + \dot{Z} - \dot{Z}_r - d\dot{\Phi}_1) \end{aligned} \quad (2.25)$$

fazendo:

$$K_{si} = K_s; i = 1, 4 \quad (2.26)$$

$$C_{si} = C_s; i = 1, 4 \quad (2.27)$$

temos:

$$\begin{aligned} M_c \ddot{Z} = & -K_s(2(X_r \Psi - X_f \Psi) + 4Z - 2Z_r - Z_1 - Z_3) \\ & -C_s(2(X_r \dot{\Psi} - X_f \dot{\Psi}) + 4\dot{Z} - 2\dot{Z}_r - \dot{Z}_1 - \dot{Z}_3) \end{aligned} \quad (2.28)$$

### Translação do corpo 1 (roda 1)

Supondo que:

- $E_{i,i=1,4}$  : deslocamento da  $i$ ésima roda devido as irregularidades da via
- $\dot{E}_{i,i=1,4}$  : velocidade da  $i$ ésima roda devido as irregularidades da via

Utilizando-se o mesmo procedimento anterior, temos:

$$M_1 \ddot{Z}_1 = F_{s1} - F_{w1} \quad (2.29)$$

onde:

$$F_{w1} = C_{r1}(\dot{Z}_1 - \dot{E}_1) + K_{r1}(Z_1 - E_1) \quad (2.30)$$

fazendo:

$$K_{ri} = K_r, i = 1, 4 \quad (2.31)$$

$$C_{ri} = C_r, i = 1, 4 \quad (2.32)$$

Utilizando-se das simplificações das equações 2.26, 2.27, 2.31 e 2.32, temos:

$$M_1 \ddot{Z}_1 = C_s(\dot{Z} - \dot{Z}_1 - X_f \dot{\Psi} - d\dot{\Phi}) - C_r(\dot{Z}_1 - \dot{E}_1) + K_s(Z - Z_1 - X_f \Psi - d\Phi) - K_r(Z_1 - E_1) \quad (2.33)$$

### Translação do corpo 3 (roda 3)

$$M_3 \ddot{Z}_3 = F_{s3} - F_{w3} \quad (2.34)$$

onde:

$$F_{w3} = C_{r3}(\dot{Z}_3 - \dot{E}_3) + K_{r3}(Z_3 - E_3) \quad (2.35)$$

Com auxílio das equações 2.26, 2.27, 2.31 e 2.32, temos:

$$M_3 \ddot{Z}_3 = C_s(\dot{Z} - \dot{Z}_3 - X_f \dot{\Psi} + d\dot{\Phi}) - C_r(\dot{Z}_3 - \dot{E}_3) + K_s(Z - Z_3 - X_f \Psi + d\Phi) - K_r(Z_3 - E_3) \quad (2.36)$$



### Translação do conjunto traseiro (rodas traseiras)

$$M_r \ddot{Z}_r = F_{r2} + F_{r4} - (F_{w2} + F_{w4}) \quad (2.37)$$

onde:

$$F_{w2} = C_{r2}(\dot{Z}_r - d\dot{\Phi}_1 - \dot{E}_2) + K_{r2}(Z_r - d\Phi_1 - E_2) \quad (2.38)$$

$$F_{w4} = C_{r4}(\dot{Z}_r + d\dot{\Phi}_1 - \dot{E}_4) + K_{r4}(Z_r + d\Phi_1 - E_4) \quad (2.39)$$

Usando novamente as simplificações das equações 2.26, 2.27, 2.31 e 2.32, temos:

$$\begin{aligned} M_r \ddot{Z}_r = & 2C_s(\dot{Z} - \dot{Z}_r + X_r\dot{\Psi}) - C_r(2\dot{Z}_r - \dot{E}_2 - \dot{E}_4) + \\ & 2K_s(Z - Z_r + X_r\Psi) - K_r(2Z_r - E_2 - E_4) \end{aligned} \quad (2.40)$$

### 2.2.2 Rotações do corpo principal e do conjunto traseiro

No sistema inercial, tem-se:

$$\left\{ \sum M_{i,:} \right\} = \left\{ \dot{H}_{i,:} \right\} \quad (2.41)$$

onde:

- $\left\{ \sum M_{i,:} \right\}$  : é a somatória dos momentos das forças externas em relação a G
- $\left\{ \dot{H}_{i,:} \right\}$  : é a quantidade do movimento angular derivada no sistema inercial
- G : centro de gravidade

Para o sistema móvel esta expressão torna-se:

$$\left\{ \sum M_{i,:}^S \right\} = \left\{ {}^S H_{i,:}^* \right\} + \left\{ {}^S \Omega \right\} \times \left\{ {}^S H_{i,:} \right\} \quad (2.42)$$

onde:

- $\left\{ {}^S H_{i,:}^* \right\}$  : é a derivada do momento angular no sistema S
- $\left\{ {}^S \Omega \right\}$  : velocidade angular no sistema S
- 

$$\left\{ {}^S H_{i,:} \right\} = {}^S [I] \left\{ {}^S \Omega \right\} \quad (2.43)$$

- ${}^S [I]$  : matriz que representa o tensor de inércia

$${}^S [I] = \begin{bmatrix} I_\chi & 0 & 0 \\ 0 & I_\eta & 0 \\ 0 & 0 & I_\xi \end{bmatrix} \quad (2.44)$$

Os produtos de inércia são nulos devido a simetria do veículo e  $I_\chi$ ,  $I_\eta$  e  $I_\xi$  são os momentos de inércia principais do corpo principal em relação aos eixos  $\chi$ ,  $\eta$  e  $\xi$ .

$$\{^S H_{i,j}\} = \begin{Bmatrix} I_\lambda \dot{\Phi} \cos \Psi \\ I_\eta \ddot{\Psi} \\ I_\zeta \dot{\Phi} \sin \Psi \end{Bmatrix} \quad (2.45)$$

$$\{^S H'_{i,j}\} = \begin{Bmatrix} I_\lambda \ddot{\Phi} \cos \Psi - I_\lambda \dot{\Phi} \dot{\Psi} \sin \Psi \\ I_\eta \ddot{\Psi} \\ I_\zeta \ddot{\Phi} \sin \Psi + I_\zeta \dot{\Phi} \dot{\Psi} \cos \Psi \end{Bmatrix} \quad (2.46)$$

$$\{^S \Omega\} \times \{^S H_{i,j}\} = \begin{Bmatrix} -I_\eta \dot{\Psi} \dot{\Phi} \sin \Psi + I_\zeta \dot{\Psi} \dot{\Phi} \sin \Psi \\ I_\lambda \dot{\Phi}^2 \cos \Psi \sin \Psi - I_\zeta \dot{\Phi}^2 \sin \Psi \cos \Psi \\ -I_\lambda \dot{\Psi} \dot{\Phi} \cos \Psi + I_\eta \dot{\Psi} \dot{\Phi} \cos \Psi \end{Bmatrix} \quad (2.47)$$

$$\left\{ \sum_{i=1}^4 M'_{i,j} \right\} = \sum_{i=1}^4 \{^S r_i\} \times \{^S F_{mola}\} + \sum_{i=1}^4 \{^S r_i\} \times \{^S F_{amortecedor}\} \quad (2.48)$$

onde:

- $\{^S r_i\}$  : vetor posição do  $r_{i,simula}$  par mola-amortecedor em relação a G.

$$\{^S F_{mola}\} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ -K_s(Z - Z_1 - X_f \Psi - d\Phi) \end{Bmatrix} \quad (2.49)$$

$$\{^S r_1\} \times \{^S F_{mola}\} = \begin{Bmatrix} e_\lambda & e_\eta & e_\zeta \\ X_f & -d & -l_1 \\ 0 & 0 & -K_s(Z - Z_1 - X_f \Psi - d\Phi) \end{Bmatrix} \quad (2.50)$$

$$\{^S r_1\} \times \{^S F_{mola}\} = e_\lambda (-d(-K_s(Z - Z_1 - X_f \Psi - d\Phi))) + e_\eta (X_f(-K_s(Z - Z_1 - X_f \Psi - d\Phi))) \quad (2.51)$$

Resolvendo para o conjunto total de suspensões temos:

### Rotação do corpo principal em torno do eixo $\chi$

$$\begin{aligned} I_\lambda \ddot{\Phi} &= K_{s1}d(Z - Z_1 - X_f \Psi - d\Phi) + C_{s1}d(\dot{Z} - \dot{Z}_1 - X_f \dot{\Psi} - d\dot{\Phi}) + \\ &K_{s2}d(Z - Z_r + X_r \Psi - d\Phi + d\Phi_1) + C_{s2}d(\dot{Z} - \dot{Z}_r + X_r \dot{\Psi} - d\dot{\Phi} + d\dot{\Phi}_1) - \\ &K_{s3}d(Z - Z_3 - X_f \Psi + d\Phi) - C_{s3}d(\dot{Z} - \dot{Z}_3 - X_f \dot{\Psi} + d\dot{\Phi}) - \\ &K_{s4}d(Z - Z_r + X_r \Psi + d\Phi - d\Phi_1) - C_{s4}d(\dot{Z} - \dot{Z}_r + X_r \dot{\Psi} + d\dot{\Phi} - d\dot{\Phi}_1) \end{aligned} \quad (2.52)$$

Fazendo as simplificações das equações 2.26 e 2.27, temos:

$$I_\lambda \ddot{\Psi} = -C_s d(\dot{Z}_1 - \dot{Z}_3 + 4d\dot{\Phi} - 2d\dot{\Phi}_1) - K_s d(Z_1 - Z_3 + 4d\Phi - 2d\Phi_1) \quad (2.53)$$

### Rotação do corpo principal em torno do eixo $\eta$

$$\begin{aligned}
 I_{\eta} \ddot{\Phi} = & K_{s1} X_f (Z - Z_1 - X_f \Psi - d\Phi) + C_{s1} X_f (\dot{Z} - \dot{Z}_1 - X_f \dot{\Psi} - d\dot{\Phi}) - \\
 & K_{s2} X_r (Z - Z_r + X_r \Psi - d\Phi + d\Phi_1) - C_{s2} X_r (\dot{Z} - \dot{Z}_r + X_r \dot{\Psi} - d\dot{\Phi} + d\dot{\Phi}_1) + \\
 & K_{s3} X_f (Z - Z_3 - X_f \Psi + d\Phi) + C_{s3} X_f (\dot{Z} - \dot{Z}_3 - X_f \dot{\Psi} + d\dot{\Phi}) - \\
 & K_{s4} X_r (Z - Z_r + X_r \Psi + d\Phi - d\Phi_1) - C_{s4} X_r (\dot{Z} - \dot{Z}_r + X_r \dot{\Psi} + d\dot{\Phi} - d\dot{\Phi}_1) \quad (2.54)
 \end{aligned}$$

Fazendo as simplificações das equações 2.26 e 2.27, temos:

$$\begin{aligned}
 I_{\eta} \ddot{\Psi} = & C_s X_f (2\dot{Z} - \dot{Z}_1 - \dot{Z}_3 - 2X_f \dot{\Psi}) - C_r X_r (2\dot{Z} - 2\dot{Z}_r + 2X_r \dot{\Psi}) + \\
 & K_s X_f (2Z - Z_1 - Z_3 - 2X_f \Psi) - K_r X_r (2Z - 2Z_r + 2X_r \Psi) \quad (2.55)
 \end{aligned}$$

### Rotação do conjunto traseiro em torno do eixo $\chi$

Utilizando-se procedimento semelhante para o conjunto traseiro, temos:

$$\begin{aligned}
 I_{\chi 1} \ddot{\Phi}_1 = & -K_{s2} d(Z - Z_r + X_r \Psi - d\Phi + d\Phi_1) - C_{s2} d(\dot{Z} - \dot{Z}_r + X_r \dot{\Psi} - d\dot{\Phi} + d\dot{\Phi}_1) \\
 & + K_{r2} d(Z_r - d\Phi_1 - E_2) + C_{r2} d(\dot{Z}_r - d\dot{\Phi}_1 - \dot{E}_2) \\
 & + K_{s4} d(Z - Z_r + X_r \Psi + d\Phi - d\Phi_1) + C_{s4} d(\dot{Z} - \dot{Z}_r + X_r \dot{\Psi} + d\dot{\Phi} - d\dot{\Phi}_1) \\
 & - K_{r4} d(Z_r + d\Phi_1 - E_4) - C_{r4} d(\dot{Z}_r + d\dot{\Phi}_1 - \dot{E}_4) \quad (2.56)
 \end{aligned}$$

Simplificando-se conforme as equações 2.26, 2.27, 2.31 e 2.32, temos:

$$\begin{aligned}
 I_{\chi 1} \ddot{\Phi}_1 = & 2C_s d(d\dot{\Phi} - d\dot{\Phi}_1) - C_r d(2d\dot{\Phi}_1 - \dot{E}_4 + \dot{E}_2) + \\
 & 2K_s d(d\Phi - d\Phi_1) - K_r d(2d\Phi_1 - E_4 + E_2) \quad (2.57)
 \end{aligned}$$

## 2.3 Tipos de excitações do veículo

A excitação externa resulta basicamente das irregularidades do solo (via). Estas irregularidades são modeladas por perfis determinísticos, que são modelados através de funções trigonométricas.

### 2.3.1 Configuração senoidal para as irregularidades das vias

O tipo básico de irregularidades das vias para as análises do comportamento excitado do veículo com elementos passivos de suspensão são modeladas através de perfis senoidais como mostra a figura 2.5.

As funções descrevendo as irregularidades do solo são:

$$E_i = A_i \sin \Omega t \quad (2.58)$$

Estas funções periódicas com amplitudes  $A_i$  e períodos  $L_i/V$ , descrevem os deslocamentos verticais das rodas.

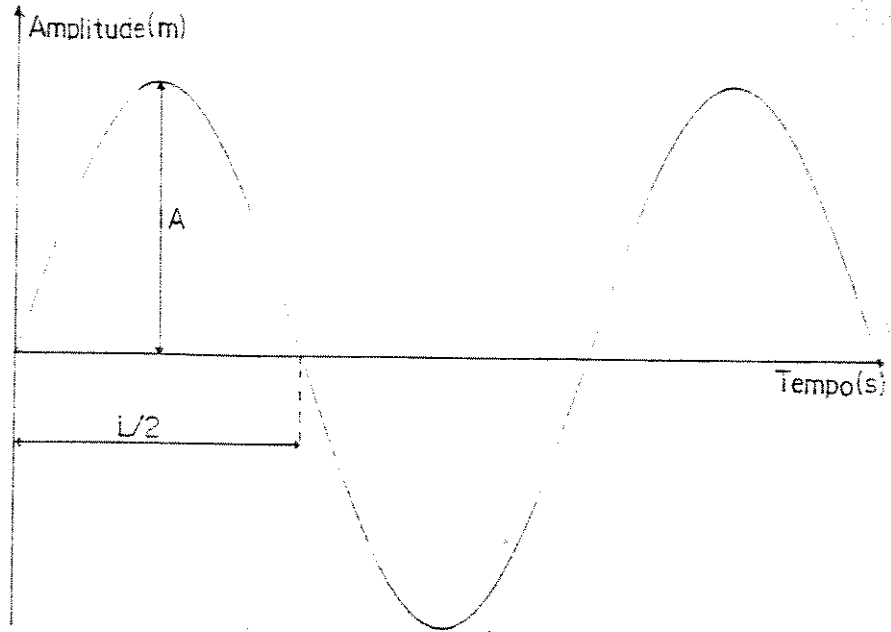


Figura 2.5: Perfil senoidal para modelamento das irregularidades das vias

A velocidade angular  $\Omega$ , torna-se:

$$\Omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi V}{L} \quad (2.59)$$

onde:

- T : período
- V : velocidade do veículo
- L : comprimento da via referente ao período T

então :

$$E_i = A_i \sin \frac{2\pi V}{L} t, i = 1, 4 \quad (2.60)$$

e,

$$\dot{E}_i = \frac{2\pi V}{L} A_i \cos \frac{2\pi V}{L} t, i = 1, 4 \quad (2.61)$$

Ajustando-se este tipo de excitação do veículo, e supondo o mesmo tipo de irregularidades (senoidais) para os conjuntos de rodas do lado esquerdo (rodas 1 e 2) e do lado direito (rodas 3 e 4) do veículo, temos:

$$E_1 = A_1 \sin\left(\frac{2\pi V}{L_1} t\right) \quad (2.62)$$

$$E_2 = A_1 \sin\left(\frac{2\pi V}{L_1} (t - t_r)\right) \quad (2.63)$$

$$E_3 = A_2 \sin\left(\frac{2\pi V}{L_2} t\right) \quad (2.64)$$

$$E_4 = A_2 \sin\left(\frac{2\pi V}{L_2}(t - t_s)\right) \quad (2.65)$$

onde:

- $A_1$  : amplitude de excitação do lado esquerdo da via
- $A_2$  : amplitude de excitação do lado direito da via
- $L_1$  : comprimento da via referente ao período do lado esquerdo da via
- $L_2$  : comprimento da via referente ao período do lado direito da via
- $t$  : variável temporal
- $t_s$  : tempo que leva o veículo para percorrer a distância entre as rodas dianteiras e traseiras, ou seja:

$$t_s = \frac{X_r + X_f}{V} \quad (2.66)$$

As velocidades em cada roda devido as irregularidades da via são:

$$\dot{E}_1 = \frac{2\pi V}{L_1} A_1 \cos\left(\frac{2\pi V}{L_1} t\right) \quad (2.67)$$

$$\dot{E}_2 = \frac{2\pi V}{L_1} A_1 \cos\left(\frac{2\pi V}{L_1} (t - t_s)\right) \quad (2.68)$$

$$\dot{E}_3 = \frac{2\pi V}{L_2} A_2 \cos\left(\frac{2\pi V}{L_2} t\right) \quad (2.69)$$

$$\dot{E}_4 = \frac{2\pi V}{L_2} A_2 \cos\left(\frac{2\pi V}{L_2} (t - t_s)\right) \quad (2.70)$$

### 2.3.2 Configuração do tipo rampa para as irregularidades das vias

O segundo tipo adotado de irregularidades das vias para análises comparativas entre os sistemas de suspensões passivas convencionais e com molas a gás e para o sistema semi-ativo com molas a gás é mostrado na figura 2.6.

Supondo-se que o veículo possua uma velocidade constante  $V$ , define-se a função  $E(t)$  que descreve as variações das amplitudes dos deslocamentos das rodas devido as irregularidades das vias em relação ao tempo. Fazendo-se:

$$E(t) = a + bt \quad (2.71)$$

- $0 \leq t \leq \frac{t_1}{2}$ , temos:

$$E(t) = \frac{2A}{t_1} t \quad (2.72)$$

$$\dot{E}(t) = \frac{2A}{t_1} \quad (2.73)$$

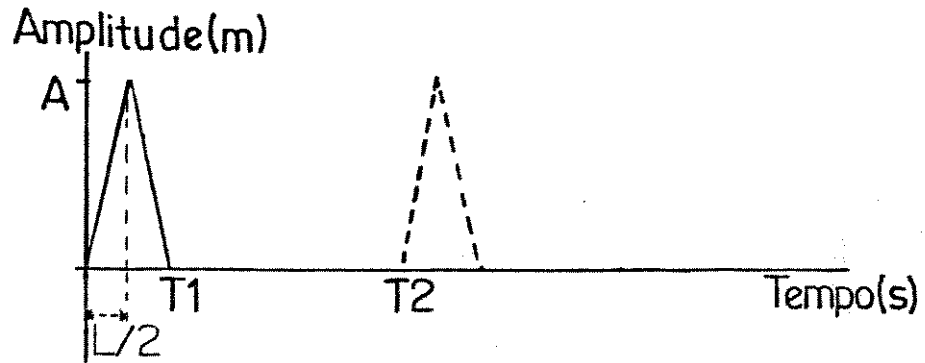


Figura 2.6: Perfil tipo rampa para modelamento das irregularidades das vias

- $\frac{t_1}{2} \leq t \leq t_1$ , temos:

$$E(t) = 2A - \frac{2A}{t_1}t \quad (2.74)$$

$$\dot{E}(t) = -\frac{2A}{t_1} \quad (2.75)$$

- $t_1 \leq t \leq t_2$ , temos:

$$E(t) = 0 \quad (2.76)$$

$$\dot{E}(t) = 0 \quad (2.77)$$

- $t_2 \leq t \leq t_2 + \frac{t_1}{2}$ , temos:

$$E(t) = -2A\frac{t_2}{t_1} + \frac{2A}{t_1}t \quad (2.78)$$

$$\dot{E}(t) = \frac{2A}{t_1} \quad (2.79)$$

- $t_2 + \frac{t_1}{2} \leq t \leq t_2 + t_1$ , temos:

$$E(t) = 2A + 2A\frac{t_2}{t_1} - \frac{2A}{t_1}t \quad (2.80)$$

$$\dot{E}(t) = -\frac{2A}{t_1} \quad (2.81)$$

- $t \geq t_2 + t_1$  o deslocamento e a velocidade são ambos nulos.

Pela figura 2.6 temos:

$$t_1 = \frac{L}{V} \quad (2.82)$$

$$t_2 = \frac{L_1}{V} \quad (2.83)$$

onde:

- $L$  : largura da rampa
- $L_1$  : distância entre as rodas ( $X_r + X_f$ )
- $V$  : velocidade do veículo

## 2.4 Metodologia de Resolução do Sistema

Nas análises de um sistema mecânico, considera-se um modelo físico que representa o modelo real e identificam-se os parâmetros e movimentos característicos do veículo. A partir daí, estabelecem-se as hipóteses simplificadoras, criam-se modelos matemáticos pela associação de variáveis correspondentes e estabelecem-se as equações gerais do movimento, que formam um sistema de equações diferenciais simultâneas com tantas equações quanto são os graus de liberdade escolhidos e que podem ser representados na forma matricial

$$[M] \left\{ \ddot{Z}(t) \right\} + [C] \left\{ \dot{Z}(t) \right\} + [K] \left\{ Z(t) \right\} = \{ F(t) \} \quad (2.84)$$

que é uma equação diferencial vetorial de segunda ordem para o vetor posição  $\{Z(t)\}$  de dimensão  $N \times 1$ . Onde:

- $[M]$  : matriz de inércia de dimensão  $N \times N$
- $[C]$  : matriz de amortecimento de dimensão  $N \times N$
- $[K]$  : matriz de rigidez de dimensão  $N \times N$
- $\{F(t)\}$  : representa o vetor excitação de dimensão  $N \times 1$ .

Para análise desta equação é conveniente modificá-la para um sistema de primeira ordem [14], [20], [21]. Definimos:

$$\{Y(t)\} = \left\{ \begin{array}{c} \{Z(t)\} \\ \{\dot{Z}(t)\} \end{array} \right\} \quad (2.85)$$

que representa um vetor de estado de dimensão  $2N \times 1$ .

Com o vetor de estado definido pode-se obter a equação de estado adicionando-se à equação do movimento, a equação trivial

$$\{\dot{Z}(t)\} = \{\dot{Z}(t)\} \quad (2.86)$$

$$\{\dot{Y}(t)\} = [A] \{Y(t)\} + \{b(t)\} \quad (2.87)$$

que representa uma equação vetorial  $2N \times 1$ . A matriz  $[A(t)]$ , matriz de estado, possui a seguinte estrutura

$$[A(t)] = \begin{bmatrix} [0] & [I] \\ -[M]^{-1}[K] & -[M]^{-1}[C] \end{bmatrix} \quad (2.88)$$

onde:

- $[M]$ ,  $[C]$  e  $[K]$  são as matrizes de inércia, amortecimento e rigidez de dimensão  $N \times N$  já definidas
- $[0]$  é uma matriz nula de dimensão  $N \times N$
- $[I]$  é a matriz identidade de dimensão  $N \times N$ .

Logo,  $[A(t)]$  possui dimensão  $2N \times 2N$ .

O vetor excitação  $\{b(t)\}$  de dimensão  $2N \times 1$  possui a seguinte estrutura:

$$\{b(t)\} = \begin{Bmatrix} \{0\} \\ [M]^{-1}\{F(t)\} \end{Bmatrix} \quad (2.89)$$

onde:

- $\{0\}$  é o vetor nulo de dimensão  $N \times 1$
- $\{F(t)\}$  vetor excitação de dimensão  $N \times 1$
- $[M]^{-1}$  é a inversa da matriz de inércia de dimensão  $N \times N$ .

Fazendo o vetor de excitação  $\{b(t)\}$  como sendo nulo, temos:

$$\{\dot{Y}\} = [A] \{Y\} \quad (2.90)$$

Seja a seguinte solução particular:

$$\{\dot{Y}\} = \lambda \{Y\} \quad (2.91)$$

$$\{Y\} = e^{\lambda t} \{W\} \quad (2.92)$$

Substituindo 2.91 e 2.92 em 2.90

$$\lambda \{W\} e^{\lambda t} = [A] \{W\} e^{\lambda t} \quad (2.93)$$



ou

$$\lambda \{W\} = [A] \{W\} \quad (2.94)$$

É claro que o vetor  $\{Y\}=\{0\}$  é uma solução da equação 2.94 para qualquer valor de  $\lambda$ .

Um valor de  $\lambda$  para o qual a equação 2.94 possui uma solução  $\{Y\} \neq \{0\}$  é chamado de valor próprio ou autovalor ou valor característico. As soluções correspondentes para  $\{Y\} \neq \{0\}$  da equação 2.94 são chamados vetores característicos ou autovetores os vetores próprios de A correspondente ao autovalor  $\lambda$ , e representa o modo de vibrar, ou seja, uma relação entre as amplitudes das variáveis quando o sistema vibra na frequência correspondente.

Escrevendo a equação 2.93 na seguinte forma

$$[|A| - \lambda|I|] \{W\} = 0 \quad (2.95)$$

Existe uma solução não trivial se:

$$D(\lambda) = \det[|A| - \lambda|I|] = 0 \quad (2.96)$$

$D(\lambda)$  é chamado determinante característico e 2.96 é a equação característica correspondente à matriz A. Desenvolvendo  $D(\lambda)$  obtemos um polinômio de grau  $2N$  em  $\lambda$ . O polinômio desenvolvido é chamado polinômio característico de A.

A solução completa da equação 2.90 será:

$$\{Y(t)\} = \sum_{i=1}^{2N} g_i \{W_i\} e^{\lambda_i t} \quad (2.97)$$

onde  $g_i$  são as constantes que dependem das condições iniciais.

Substituindo 2.97 em 2.85, temos:

$$\{Y(t)\} = \left\{ \begin{array}{c} \{Z(t)\} \\ \{\dot{Z}(t)\} \end{array} \right\} = \sum_{i=1}^{2N} g_i \left\{ \begin{array}{c} \{U_i\} \\ \{V_i\} \end{array} \right\} e^{\lambda_i t} \quad (2.98)$$

A solução do movimento será:

$$\{Z(t)\} = \sum_{i=1}^{2N} g_i \{U_i\} e^{\lambda_i t} \quad (2.99)$$

Os autovalores ocorrem em pares conjugados complexos da forma:

$$\lambda_i = \alpha_i \pm j\beta_i \quad (2.100)$$

A solução genérica será:

$$\{Z(t)\} = \sum_{i=1}^{2N} g_i \{U_i\} \cos(\omega_{di}t + \theta_i) e^{-\xi_i \omega_{ni}t} \quad (2.101)$$

onde:

–  $\xi_i$ : razão de amortecimento

$$\xi_i = -\frac{\alpha_i}{\omega_{ni}} \quad (2.102)$$

–  $\omega_{ni}$ : frequência natural

$$\omega_{ni} = (\alpha_i^2 + \beta_i^2)^{\frac{1}{2}} \quad (2.103)$$

–  $\omega_{di}$ : frequência amortecida

$$\omega_{di} = (\beta_i^2)^{\frac{1}{2}} \quad (2.104)$$

–  $\theta_i$ : ângulo de fase

$$\theta_i = \arctan \frac{\beta_i}{\alpha_i} \quad (2.105)$$

Valores negativos da parte real dos autovalores, porém próximos de zero, caracterizam o sistema como sendo estável, porém pouco amortecido. A estabilidade do sistema é maior quanto menor for sua parte real. O grau de estabilidade é definido por:

$$GE = MAX[-Re(\lambda_i)] \quad (2.106)$$

Valores nulos da parte imaginária dos autovalores significam frequências nulas correspondendo a modos de vibrar não excitados.

Resolvendo o nosso caso particular, ou seja, o sistema descrito pela figura 2.1 na forma das equações de estado (equação 2.90), definimos o vetor de estado (equação 2.85) como:

$$\{Y(t)\} = \left\{ \begin{array}{c} \{y_1\} \\ \{\dot{y}_1\} \end{array} \right\} \quad (2.107)$$

onde:

$$\{y_1\} = \left\{ \begin{array}{c} Z \\ Z_1 \\ Z_3 \\ Z_r \\ \Phi \\ \Psi \\ \Phi_1 \end{array} \right\} \quad (2.108)$$

$$\{\dot{y}_1\} = \begin{Bmatrix} \dot{Z} \\ \dot{Z}_1 \\ \dot{Z}_3 \\ \dot{Z}_r \\ \dot{\Phi} \\ \dot{\Psi} \\ \dot{\Phi}_1 \end{Bmatrix} \quad (2.109)$$

$$\{\dot{Y}(t)\} = \begin{Bmatrix} \{\dot{y}_1\} \\ \{\dot{\bar{y}}_1\} \end{Bmatrix} \quad (2.110)$$

$$\{\bar{y}_1\} = \begin{Bmatrix} \bar{Z} \\ \bar{Z}_1 \\ \bar{Z}_3 \\ \bar{Z}_r \\ \bar{\Phi} \\ \bar{\Psi} \\ \bar{\Phi}_1 \end{Bmatrix} \quad (2.111)$$

Para resolução da equação 2.90 falta apenas definir os termos da matriz de estado (equação 2.88), onde:

$$[M] = \begin{bmatrix} M_c & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & M_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & M_3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & M_r & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & I_\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & I_\eta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & I_{\lambda 1} \end{bmatrix} \quad (2.112)$$

$$[C] = \begin{bmatrix} 4C_s & -C_s & -C_s & -2C_s & 0 & 2C_s(X_r - X_f) & 0 \\ -C_s & C_s + C_r & 0 & 0 & C_s d & C_s X_f & 0 \\ -C_s & 0 & C_s + C_r & 0 & -C_s d & C_s X_f & 0 \\ -2C_s & 0 & 0 & 2(C_s + C_r) & 0 & -2C_s X_r & 0 \\ 0 & C_s d & -C_s d & 0 & 4C_s d^2 & 0 & -2C_s d^2 \\ 2C_s(X_r - X_f) & C_s X_f & C_s X_f & -2C_s X_r & 0 & 2C_s(X_f^2 + X_r^2) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2C_s d^2 & 0 & 2d^2(C_s + C_r) \end{bmatrix} \quad (2.113)$$

$$[K] = \begin{bmatrix} 4K_s & -K_s & -K_s & -2K_s & 0 & 2K_s(X_r - X_f) & 0 \\ -K_s & K_s + K_r & 0 & 0 & K_s d & K_s X_f & 0 \\ -K_s & 0 & K_s + K_r & 0 & -K_s d & K_s X_f & 0 \\ -2K_s & 0 & 0 & 2(K_s + K_r) & 0 & -2K_s X_r & 0 \\ 0 & K_s d & -K_s d & 0 & 4K_s d^2 & 0 & -2K_s d^2 \\ 2K_s(X_r - X_f) & K_s X_f & K_s X_f & -2K_s X_r & 0 & 2K_s(X_f^2 + X_r^2) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2C_s d^2 & 0 & 2d^2(K_s + K_r) \end{bmatrix} \quad (2.114)$$

## Capítulo 3

# Comportamento próprio do sistema

### 3.1 Resolução

Os dados utilizados para a análise do comportamento próprio do veículo encontram-se no apêndice [B].

Conhecendo-se os dados, desenvolveu-se um programa computacional QR, que utiliza um método com o mesmo nome, para resolução de sistemas homogêneos de equações diferenciais ordinárias como descrito no apêndice [D]. Este programa utiliza-se de algumas subrotinas objetos: R3A, R3B, R3C, AZA4D, D4C1AD, D4C24D, D4C1CD, D4C4BD e D4A22D de uma biblioteca de programas matemáticos e, utiliza-se também da subrotina Estado, que como o próprio nome diz gera a matriz de estado para um sistema mecânico qualquer, bastando somente entrar com os elementos das matrizes  $[M]$ ,  $[C]$  e  $[K]$  previamente discutidas; e da subrotina Módulo, que encontra o módulo e a fase entre as partes reais e imaginárias dos elementos dos autovetores.

Para elaboração gráfica utilizou-se o programa computacional HPG.

### 3.2 Resultados e discussões

As primeiras análises do comportamento do sistema mecânico restringiram-se as análises do comportamento próprio do veículo variando-se os parâmetros das suspensões. Obteve-se desta forma, dados para levantamento das curvas da variação dos autovalores variando-se as constantes de rigidez das molas na faixa de 100000 a 300000 N/m (valores habituais encontrados na literatura científica do assunto) mantendo-se fixas as constantes de amortecimento dos amortecedores em 12000 Ns/m, para as duas condições de carga do veículo, ou seja, descarregado (figura 3.1) e carregado (figura 3.2).

Variaram-se as constantes de amortecimento dos amortecedores na faixa de 6000 a 27500 Ns/m para o veículo descarregado (figura 3.3) e na faixa de 6000 a 32000 Ns/m para o sistema carregado (figura 3.4), e nestes dois casos mantiveram-se fixas as constantes de rigidez das molas em 100000 N/m.

Concomitantemente montaram-se as tabelas 3.1 a 3.7 para variação dos modos de vibrar do sistema descarregado e as tabelas 3.8 a 3.14 para variação dos modos de vibrar do sistema carregado para alguns valores diferentes da rigidez referentes às figuras 3.1 e 3.2; e as tabelas 3.15 a 3.21 para a variação dos modos de vibrar do sistema descarregado e as tabelas 3.22 a 3.28 para a variação dos modos de vibrar do sistema carregado para alguns valores diferentes de amortecimento referentes às figuras 3.3 e 3.4, para se poder analisar melhor os modos de vibrar.

### 3.2.1 Variações dos autovalores e autovetores devido variações das constantes de rigidez das molas

Pelas figuras 3.1 e 3.2, é fácil notar uma certa semelhança de aspecto entre as curvas, embora haja grandes variações no que se refere aos valores.

Para analisá-las utiliza-se também as tabelas 3.1 a 3.14, e notamos:

- As partes reais dos autovalores 1, 2, e 3 aumentam com o aumento da rigidez;
- As partes reais dos autovalores 4, 5, e 6 diminuem com o aumento da rigidez;
- A parte real do autovalor 7 praticamente não muda;
- As partes imaginárias de todos os autovalores aumentam;
- O autovalor 1 apresenta certa variação de um sistema para o outro. Em ambos os sistemas a amplitude máxima é dada por  $Z$ . No sistema descarregado  $Z_1 = Z_3$  são praticamente iguais a  $Z_r$  e aumentam com aumento da rigidez e  $\Psi$  é praticamente nulo. No sistema carregado a relação  $Z_1 = Z_3$  e  $\Psi$  são maiores que no sistema descarregado, e aumentam com o aumento da rigidez, o mesmo acontecendo para  $Z_r$  que possui valor pequeno.
- O autovalor 2 apresenta variação entre os sistemas. A amplitude máxima é dada por  $\Phi$ . O sistema descarregado possui maiores valores de  $Z_1$ ,  $Z_3$  e  $\Phi_1$  e elas aumentam com o aumento da rigidez.
- O autovalor 3 é o que apresenta maior variação de um sistema para o outro. A amplitude máxima no sistema descarregado inicialmente é dada por  $\Psi$  e com o aumento da rigidez por  $Z_r$ , acentuando um grande aumento de  $Z_r$ ;  $Z$  e  $\Psi$  diminuem em relação a  $Z_r$ , embora  $Z$  permaneça fixo em relação a  $\Psi$ ;  $Z_1$  e  $Z_3$  possuem valores baixos e praticamente não mudam suas relações. No sistema carregado a amplitude máxima é dada por  $\Psi$ ;  $Z_1 = Z_3$  e  $Z_r$  possuem praticamente o mesmo valor e aumentam com o aumento da rigidez,  $Z$  é praticamente nulo.
- O autovalor 4 varia bastante de um sistema em relação ao outro. A amplitude máxima nos dois sistemas é dada por  $Z_r$ . As relações de amplitudes de  $Z$  e  $\Psi$  são bem maiores para o sistema descarregado e decrescem nos dois sistemas com o aumento da rigidez.  $Z_1$  e  $Z_3$  são reduzidos e praticamente não variam as relações de amplitudes.

O autovalor 5 apresenta pequena variação entre os sistemas. As amplitudes máximas são dadas por  $Z_1 = Z_3$  defasados de  $180^\circ$ , maiores valores de  $\Phi$  para o sistema carregado, e diminuem com aumento da rigidez e, valores próximos de  $\Phi_1$  para ambos os sistemas e pouco defasados de  $Z_3$  e decrescem com o aumento da rigidez.

- O autovalor 6 varia pouco de um sistema em relação ao outro. Nota-se que as amplitudes máximas são dadas por  $Z_1 = Z_3$  e que as demais amplitudes diferentes de zero, ou seja,  $Z$ ,  $Z_r$  e  $\Psi$  são bastante reduzidas em relação às amplitudes máximas e variam pouco com aumento da rigidez.
- O autovalor 7 é praticamente o mesmo para os dois sistemas. As amplitudes máximas são dadas por  $Z_1 = Z_3$  defasados de  $180^\circ$ , possuem grandes valores de  $\Phi_1$  pouco defasados de  $Z_1$  cujos valores diminuem com o aumento da rigidez, e possuem valores pequenos para  $\Phi$  que aumentam com o aumento da rigidez.

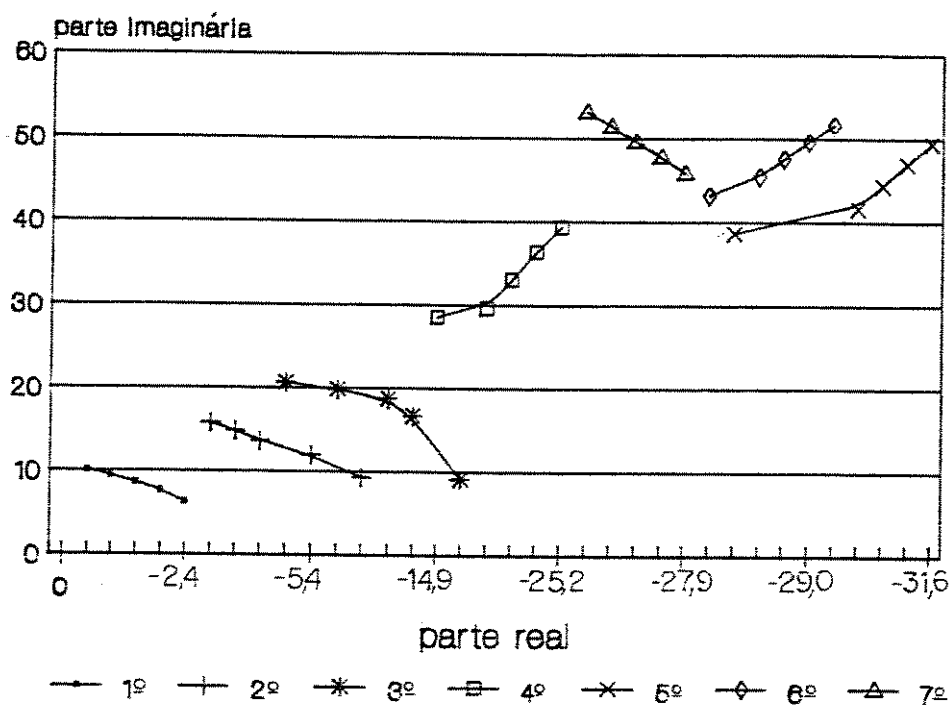


Figura 3.1: Variações dos autovalores devido variações da rigidez das molas das suspensões. (Veículo descarregado)



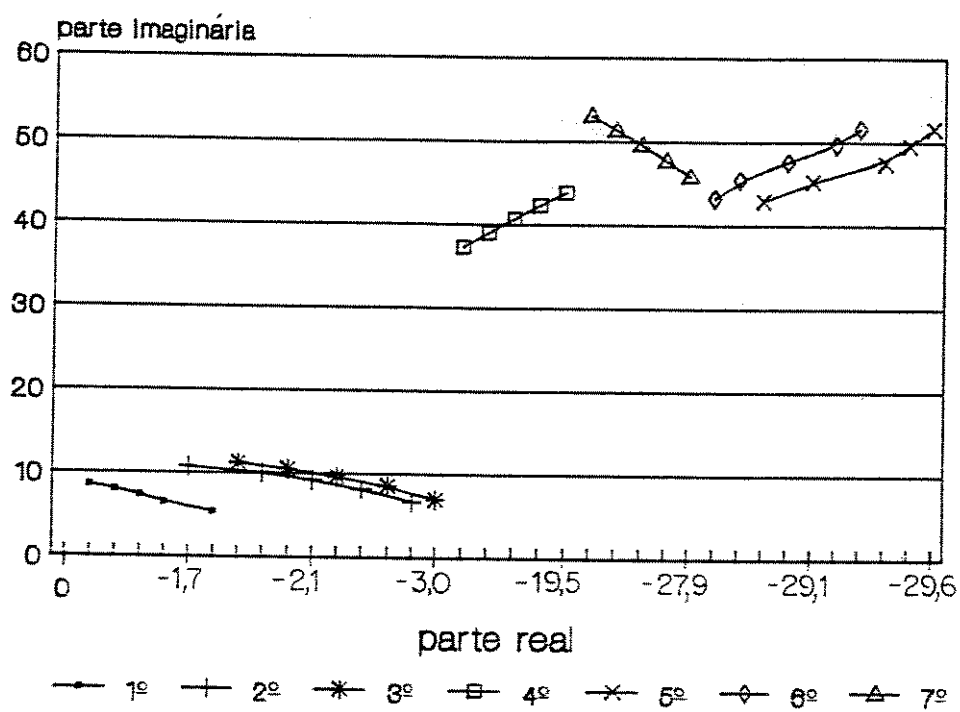


Figura 3.2: Variações dos autovalores devido variações da rigidez das molas das suspensões. (Veículo carregado)

$K_s [N/m]$	100000	150000	250000
$\lambda$	$-2.39 \pm 6.35i$	$-2.084 \pm 7.72i$	$-1.647 \pm 9.497i$
$Z$	1.0 / 41.33"	1.0 / 99.136"	1.0 / -136.49"
$Z_r$	0.0055 / 81.85"	0.0078 / 128.267"	0.011 / -118.474"
$Z_1 = Z_0$	0.172 / 81.45"	0.237 / 127.83"	0.351 / -118.9"
$\Psi$	0.3275 / -138.67"	0.323 / -80.87"	0.326 / 43.49"
$\Phi = \Phi_1$	0	0	0

Tabela 3.1: Variação do primeiro modo de vibrar devido variações da rigidez das molas. (Veículo descarregado)

$K_s [N/m]$	100000	150000	250000
$\lambda$	$-6.5 \pm 9.35i$	$-5.36 \pm 11.97i$	$-3.94 \pm 14.851i$
$\Phi$	1.0 / 67.95"	1.0 / -163.12"	1.0 / 54.52"
$Z_1$	0.206 / -42.26"	0.278 / 64.548"	0.393 / -97.51"
$Z_0$	0.206 / 137.74"	0.278 / -115.452"	0.393 / 82.49"
$\Phi_1$	0.165 / 137.69"	0.221 / -115.48"	0.314 / 82.47"
$Z = Z_r = \Psi$	0	0	0

Tabela 3.2: Variação do segundo modo de vibrar devido variações da rigidez das molas. (Veículo descarregado)

$K_s [N/m]$	100000	150000	250000
$\lambda$	$-15.24 \pm 9.18i$	$-10.509 \pm 16.71i$	$-5.95 \pm 19.874i$
$\Psi$	1.0 / 174.83"	1.0 / -159.715"	1.0 / -67.55"
$Z$	0.655 / 174.68"	0.666 / -159.772"	0.652 / -67.68"
$Z_1 = Z_0$	0.025 / 115.50"	0.035 / 89.72"	0.043 / 148.68"
$Z_r$	0.787 / -60.22"	1.179 / -86.48"	1.466 / -30.773"
$\Phi = \Phi_1$	0	0	0

Tabela 3.3: Variação do terceiro modo de vibrar devido variações da rigidez das molas. (Veículo descarregado)

$K_r [N/m]$	100000	150000	250000
$\lambda$	$-14.87 \pm 28.54i$	$-19.599 \pm 29.64i$	$-24.16 \pm 36.35i$
$Z_r$	1.0 / 127.62"	1.0 / -33.28"	1.0 / 50.62"
$Z$	0.170 / 38.41"	0.170 / -143.46"	0.135 / -80.64"
$Z_1 = Z_3$	0.021 / -64.336"	0.023 / 120.37"	0.0241 / 178.42"
$\Psi$	0.256 / 38.58"	0.256 / -143.656"	0.201 / -81.334"
$\Phi = \Phi_1$	0	0	0

Tabela 3.4: Variação do quarto modo de vibrar devido variações da rigidez das molas. (Veículo descarregado)

$K_r [N/m]$	100000	150000	250000
$\lambda$	$-28.533 \pm 38.65i$	$-29.685 \pm 41.604i$	$-31.1 \pm 46.969i$
$Z_1$	1.0 / -119.15"	1.0 / 179.49"	1.0 / 7.42"
$Z_3$	1.0 / 60.85"	1.0 / -0.51"	1.0 / -172.58"
$\Phi$	0.259 / -63.048"	0.235 / -130.049"	0.206 / 48.45"
$\Phi_1$	0.788 / 57.199"	0.794 / -5.0"	0.816 / -178.32"
$Z = Z_r = \Psi$	0	0	0

Tabela 3.5: Variação do quinto modo de vibrar devido variações da rigidez das molas. (Veículo descarregado)

$K_r [N/m]$	100000	150000	250000
$\lambda$	$-28.23 \pm 43.19i$	$-28.539 \pm 45.45i$	$-28.98 \pm 49.648i$
$Z_1 = Z_3$	1.0 / -39.17"	1.0 / 136.91"	1.0 / 17.485"
$Z$	0.088 / -166.86"	0.0826 / 5.385"	0.075 / -121.46"
$Z_r$	0.0137 / -72.63"	0.0134 / 95.53"	0.0129 / -39.60"
$\Psi$	0.032 / 17.9"	0.030 / -169.44"	0.0307 / 49.92"
$\Phi = \Phi_1$	0	0	0

Tabela 3.6: Variação do sexto modo de vibrar devido variações da rigidez das molas. (Veículo descarregado)

$K_s [N/m]$	100000	150000	250000
$\lambda$	$-27.93 \pm 45.845i$	$-27.926 \pm 47.767i$	$-27.926 \pm 51.395i$
$Z_1$	1.0 / $-81.84''$	1.0 / $156.38''$	1.0 / $129.19''$
$Z_2$	1.0 / $98.16''$	1.0 / $-23.62''$	1.0 / $-50.81''$
$\Phi$	0.0076 / $-130.19''$	0.0098 / $111.55''$	0.0104 / $91.33''$
$\Phi_1$	0.830 / $-77.59''$	0.820 / $161.32''$	0.798 / $135.125''$
$Z = Z_r = \Psi$	0	0	0

Tabela 3.7: Variação do sétimo modo de vibrar devido variações da rigidez das molas. (Veículo descarregado)

$K_s [N/m]$	100000	150000	250000
$\lambda$	$-1.7 \pm 5.45i$	$-1.49 \pm 6.577i$	$-1.187 \pm 8.069i$
$Z$	1.0 / $-61.78''$	1.0 / $-58.83''$	1.0 / $-35.218''$
$Z_r$	0.134 / $-28.026''$	0.186 / $-34.46''$	0.279 / $-20.11''$
$Z_1 = Z_2$	0.133 / $-28.324''$	0.186 / $-34.82''$	0.275 / $-20.494''$
$\Psi$	0.0006 / $5.43''$	0.0008 / $-10.458''$	0.0026 / $-5.38''$
$\Phi = \Phi_1$	0	0	0

Tabela 3.8: Variação do primeiro modo de vibrar devido variações da rigidez das molas. (Veículo carregado)

$K_s [N/m]$	100000	150000	250000
$\lambda$	$-2.726 \pm 6.725i$	$-2.365 \pm 8.199i$	$-1.859 \pm 10.094i$
$\Phi$	1.0 / $131.95''$	1.0 / $18.741''$	1.0 / $-19.747''$
$Z_1$	0.174 / $-5.036''$	0.242 / $-130.59''$	0.357 / $178.99''$
$Z_2$	0.174 / $174.96''$	0.242 / $49.40''$	0.357 / $-1.008''$
$\Phi_1$	0.139 / $174.95''$	0.194 / $49.39''$	0.285 / $-1.014''$
$Z = Z_r = \Psi$	0	0	0

Tabela 3.9: Variação do segundo modo de vibrar devido variações da rigidez das molas. (Veículo carregado)

$K_r [N/m]$	100000	150000	250000
$\lambda$	$-3.0 \pm 7.02i$	$-2.59 \pm 8.57i$	$-2.015 \pm 10.554i$
$\Psi$	1.0 / $-152.95''$	1.0 / $9.52''$	1.0 / $6.071''$
$Z$	0.0024 / $118.16''$	0.0045 / $-105.67''$	0.0097 / $-134.49''$
$Z_1 = Z_3$	0.262 / $72.47''$	0.361 / $-138.12''$	0.533 / $-154.13''$
$Z_r$	0.263 / $-107.26''$	0.367 / $41.98''$	0.538 / $25.70''$
$\Phi = \Phi_1$	0	0	0

Tabela 3.10: Variação do terceiro modo de vibrar devido variações da rigidez das molas. (Veículo carregado)

$K_r [N/m]$	100000	150000	250000
$\lambda$	$-18.59 \pm 37.28i$	$-18.90 \pm 39.02i$	$-19.338 \pm 42.311i$
$Z_r$	1.0 / $45.95''$	1.0 / $-99.08''$	1.0 / $144.61''$
$Z$	0.049 / $-73.44''$	0.0467 / $136.1''$	0.044 / $9.83''$
$Z_1 = Z_3$	0.070 / $163.62''$	0.0619 / $7.52''$	0.052 / $-128.75''$
$\Psi$	0.049 / $-76.99''$	0.0467 / $132.33''$	0.042 / $6.021''$
$\Phi = \Phi_1$	0	0	0

Tabela 3.11: Variação do quarto modo de vibrar devido variações da rigidez das molas. (Veículo carregado)

$K_r [N/m]$	100000	150000	250000
$\lambda$	$-28.5 \pm 42.96i$	$-28.868 \pm 45.287i$	$-29.375 \pm 49.602i$
$Z_1$	1.0 / $-94.96''$	1.0 / $-178.85''$	1.0 / $90.869''$
$Z_3$	1.0 / $85.04''$	1.0 / $1.144''$	1.0 / $-89.139''$
$\Phi$	0.100 / $-46.28''$	0.092 / $-134.82''$	0.084 / $126.24''$
$\Phi_1$	0.783 / $75.215''$	0.784 / $-10.3''$	0.831 / $-102.92''$
$Z = Z_r = \Psi$	0	0	0

Tabela 3.12: Variação do quinto modo de vibrar devido variações da rigidez das molas. (Veículo carregado)

$K_r [N/m]$	100000	150000	250000
$\lambda$	$-28.43 \pm 43.247i$	$-28.49 \pm 45.487i$	$-28.93 \pm 49.664i$
$Z_1 = Z_3$	$1.0 / -142.516''$	$1.0 / 179.15''$	$1.0 / 4.48''$
$Z$	$0.040 / 86.99''$	$0.0376 / 45.27''$	$0.033 / -136.10''$
$Z_r$	$0.044 / 144.024''$	$0.0356 / -127.95''$	$0.031 / 49.49''$
$\Psi$	$0.038 / -85.483''$	$0.0388 / 98.15''$	$0.032 / -91.09''$
$\Phi = \Phi_1$	0	0	0

Tabela 3.13: Variação do sexto modo de vibrar devido variações da rigidez das molas. (Veículo carregado)

$K_r [N/m]$	100000	150000	250000
$\lambda$	$-27.935 \pm 45.833i$	$-27.93 \pm 47.75i$	$-27.934 \pm 51.376i$
$Z_1$	$1.0 / -97.22''$	$1.0 / 12.62''$	$1.0 / 164.88''$
$Z_3$	$1.0 / 82.78''$	$1.0 / -167.38''$	$1.0 / -15.12''$
$\Phi$	$0.009 / -142.68''$	$0.0092 / -28.74''$	$0.01 / 131.11''$
$\Phi_1$	$0.844 / -86.91''$	$0.830 / 24.425''$	$0.784 / 178.82''$
$Z = Z_r = \Psi$	0	0	0

Tabela 3.14: Variação do sétimo modo de vibrar devido variações da rigidez das molas. (Veículo carregado)

### 3.2.2 Variação dos autovalores e autovetores devido variações das constantes de amortecimento dos amortecedores

Analisando-se as figuras 3.3 e 3.4 é fácil notar que existem grandes diferenças entre as curvas de um sistema para o outro.

Com auxílio destas figuras e das tabelas 3.15 a 3.28, temos:

- Aumentando-se o as constantes de amortecimento dos amortecedores consegue-se superamortecer os modos 2, 3, 6 e 7 no sistema descarregado e os modos 4, 5, 6 e 7 no sistema carregado.
- Os modos 1, 4, 5 são amortecidos até determinados valores no sistema descarregado, o mesmo acontecendo com os modos 1, 2, e 3 no sistema carregado.

#### - Sistema Descarregado

modo 1 : diminuem as partes real e imaginária do autovalor, até um valor próximo de  $C_s = 25.50\text{Ns/m}$  e  $\lambda = -9.87 \pm 4.51i$ , a partir daí começa a aumentar a parte imaginária.

modo 4 : diminuem as partes real e imaginária do autovalor até um valor próximo de  $C_s = 10000\text{Ns/m}$  e  $\lambda = -15.92 \pm 33.225i$ , a partir daí continua decrescendo a parte imaginária e crescendo a parte real, cuja parte imaginária fica praticamente fixa.

modo 5 : diminuem as partes real e imaginária do autovalor até um valor próximo de  $C_s = 15000\text{Ns/m}$  e  $\lambda = -32.14 \pm 26.92i$ , a partir daí continua decrescendo a parte imaginária e crescendo a parte real até um valor próximo de  $C_s = 16500\text{Ns/m}$  e  $\lambda = -29.04 \pm 12.425i$ , a partir daí crescem as partes imaginária e real.

#### - Sistema Carregado

Os modos 1, 2 e 3 apresentam praticamente as mesmas formas de curvas, mudando-se somente os valores. Ambas diminuem as partes reais e imaginárias dos autovalores até valores próximos de:

modo 1 :  $C_s = 30000\text{Ns/m}$  e  $\lambda = -8.383 \pm 3.75i$

modo 2 :  $C_s = 24000\text{Ns/m}$  e  $\lambda = -10.59 \pm 4.75i$

modo 3 :  $C_s = 23000\text{Ns/m}$  e  $\lambda = -11.65 \pm 4.35i$

A partir destes valores as partes reais dos autovalores continuam diminuindo e as partes imaginárias começam a aumentar até valores próximos de:

modo 1 :  $C_s = 31000\text{Ns/m}$  e  $\lambda = -9.77 \pm 5.97i$

modo 2 :  $C_s = 24750\text{Ns/m}$  e  $\lambda = -12.20 \pm 7.50i$

modo 3 :  $C_s = 23500\text{Ns/m}$  e  $\lambda = -13.62 \pm 7.53i$

Após atingirem estes valores as partes reais e imaginárias dos autovalores aumentam.

- O autovalor 1 apresenta praticamente o mesmo comportamento para ambos os sistemas. A amplitude máxima é dada por  $Z$  em ambos os sistemas. No sistema descarregado possuem altos valores de  $\Psi$  e  $Z_1 = Z_3$  e pequenos valores para  $Z_r$ ; todos aumentam pouco com o aumento das constantes de amortecimento dos amortecedores a não ser  $\Psi$  que permanece constante. No sistema carregado  $Z_1 = Z_3 = Z_r$  e  $\Psi$  que possui valores próximos de zero, aumentam com o aumento das constantes de amortecimento dos amortecedores.
- O autovalor 2 apresenta grande diferença de um sistema para o outro. As amplitude máxima é dada por  $\Phi$  em ambos os sistemas. Todas as demais variáveis crescem com o

aumento das constantes de amortecimento dos amortecedores, e este modo superamortece para valores próximos de  $C_r = 16570 \text{Ns/m}$  e  $\lambda = -18.75 \pm 0i$ . No sistema carregado as demais variáveis são maiores que no sistema descarregado e crescem bastante com o aumento das constantes de amortecimento.

- O autovalor 3 apresenta enorme diferença de um sistema para o outro. No sistema descarregado a amplitude máxima é dada por  $\Psi$ ,  $Z$  e  $Z_r$  possuem altas relações de amplitudes e para  $Z_1 = Z_3$  elas são pequenas. Este modo superamortece rapidamente para valores próximos de:  $C_r = 12950 \text{Ns/m}$  e  $\lambda = -19.0 \pm 0i$ . No sistema carregado a amplitude máxima no início é dada por  $\Psi$ ;  $Z_1 = Z_3$  e  $Z_r$  crescem rapidamente com o aumento das constantes de amortecimento dos amortecedores;  $Z$  possui baixas relações de amplitude.
- O autovalor 4 apresenta enorme diferença de um sistema para o outro. A amplitude máxima é dada por  $Z_r$  em ambos os sistemas. No sistema carregado  $Z_1 = Z_3$  e  $Z$  aumentam mais que  $\Psi$ , que tem valores pequenos, com o aumento das constantes de amortecimento dos amortecedores; a frequência se anula para:  $C_r = 25660 \text{Ns/m}$  e  $\lambda = -36.0 \pm 0i$ . No sistema descarregado  $Z_1 = Z_3$  são reduzidos,  $\Psi$  possui maior relação e cresce na mesma ordem de  $Z_1 = Z_3$  e  $Z_r$  até determinados valores, depois começam a decrescerem  $\Psi$  e  $Z$ .
- O autovalor 5 apresenta comportamento bem diferente de um sistema para o outro. No sistema descarregado, as amplitudes máximas no início são dadas por  $Z_1 = Z_3$  defasados de  $180^\circ$ ;  $\Phi_1$  possui alta relação de amplitude e  $\Phi$  cresce rapidamente com o aumento das constantes de amortecimento dos amortecedores. No sistema carregado  $\Phi_1$  possui praticamente os mesmos valores do sistema descarregado, embora  $\Phi$  cresça lentamente com o aumento das constantes de amortecimento dos amortecedores; este modo superamortece para valores próximos de  $C_r = 21055 \text{Ns/m}$  e  $\lambda = 44.0 \pm 0i$ .
- O autovalor 6 se comporta da mesma forma para os dois sistemas, as amplitudes máximas são dadas por  $Z_1 = Z_3$ ;  $Z$  possui maior relação de amplitude no sistema descarregado embora ocorra o inverso em relação a  $\Psi$  e  $Z_r$ . Todas as relações de amplitudes aumentam com o aumento das constantes de amortecimento dos amortecedores. As frequências se anulam para:  
 sistema descarregado :  $C_r = 21655 \text{Ns/m}$  e  $\lambda = -44.75 \pm 0i$   
 sistema carregado :  $C_r = 21390 \text{Ns/m}$  e  $\lambda = -42.5 \pm 0i$
- O autovalor 7 apresenta o mesmo comportamento, para ambos os sistemas. As amplitudes máximas são dadas por  $Z_1 = Z_3$  defasados de  $180^\circ$ ,  $\Phi_1$  possui alta relação de amplitude e próximo da fase de  $Z_1$  e  $\Phi$  possui baixos valores; ambas decrescem com o aumento das constantes de amortecimento dos amortecedores. Estes modos se superamortecem para ambos os sistemas em valores próximos de:  $C_r = 26305 \text{Ns/m}$  e  $\lambda = -53.75 \pm 0i$ .



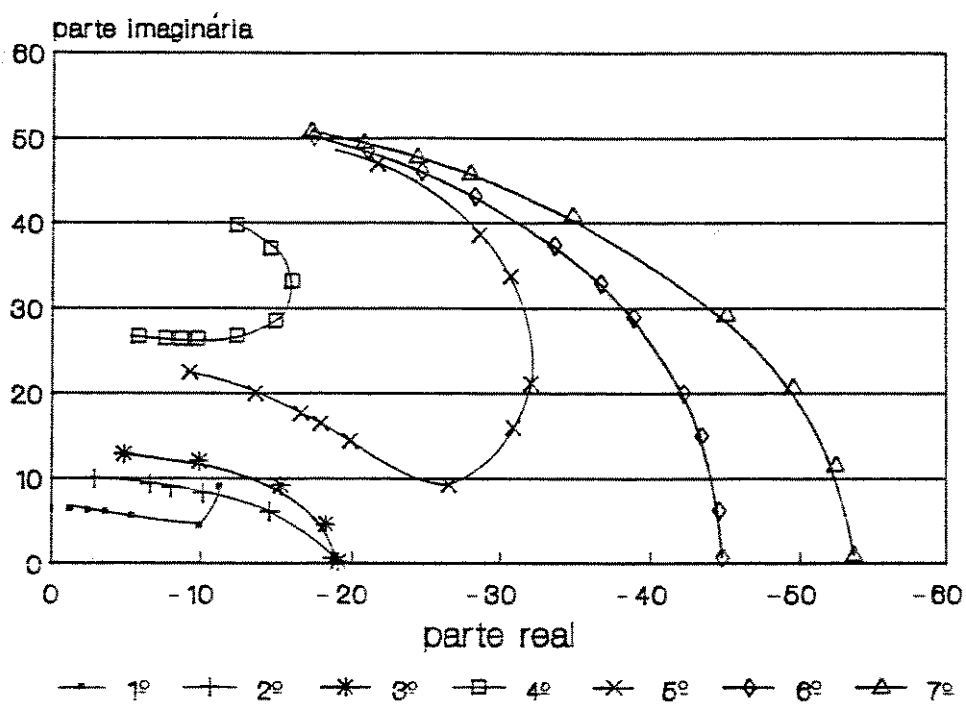


Figura 3.3: Variações dos autovalores devido variações das constantes de amortecimento dos amortecedores. (Veículo descarregado)

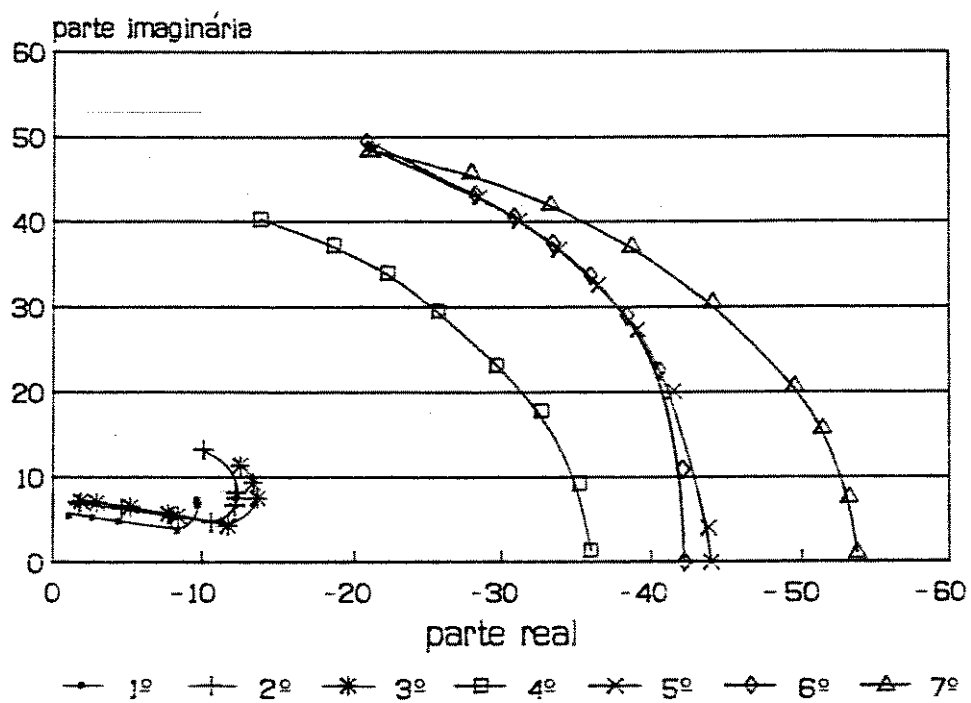


Figura 3.4: Variações dos autovalores devido variações das constantes de amortecimento dos amortecedores. (Veículo carregado)

$C_r [Ns/m]$	12000	16300	24000	27500
$\lambda$	$-2.39 \pm 6.35i$	$-3.47 \pm 6.16i$	$-7.00 \pm 5.115i$	$-11.18 \pm 9.13i$
$Z$	1.0 / 41.33"	1.0 / 166.4"	1.0 / 20.38"	1.0 / -174.69"
$Z_1 = Z_3$	0.172 / 81.45"	0.187 / -135.65"	0.280 / 87.49"	0.787 / -71.03"
$Z_r$	0.0055 / 81.85"	0.0059 / -135.08"	0.0088 / 88.344"	0.0246 / -68.74"
$\Psi$	0.3275 / -138.67"	0.327 / -13.6"	0.327 / 159.63"	0.328 / 5.345"
$\Phi = \Phi_1$	0	0	0	0

Tabela 3.15: Variação do primeiro modo de vibrar devido variações da constante de amortecimento dos amortecedores. (Veículo descarregado)

$C_r [Ns/m]$	12000	16300	16570
$\lambda$	$-6.5 \pm 9.35i$	$-14.51 \pm 6.14i$	$-18.63 \pm 0.62i$
$\Phi$	1.0 / 67.95"	1.0 / -64.55"	1.0 / -133.30"
$Z_1$	0.206 / -42.26"	0.374 / 115.45"	0.499 / -136.76"
$Z_3$	0.206 / 137.74"	0.374 / -64.55"	0.499 / 43.24"
$\Phi_1$	0.165 / 137.69"	0.299 / -64.65"	0.400 / 43.23"
$Z = Z_r = \Psi$	0	0	0

Tabela 3.16: Variação do segundo modo de vibrar devido variações da constante de amortecimento dos amortecedores. (Veículo descarregado)

$C_r [Ns/m]$	12000	12950
$\lambda$	$-15.24 \pm 9.18i$	$-18.95 \pm 0.20i$
$\Psi$	1.0 / 174.83"	1.0 / 90.27"
$Z$	0.655 / 174.68"	0.653 / 90.27"
$Z_1 = Z_3$	0.025 / 115.5"	0.028 / 89.10"
$Z_r$	0.787 / -60.22"	0.811 / -90.77"
$\Phi = \Phi_1$	0	0

Tabela 3.17: Variação do terceiro modo de vibrar devido variações da constante de amortecimento dos amortecedores. (Veículo descarregado)

$C_s [Ns/m]$	8000	10000	16300	27500
$\lambda$	$-14.53 \pm 37.07i$	$-15.92 \pm 33.22i$	$-9.362 \pm 28.54i$	$-5.72 \pm 26.744i$
$Z_r$	1.0 / -56.42"	1.0 / 164.21"	1.0 / -61.41"	1.0 / 96.43"
$Z$	0.086 / -165.2"	0.120 / 62.43"	0.198 / -117.44"	0.191 / 66.21"
$Z_1 = Z_3$	0.011 / 85.91"	0.016 / -40.93"	0.024 / 122.52"	0.029 / -74.42"
$\Psi$	0.128 / -165.2"	0.180 / 62.46"	0.30 / -116.87"	0.291 / 66.85"
$\Phi = \Phi_1$	0	0	0	0

Tabela 3.18: Variação do quarto modo de vibrar devido variações da constante de amortecimento dos amortecedores. (Veículo descarregado)

$C_s [Ns/m]$	12000	15000	16750	18000
$\lambda$	$-28.53 \pm 38.65i$	$-32.14 \pm 26.92i$	$-21.794 \pm 12.25i$	$-16.50 \pm 17.69i$
$Z_1$	1.0 / -119.15"	1.0 / -176.36"	1.0 / 177.07"	1.0 / 85.76"
$Z_3$	1.0 / 60.85"	1.0 / 3.64"	1.0 / 2.93"	1.0 / -94.243"
$\Phi$	0.259 / -63.048"	0.420 / -127.12"	1.097 / -132.82"	1.036 / 85.76"
$\Phi_1$	0.788 / 57.20"	0.802 / 1.99"	0.729 / -3.29"	0.797 / -94.53"
$Z = Z_r = \Psi$	0	0	0	0

Tabela 3.19: Variação do quinto modo de vibrar devido variações da constante de amortecimento dos amortecedores. (Veículo descarregado)

$C_s [Ns/m]$	12000	16300	18000	21650
$\lambda$	$-28.23 \pm 43.19i$	$-35.88 \pm 34.20i$	$-38.82 \pm 28.95i$	$-44.79 \pm 0.745i$
$Z_1 = Z_3$	1.0 / -39.17"	1.0 / 46.686"	1.0 / 16.028"	1.0 / -156.06"
$Z$	0.088 / -166.86"	0.132 / -90.136"	0.153 / -126.58"	0.218 / 24.98"
$Z_r$	0.0137 / -72.636"	0.022 / 23.58"	0.027 / -2.567"	0.033 / -156.48"
$\Psi$	0.032 / 17.9"	0.045 / 95.258"	0.050 / 58.50"	0.127 / -25.14"
$\Phi = \Phi_1$	0	0	0	0

Tabela 3.20: Variação do sexto modo de vibrar devido variações da constante de amortecimento dos amortecedores. (Veículo descarregado)

$C_s [Ns/m]$	12000	16300	18000	26300
$\lambda$	$-27.93 \pm 45.845i$	$-35.664 \pm 40.119i$	$-38.725 \pm 37.17i$	$-53.67 \pm 1.01i$
$Z_1$	1.0 / $-81.84''$	1.0 / $-44.6''$	1.0 / $-78.44''$	1.0 / $38.57''$
$Z_c$	1.0 / $98.16''$	1.0 / $135.39''$	1.0 / $101.56''$	1.0 / $-141.433''$
$\Phi$	0.0076 / $-130.19''$	0.0065 / $-86.57''$	0.0057 / $-116.95''$	0.004 / $37.77''$
$\Phi_1$	0.830 / $-77.59''$	0.807 / $-42.36''$	0.803 / $-76.65''$	0.794 / $38.78''$
$Z = Z_r = \Psi$	0	0	0	0

Tabela 3.21: Variação do sétimo modo de vibrar devido variações da constante de amortecimento dos amortecedores. (Veículo descarregado)

$C_s [Ns/m]$	8000	15000	25000	31000
$\lambda$	$-1.70 \pm 5.45i$	$-2.18 \pm 5.38i$	$-4.44 \pm 4.85i$	$-9.77 \pm 5.97i$
$Z$	1.0 / $-61.78''$	1.0 / $30.86''$	1.0 / $-177.94''$	1.0 / $172.47''$
$Z_1 = Z_c$	0.133 / $-28.32''$	0.138 / $73.96''$	0.178 / $-93.39''$	0.543 / $-68.92''$
$Z_r$	0.134 / $-28.03''$	0.139 / $74.33''$	0.178 / $-92.83''$	0.529 / $-68.53''$
$\Psi$	0.0006 / $5.43''$	0.0007 / $117.43''$	0.0011 / $-8.28''$	0.0098 / $50.07''$
$\Phi = \Phi_1$	0	0	0	0

Tabela 3.22: Variação do primeiro modo de vibrar devido variações da constante de amortecimento dos amortecedores. (Veículo carregado)

$C_s [Ns/m]$	12000	15000	25000
$\lambda$	$-2.73 \pm 6.72i$	$-3.57 \pm 6.57i$	$-12.19 \pm 8.17i$
$\Phi$	1.0 / $131.95''$	1.0 / $-139.06''$	1.0 / $-10.80''$
$Z_1$	0.174 / $-5.036''$	0.185 / $97.26''$	0.71 / $-76.14''$
$Z_c$	0.174 / $174.96''$	0.185 / $-82.74''$	0.71 / $103.86''$
$\Phi_1$	0.139 / $174.95''$	0.148 / $-82.75''$	0.569 / $103.74''$
$Z = Z_r = \Psi$	0	0	0

Tabela 3.23: Variação do segundo modo de vibrar devido variações da constante de amortecimento dos amortecedores. (Veículo carregado)

$C_r [Ns/m]$	12000	15000	23000	25000
$\lambda$	$-3.0 \pm 7.02i$	$-3.97 \pm 6.83i$	$-11.65 \pm 4.35i$	$-12.50 \pm 11.38i$
$\Psi$	1.0 / $-152.95''$	1.0 / $-164.94''$	1.0 / $-79.1''$	1.0 / $91.85''$
$Z$	0.0024 / $-152.95''$	0.0025 / $135.04''$	0.0153 / $22.34''$	0.056 / $112.89''$
$Z_1 = Z_3$	0.262 / $72.47''$	0.280 / $74.833''$	0.683 / $-119.79''$	1.241 / $9.46''$
$Z_r$	0.263 / $-107.26''$	0.282 / $-164.94''$	0.661 / $63.03''$	1.356 / $-164.71''$
$\Phi = \Phi_1$	0	0	0	0

Tabela 3.24: Variação do terceiro modo de vibrar devido variações da constante de amortecimento dos amortecedores. (Veículo carregado)

$C_r [Ns/m]$	12000	15000	25000	25655
$\lambda$	$-18.59 \pm 37.28i$	$-22.15 \pm 34.04i$	$-35.29 \pm 9.29i$	$-36.02 \pm 1.41i$
$Z_r$	1.0 / $45.95''$	1.0 / $-11.03''$	1.0 / $-119.15''$	1.0 / $-64.14''$
$Z$	0.049 / $-73.44''$	0.063 / $-130.45''$	0.206 / $85.282''$	0.221 / $119.54''$
$Z_1 = Z_3$	0.070 / $163.62''$	0.121 / $101.95''$	0.522 / $-95.88''$	0.522 / $-60.83''$
$\Psi$	0.049 / $-76.99''$	0.067 / $-11.10''$	0.087 / $59.68''$	0.082 / $115.48''$
$\Phi = \Phi_1$	0	0	0	0

Tabela 3.25: Variação do quarto modo de vibrar devido variações da constante de amortecimento dos amortecedores. (Veículo carregado)

$C_r [Ns/m]$	12000	15000	21050
$\lambda$	$-28.50 \pm 42.96i$	$-33.90 \pm 36.77i$	$-43.91 \pm 1.59i$
$Z_1$	1.0 / $-94.96''$	1.0 / $-136.73''$	1.0 / $-45.84''$
$Z_3$	1.0 / $85.04''$	1.0 / $43.27''$	1.0 / $134.16''$
$\Phi$	0.100 / $-46.28''$	0.136 / $-92.031''$	0.251 / $-43.53''$
$\Phi_1$	0.783 / $75.215''$	0.802 / $37.39''$	0.829 / $134.01''$
$Z = Z_r = \Psi$	0	0	0

Tabela 3.26: Variação do quinto modo de vibrar devido variações da constante de amortecimento dos amortecedores. (Veículo carregado)

$C_s [Ns/m]$	12000	15000	21390
$\lambda$	$-28.43 \pm 43.25i$	$-33.46 \pm 37.51i$	$-42.39 \pm 1.70i$
$Z_1 = Z_3$	$1.0 / -142.52''$	$1.0 / 158.46''$	$1.0 / -86.69''$
$Z$	$0.040 / 86.99''$	$0.053 / 20.19''$	$0.069 / 94.12''$
$Z_r$	$0.044 / 144.02''$	$0.077 / 73.94''$	$0.258 / 97.83''$
$\Psi$	$0.038 / -85.48''$	$0.050 / -147.79''$	$0.126 / -82.99''$
$\Phi = \Phi_1$	0	0	0

Tabela 3.27: Variação do sexto modo de vibrar devido variações da constante de amortecimento dos amortecedores. (Veículo carregado)

$C_s [Ns/m]$	8000	15000	25000	26300
$\lambda$	$-27.93 \pm 45.833i$	$-33.33 \pm 42.07i$	$-51.32 \pm 15.71i$	$-53.66 \pm 1.14i$
$Z_1$	$1.0 / -97.22''$	$1.0 / 137.62''$	$1.0 / 76.17''$	$1.0 / -89.55''$
$Z_3$	$1.0 / 82.78''$	$1.0 / -42.38''$	$1.0 / -103.83''$	$1.0 / 90.45''$
$\Phi$	$0.009 / -142.68''$	$0.0074 / 95.31''$	$0.0044 / 61.1''$	$0.0043 / -90.63''$
$\Phi_1$	$0.844 / -86.91''$	$0.812 / 144.24''$	$0.777 / 77.37''$	$0.774 / -89.47''$
$Z = Z_r = \Psi$	0	0	0	0

Tabela 3.28: Variação do sétimo modo de vibrar devido variações da constante de amortecimento dos amortecedores. (Veículo carregado)

## Capítulo 4

# Comportamento excitado do veículo com elementos passivos de suspensão

### 4.1 Resolução

Para encontrar a resposta do veículo sujeito a excitações devido irregularidades do solo (via), desenvolveu-se o programa computacional Kênia, que utiliza as subrotinas DE (apêndice [C]), como integrador das equações no tempo; Força que calcula as forças devido as irregularidades da via e, F que descreve as equações do movimento.

### 4.2 Resultados e Discussões

As análises do comportamento excitado do veículo devido às irregularidades da via, foram feitas utilizando-se modelamentos das irregularidades por funções trigonométricas, no caso, perfis senoidais. Analisa-se desta forma, o comportamento do veículo para as duas condições de carga, ou seja, carregado e descarregado e; para diferentes velocidades e períodos de excitação das irregularidades da via.

A primeira situação desenvolvida foi para o veículo passando por uma via com as seguintes especificações das irregularidades:

- $L_1 = L_2 = 1.85m$
- $A_1 = A_2 = 0.05m$

Os resultados para esta situação específica são mostrados pelas figuras 4.2 a 4.6.

O intervalo de tempo adotado, e mostrado nas figuras, foi de:



$$t = \frac{1}{16} T = \frac{1}{16} \frac{L}{V} \quad (4.1)$$

Para melhor avaliação dos resultados, fez-se uma mudança de escala como pode se notar através das figuras 4.1 e 4.2, ou seja, fez-se uma sobreposição das curvas. As curvas das figuras não são mais plotadas em relação ao tempo como mostra a figura 4.1, mas em relação ao número de intervalos de tempo como mostrado na figura 4.2 e nas demais figuras.

As forças mostradas na figura 4.2, são as forças externas agindo nas rodas quando o veículo passa por uma irregularidade da via, e elas são dadas por:

$$F_1 = C_r \dot{E}_1 + K_r E_1 \quad (4.2)$$

$$F_2 = C_r \dot{E}_3 + K_r E_3 \quad (4.3)$$

$$F_3 = C_r (\dot{E}_2 + \dot{E}_4) + K_r (E_2 + E_4) \quad (4.4)$$

onde:

- $F_1$  força agindo na roda 1
- $F_2$  força agindo na roda 3
- $F_3$  força agindo nas rodas traseiras

No nosso caso particular onde adotamos as irregularidades do lado esquerdo e direito da via iguais, temos que:

$$F_1 = F_2 \quad (4.5)$$

Pela figura 4.2 existem pequenas variações das forças devido ao aumento das velocidades, isto é devido ao fato das rodas possuírem constantes de amortecimento baixas.

Os deslocamentos do centro de gravidade do corpo principal do veículo, atingem seus picos quando as frequências de excitações estão próximas da frequência amortecida do primeiro modo de vibrar, ou seja:

- sistema descarregado :  $\Omega = 6.35 \text{ rad/s}$  que corresponde a velocidade do veículo de  $V = 6.74 \text{ Km/h}$
- sistema carregado :  $\Omega = 5.45 \text{ rad/s}$  que corresponde a velocidade do veículo de  $V = 5.78 \text{ Km/h}$ .

O deslocamento parte de um valor nulo para  $V = 0 \text{ Km/h}$  (não mostrado) , atinge seu valor máximo onde a frequência de excitação é igual à frequência amortecida do primeiro modo de vibrar e depois diminui com o aumento da velocidade do veículo (figuras 4.3 e 4.4).

As curvas apresentam partes iniciais distintas, devido ao fato que neste período de tempo estarem apenas as rodas dianteira excitadas, e estabilizam-se quando ambas as rodas dianteiras e traseiras estão excitadas.

O deslocamento é um pouco maior para o sistema carregado.

As acelerações, figuras 4.5 e 4.6, aumentam com o aumento das velocidades do veículo. Atingem seus valores máximos para velocidades do veículo em torno de  $V = 60 \text{ Km/h}$  e depois decrescem. Notam-se grandes diferenças nos valores de um sistema para o outro, ou seja, no sistema descarregado o valor máximo é em torno de  $20 \text{ m/s}^2$  e no sistema carregado em torno de  $9 \text{ m/s}^2$ .

Variando-se o período de excitação das irregularidades, ou seja:

- $L_1 = L_2 = 3.7 \text{ m}$
- $A_1 = A_2 = 0.05 \text{ m}$

Os resultados para esta situação específica são mostrados pelas figuras 4.7 a 4.11.

As forças devido às irregularidades da via, figura 4.7, não apresentam grandes divergências em relação à situação anterior, a não ser pelo período de excitação das mesmas.

Os picos de deslocamentos (figuras 4.8 e 4.9) possuem valores próximos aos valores da situação anterior, mas para novos valores de velocidades do veículo, ou seja:

- sistema descarregado :  $\Omega = 6.35 \text{ rad/s}$  e  $V = 13.5 \text{ Km/h}$
- sistema carregado :  $\Omega = 5.45 \text{ rad/s}$  e  $V = 11.55 \text{ Km/h}$

Com relação às acelerações, os picos atingem valores próximos aos valores da situação anterior. Nota-se porém que na faixa de velocidades em estudo, os picos das acelerações continuam crescendo, ou seja, os picos são atingidos para velocidades do veículo próximas de  $90 \text{ Km/h}$  (figuras 4.10 e 4.11).

Pode se estabelecer através destes resultados condições operacionais do veículo que melhor se adaptem ao tipo de carga e tipo de irregularidades das vias, ou seja, estabelecer níveis de acelerações e deslocamentos permissíveis.

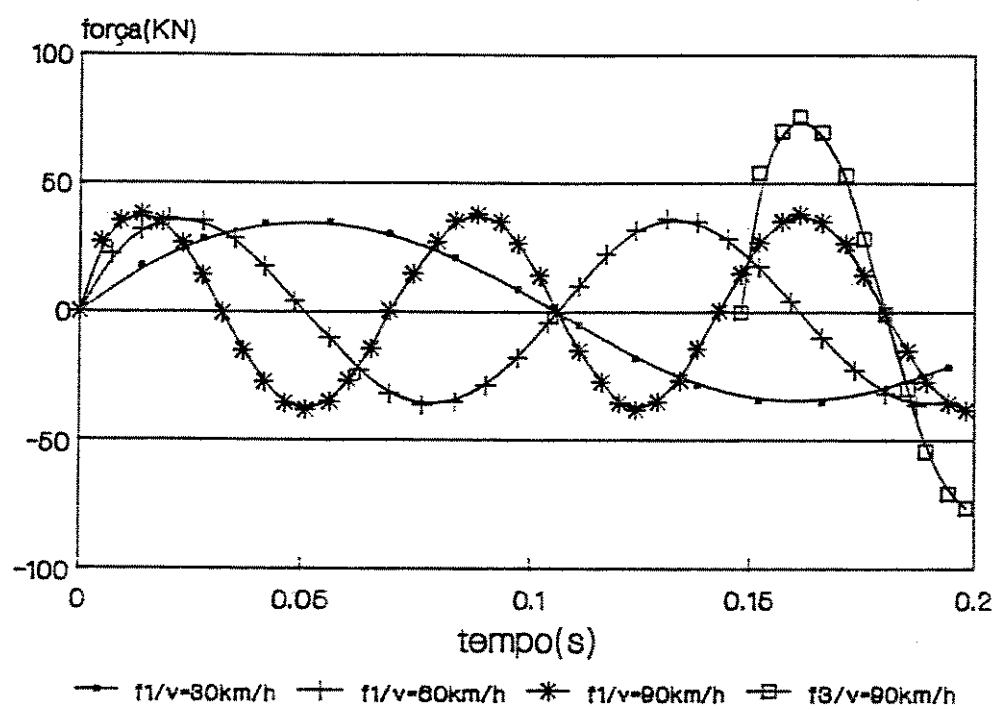


Figura 4.1: Variações das forças devido às irregularidades da via

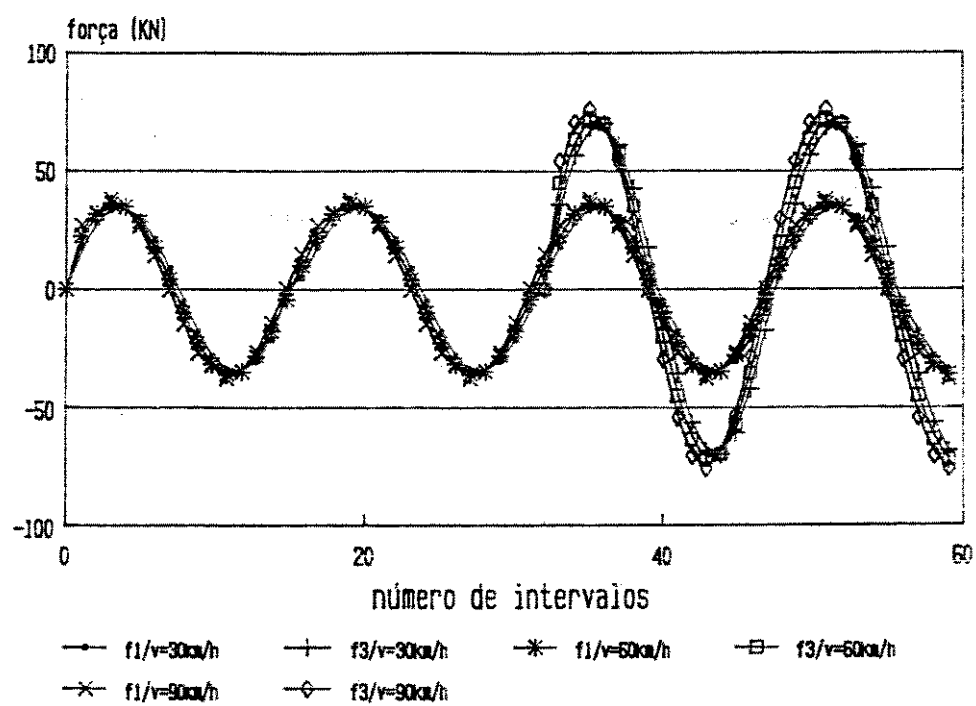


Figura 4.2: Variações das forças devido às irregularidades da via

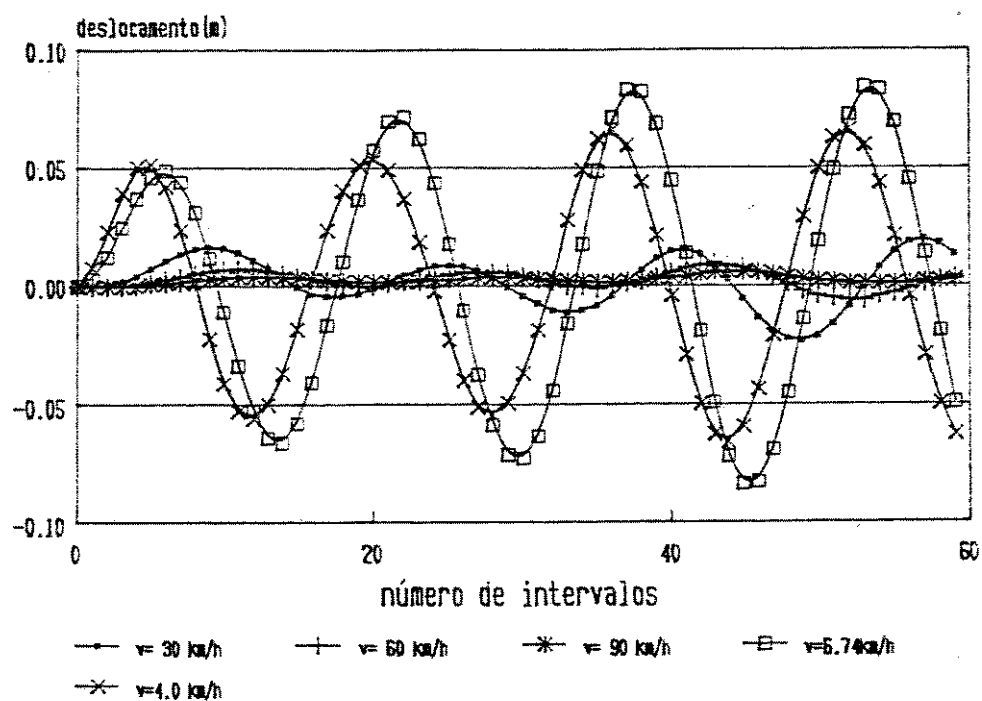


Figura 4.3: Variações dos deslocamentos do corpo principal do veículo para diferentes velocidades. (Veículo descarregado)

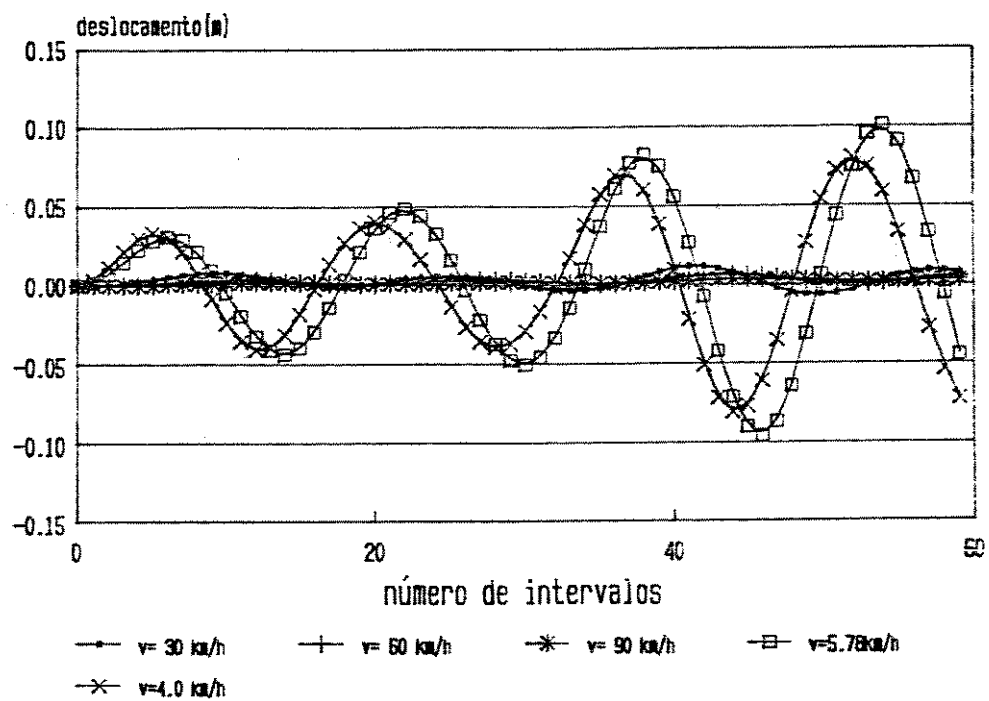


Figura 4.4: Variações dos deslocamentos do corpo principal do veículo para diferentes velocidades. (Veículo carregado)

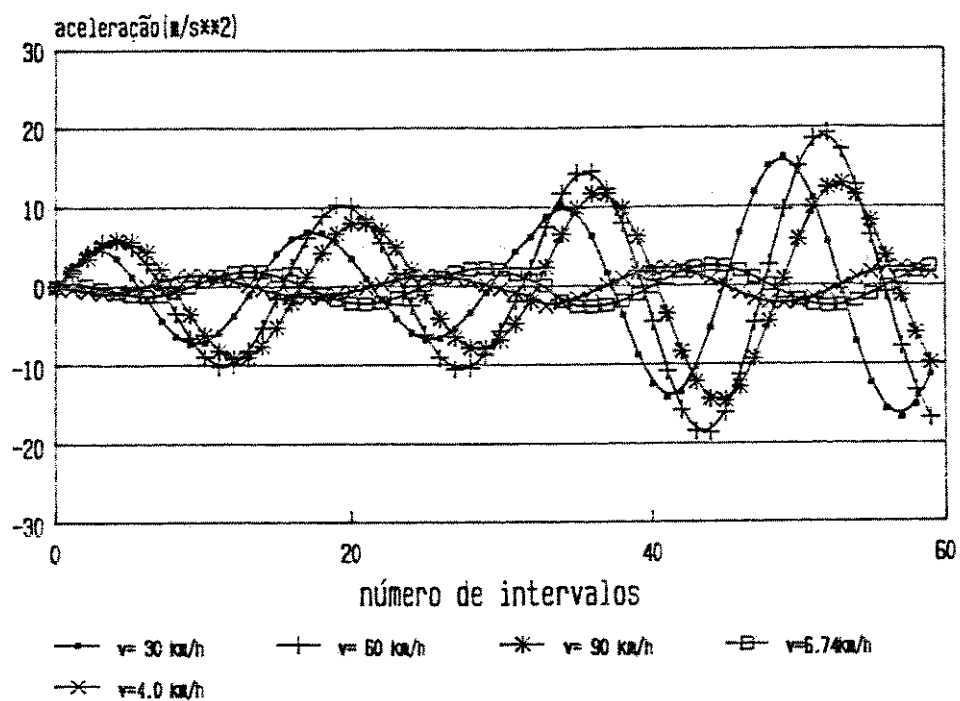


Figura 4.5: Variações das acelerações do corpo principal do veículo para diferentes velocidades. (Veículo descarregado)

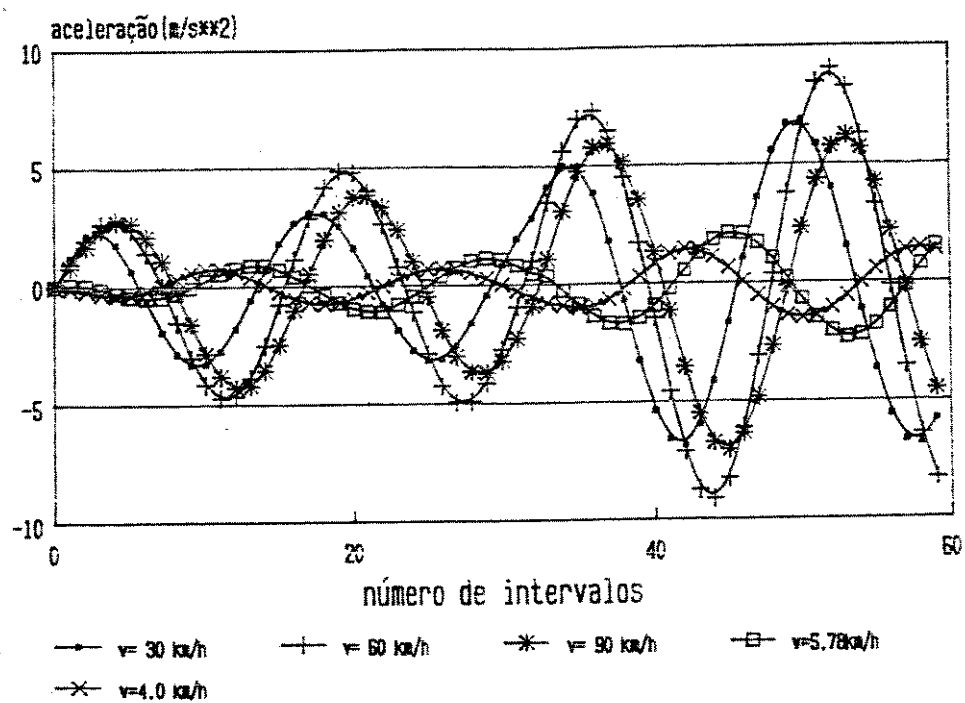


Figura 4.6: Variações das acelerações do corpo principal do veículo para diferentes velocidades. (Veículo carregado)



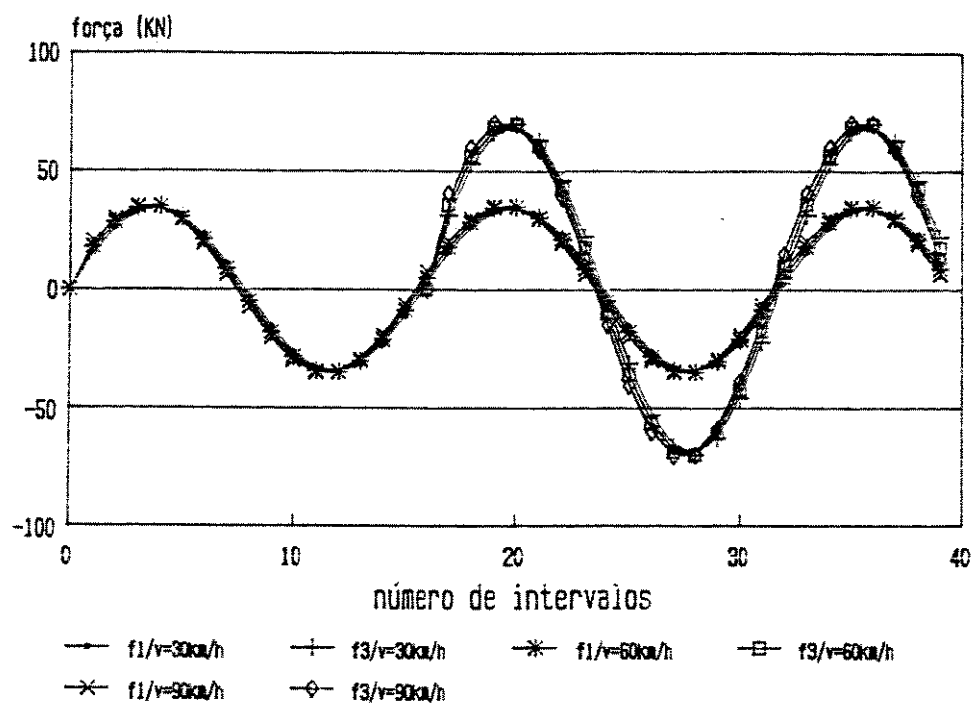


Figura 4.7: Variações das forças devido às irregularidades da via

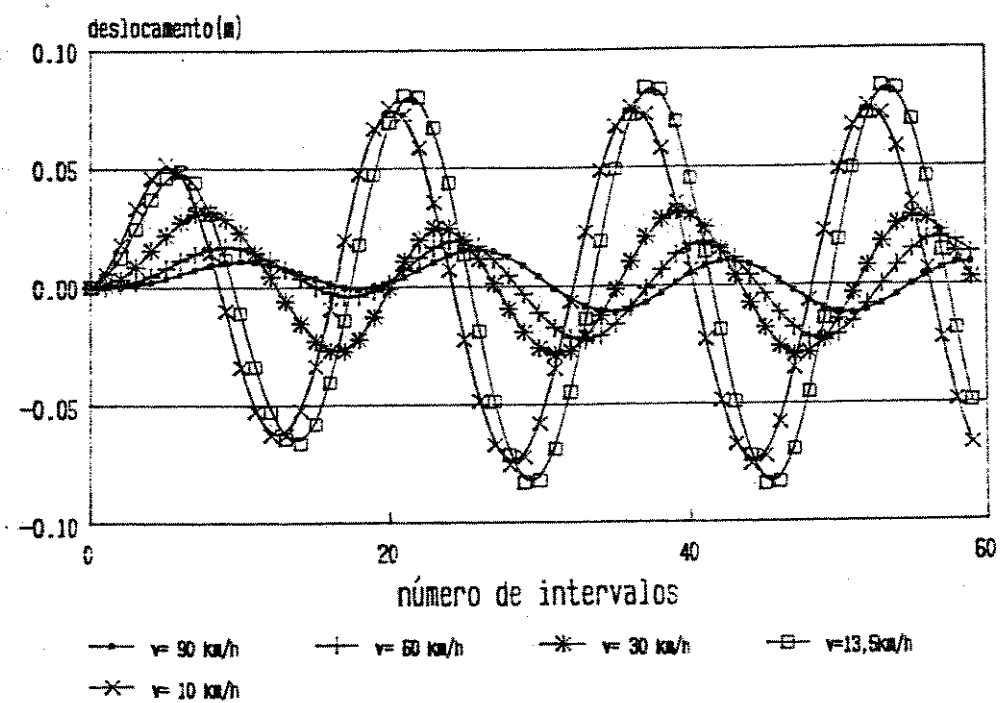


Figura 4.8: Variações dos deslocamentos do corpo principal do veículo para diferentes velocidades. (Veículo descarregado)

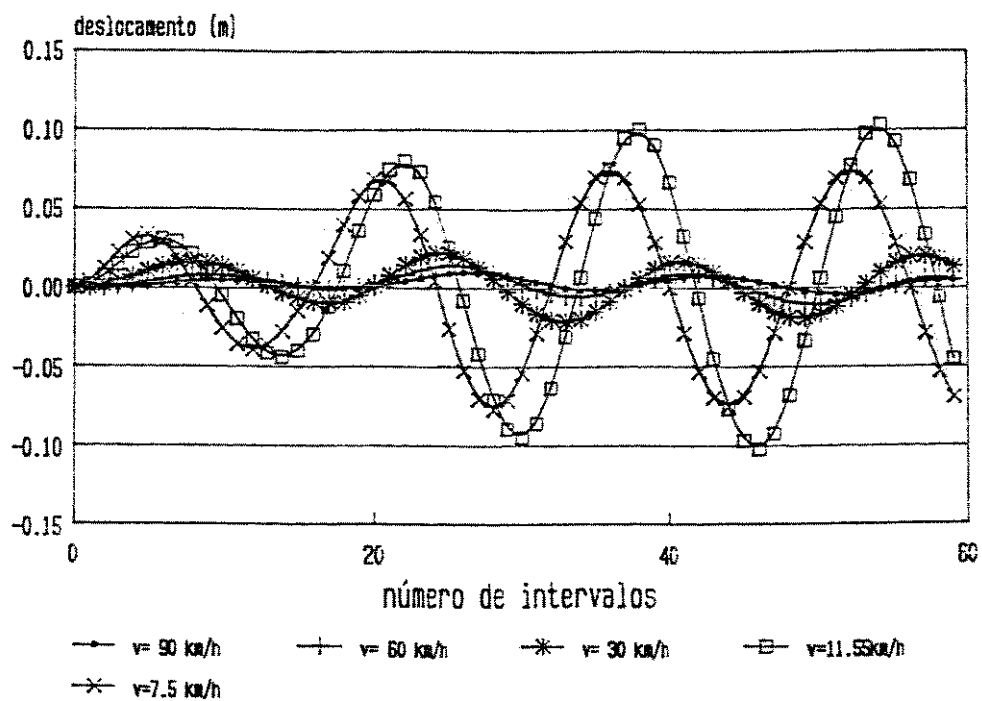


Figura 4.9: Variações dos deslocamentos do corpo principal do veículo para diferentes velocidades. (Veículo carregado)

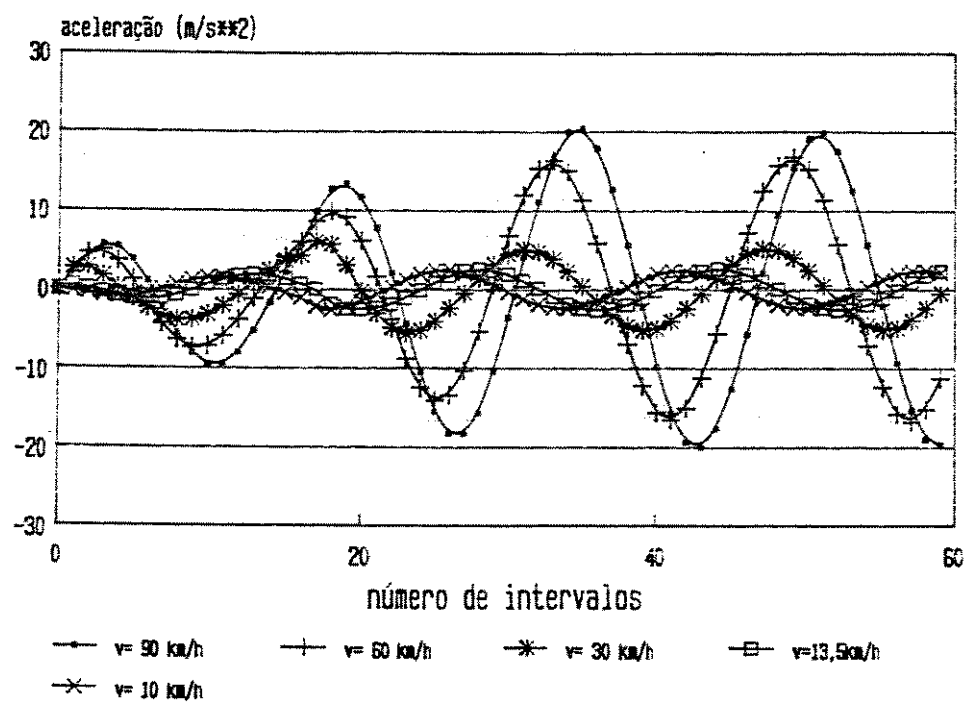


Figura 4.10: Variações das acelerações do corpo principal do veículo para diferentes velocidades. (Veículo descarregado)

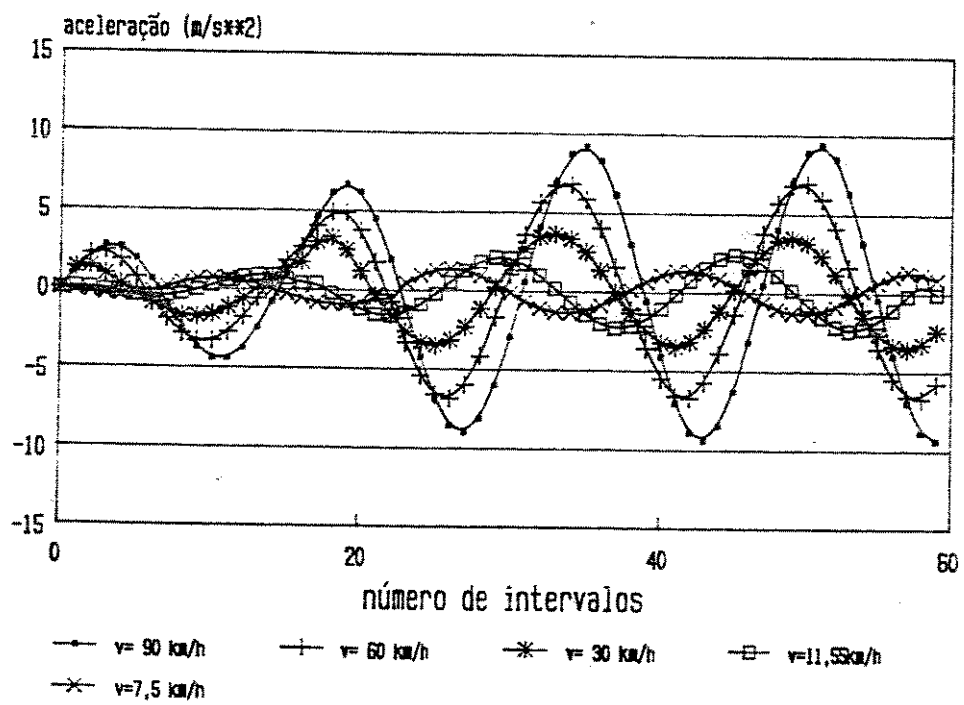


Figura 4.11: Variações das acelerações do corpo principal do veículo para diferentes velocidades. (Veículo carregado)

## Capítulo 5

# Modelamento do sistema semi-ativo de suspensões a gás

### 5.1 Suspensão a gás semi-ativa - Descrição

O sistema é mostrado esquematicamente pela figura 5.1 para um modelo de veículo contendo apenas uma roda.

O sistema básico de suspensão é um arranjo de uma mola a gás sobre óleo, a qual é conectada para o braço da suspensão através de uma estrutura hidráulica. Fluxo para dentro ou para fora do circuito hidráulico é controlado por uma válvula, cujas mudanças são controladas por um sistema pêndulo/massa, mola e amortecedor. A mola e o amortecedor deste novo sistema são conectados ao braço da suspensão.

Sobre condições estáticas, pode ser visto que o sistema irá sempre nivelar automaticamente para a altura, a qual é controlada por um braço do pêndulo.

Sobre condições dinâmicas, a resposta é ligeiramente mais complexa. Para entradas surgindo de irregularidades do solo é possível fazer a suspensão comportar-se como um sistema puramente passivo, se as características de resposta do pêndulo são igualadas à da suspensão principal. Desta forma o movimento do pêndulo e do seu pivot são similares, tanto que nenhum movimento de líquido ocorre na válvula.

Contudo para entradas da suspensão surgindo devido forças de aceleração, frenagens ou curvas no corpo, um sinal "erro" é gerado porque o pivot do pêndulo (ligado ao corpo do veículo) moverá relativamente para o pêndulo. Este sinal "erro" controlará o fluxo de óleo hidráulico para manter o nível do veículo sobre estas condições.

Ao lado das óbvias vantagens de manter o nível do veículo, igualmente sobre condições dinâmicas, o sistema potencialmente oferece aperfeiçoamento no conforto da viagem porque o projetista é capaz de selecionar razões efetivas menores de molas do que poderia ser o caso de um sistema puramente passivo.

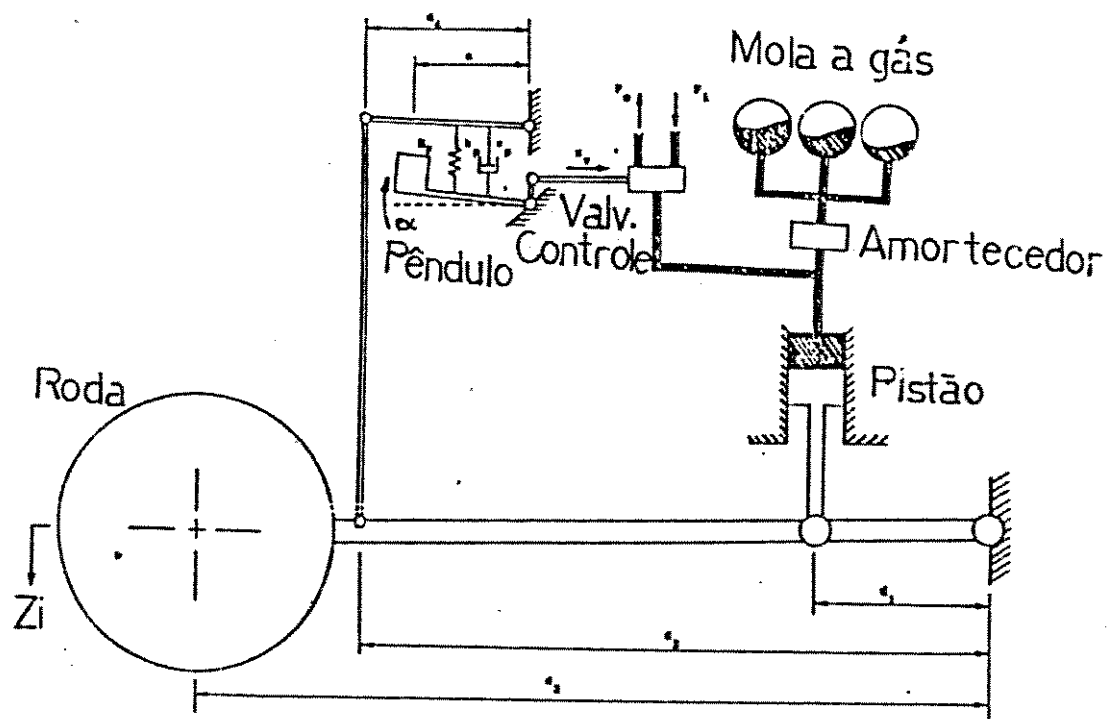


Figura 5.1: Diagrama esquemático de um veículo contendo apenas uma roda com uma semi-ativa suspensão a gás.

## 5.2 Modelamento de um veículo com suspensões passivas a gás

Utilizando-se do modelo descrito na figura 5.1, vamos ajustá-lo à um veículo de quatro rodas. Adota-se um modelo de veículo contendo dois conjuntos dianteiros independentes de suspensões a gás e dois conjuntos traseiros de suspensões a gás dependentes e controlados por um único pêndulo.

Para um sistema passivo de suspensões a gás, a forças nas suspensões depende da pressões nos braços,  $P_{si}$ , na forma:

$$F_{si} = A_i e_{si} (P_{si} - P_{sni}), i = 1, 4 \quad (5.1)$$

onde:

- \*  $A_i$  : área dos pistões
- \*  $e_{si}$  : representa as razão de deslocamento da estrutura para o deslocamento da roda

$$e_{si} = \frac{d_{1i}}{d_{3i}} \quad (5.2)$$

- \*  $P_{sni}$  : pressão requerida no braço para suportar a carga estática

$$P_{sni} = \frac{M_{ci} g}{A_i e_{si}} \quad (5.3)$$

onde:

- \*  $M_{ci}$  : razão de massa suportada por cada pistão
- \*  $g$  : aceleração da gravidade ( $9.8m/s^2$ )

As pressões dos braços são determinadas pelas pressões das molas a gás,  $P_{gi}$ , e as quedas de pressões,  $\delta P_{di}$ , através dos amortecedores das suspensões, nas formas:

$$\delta P_{di} = P_{si} - P_{gi} \quad (5.4)$$

### Mola à gás

O volumes de fluidos hidráulicos deslocados para dentro da molas a gás, relativos aos valores estáticos serão :

$$V_i = A_i e_{si} (Z_{ci} - Z_{ri}) \quad (5.5)$$

onde:

- \*  $Z_{ci} - Z_{ri}$  : deslocamentos das suspensões
- A pressão dos gases e  $V_i$  são relacionados através dos parâmetros da molas (pressões de carga  $P_{ci}$  e volumes de carga  $V_{ci}$ ) e a lei adiabática dos gases:

$$P_{gi} V_{gi}^{\gamma_i} = \text{constant} \quad (5.6)$$

com

$$V_i = V_{gni} - V_{gi} \quad (5.7)$$

onde



\*  $V_{gi}$  : denota os volumes instantâneos de gás nas molas

\*  $V_{g,0}$  : volume estático de gases nas molas

Os coeficientes instantâneos de rigidez das suspensões,  $K_{si}$  adquirem as seguintes formas:

$$K_{si} = (A_i e_{si})^2 \frac{dP_{gi}}{dV_i} \quad (5.8)$$

cujos valores estáticos,  $K_{s,0i}$ , são obtidos para  $V=0$ , dados por:

$$K_{s,0i} = (A_i e_{si})^2 \gamma_i \frac{P_{s,0i}}{V_{g,0i}} \quad (5.9)$$

#### Amortecedor

Os amortecimentos característicos são as relações entre as variações de pressões  $\delta P_{di}$  e as razões de fluxos,  $Q_{di}$ , através deles. Os elementos amortecedores são usualmente construídos para darem relações lineares, pelo menos para pequenos valores de  $Q_{di}$ , tanto que:

$$\delta P_{di} = C_{di} Q_{di} \quad (5.10)$$

onde: item  $C_{di} = \text{constante}$

e,

$$Q_{di} = A_i e_{si} (\dot{Z}_{ri} - \dot{Z}_{ri}) \quad (5.11)$$

Os coeficientes de amortecimentos,  $C_{si}$ , são dados por:

$$C_{si} = (A_i e_{si})^2 \frac{d\delta P_{di}}{dQ_{di}} \quad (5.12)$$

e no caso estático, seus valores são:

$$C_{s,0i} = (A_i e_{si})^2 C_{di} \quad (5.13)$$

As forças nas suspensões serão:

$$F_{s1} = A_f e_{sf} (P_{s1} - P_{s,01}) \quad (5.14)$$

$$F_{s2} = A_r e_{sr} (P_{s2} - P_{s,02}) \quad (5.15)$$

$$F_{s1} = A_f e_{sf} (P_{s3} - P_{s,03}) \quad (5.16)$$

$$F_{s2} = A_r e_{sr} (P_{s4} - P_{s,04}) \quad (5.17)$$

onde :

-  $P_{si}$  são encontradas através da equação 5.4

-  $P_{s,0i}$  são encontradas através da equação 5.3

### 5.3 Análise de uma suspensão a gás semi-ativa

A inclusão de um componente ativo requer a introdução de uma variável independente, o movimento angular  $\alpha$ , do pêndulo de controle relativo ao corpo do veículo. A equação do movimento angular sobre seu pivot para um modelo de uma única roda como mostrado na figura 5.1 é:

$$I_p \ddot{\alpha} - a M_p \ddot{Z}_p = -K_p (\alpha - e_p (Z_c - Z_r)) - C_p (\dot{\alpha} - e_p (\dot{Z}_c - \dot{Z}_r)) \quad (5.18)$$

onde:

- $e_p$  : representa a razão de deslocamento angular do braço de entrada do pêndulo para o deslocamento da roda.

$$e_p = \frac{d_2}{d_3 d_4} \quad (5.19)$$

- $[\alpha - e_p (Z_c - Z_r)]$  representa o deslocamento angular relativo entre o braço do pêndulo e o braço de entrada.

Desde que o movimento deve ser definido para um sistema de coordenada inercial, o termo  $\ddot{Z}_p$  é requerido para compensar a aceleração vertical do pêndulo.

Os coeficientes de rigidez e amortecimento do pêndulo,  $K_p$  e  $C_p$ , devem ser igualados para aqueles da suspensão principal,  $K_s$  e  $C_s$ , tanto que as entradas do solo provocam um movimento angular mínimo do pêndulo. Desde que ambos  $K_s$  e  $C_s$  devem ser variados, uma igualdade exata é impossível, mas um bom compromisso é permitido escolhendo os valores estáticos  $K_{s0}$  e  $C_{s0}$ .

No caso estático e linearizado, com  $\alpha = 0$ , temos:

$$M_c \ddot{Z}_c = -K_{s0} (Z_c - Z_r) - C_{s0} (\dot{Z}_c - \dot{Z}_r) \quad (5.20)$$

e

$$-a M_p \ddot{Z}_p = K_p e_p (Z_c - Z_r) + C_p e_p (\dot{Z}_c - \dot{Z}_r) \quad (5.21)$$

Igualando as equações 5.20 e 5.21, temos:

$$K_p = \frac{M_p}{M_c} \frac{a}{e_p} K_{s0} \quad (5.22)$$

$$C_p = \frac{M_p}{M_c} \frac{a}{e_p} C_{s0} \quad (5.23)$$

O pêndulo responde para forças inerciais, como as forças surgindo de frenagens, e as curvas do veículo. Com isto o ângulo resultante  $\alpha$  causa um deslocamento  $x_v$ , da válvula de controle, e consequentemente uma razão de fluxo,  $Q_v$ , de fluido hidráulico para dentro ou para fora da estrutura.

A dependência de  $Q_v$  em  $x_v$  (ou equivalente  $\alpha$ ) e na diferença de pressão através da válvula pode ser aproximada como:

$$Q_a = \begin{cases} C_a(\alpha - \alpha_0)(P_1 - P_s)^{\frac{1}{2}}, \alpha > \alpha_0 \\ C_a(\alpha + \alpha_0)(P_s - P_1)^{\frac{1}{2}}, \alpha < -\alpha_0 \\ 0, (\alpha^2)^{\frac{1}{2}} < \alpha_0 \end{cases} \quad (5.24)$$

onde:

- $\alpha_0$  : deslocamento inicial do pêndulo devido a um deslocamento  $x_{p,0}$  da válvula
- $P_1$  e  $P_s$  : são as pressões providas e drenadas respectivamente da válvula.

A constante  $C_a$  inclui um fator de ligação (conexão) de  $\alpha$  para  $x_p$ .

O volume de fluido ativo,  $V_a$  entrando na estrutura é a integral no tempo de  $Q_a$ . O volume total de fluido entrando na estrutura torna-se:

$$V = Ae_s(Z_c - Z_r) + V_a \quad (5.25)$$

e a razão total de fluxo através do amortecedor da suspensão torna-se:

$$Q_d = Ae_s(\dot{Z}_c - \dot{Z}_r) + Q_a \quad (5.26)$$

Estes desenvolvimentos anteriores foram feitos para um pêndulo isolado, visto que os demais terão equações semelhantes.

Assume-se que todos os pêndulos são idênticos na forma e que o veículo possua dois dianteiros para controle do rolamento e um traseiro para controle da inclinação.

Os dois pêndulos dianteiros tem a mesma razão  $e_{p,f}$ , com seus respectivos movimentos da roda, ao passo que a razão  $e_{p,r}$ , para o pêndulo traseiro é relativo ao movimento do eixo  $Z_r$ .

As três equações para os movimentos dos pêndulos são:

$$I_p(\ddot{\alpha}_1 + \ddot{\Phi}) - aM_p\ddot{Z}_{p,1} = F_{p,1} \quad (5.27)$$

$$I_p(\ddot{\alpha}_2 - \ddot{\Phi}) - aM_p\ddot{Z}_{p,2} = F_{p,2} \quad (5.28)$$

$$I_p(\ddot{\alpha}_3 - \ddot{\Psi}) - aM_p\ddot{Z}_{p,3} = F_{p,3} \quad (5.29)$$

onde:

$$Z_{p,1} = Z_c - y_1\Phi - x_1\Psi \quad (5.30)$$

$$Z_{p,2} = Z_c + y_2\Phi - x_2\Psi \quad (5.31)$$

$$Z_{p,3} = Z_r + y_3\Phi + x_3\Psi \quad (5.32)$$

$$F_{p,1} = -K_p(\alpha_1 - e_{p,f}\bar{1}\bar{1}_{3\xi}) - C_p(\dot{\alpha}_1 - e_{p,f}\dot{1}\bar{1}_{3\xi}) \quad (5.33)$$

$$F_{p,2} = -K_p(\alpha_2 - e_{p,f}\bar{3}\bar{3}_{3\xi}) - C_p(\dot{\alpha}_2 - e_{p,f}\dot{3}\bar{3}_{3\xi}) \quad (5.34)$$

$$F_{p3} = -K_p(\alpha_3 - e_{pr}\delta Z_r) - C_p(\dot{\alpha}_3 - e_{pr}\dot{\delta Z}_r) \quad (5.35)$$

e

$$\delta Z_r = Z + X_r\Psi - Z_r \quad (5.36)$$

## Capítulo 6

# Análise do comportamento do veículo com sistema de suspensões a gás e comparações com o sistema passivo convencional

### 6.1 Resolução

Utilizou-se os mesmos programas e subrotinas computacionais para a análise do comportamento excitado do veículo com sistema de suspensões convencionais. As modificações ficaram por conta da inclusão das novas equações dos movimentos dos pêndulos de controle e equações para obterem as constantes de controle do fluxo hidráulico do sistema.

### 6.2 Resultados e discussões

Para análise destes sistemas foram adotados perfis das irregularidades das vias do tipo mostrado na figura 2.6, que é uma excitação transiente resultante da combinação de duas rampas. Este sinal é um dos mais adequados para a análise de estabilidade em sistema de controle [15]. Adotou-se uma rampa de 14 cm de altura por 1 m de largura e velocidade do veículo de 3 m/s. O intervalo de tempo para a obtenção dos resultados é 0.5/12 s.

A primeira parte da curva- forças  $F_1$  e  $F_2$  (equações 4.2 e 4.3) - descreve as forças de excitação devido as irregularidades das vias quando apenas as rodas dianteiras passam pela rampa, e  $F_3$  (equação 4.4) descreve as forças quando as rodas traseiras passam pela rampa (figura 6.1).

#### 6.2.1 Sistemas passivos convencionais e com molas a gás

Para a primeira parte das análises, compara-se o comportamento dos sistemas, passivo convencional e passivo com molas a gás, e percebe-se claramente pelas figuras 6.2 e 6.3 que existem grandes

diferenças entre as curvas. Os deslocamentos iniciais são maiores para o sistema descarregado e o pico é atingido pelo sistema adiabático e com valor próximo de 10 cm e no sistema carregado próximo de 5 cm. Percebe-se maiores influências das excitações através das rodas traseiras para o sistema carregado, elevando-se o pico de deslocamento para 6 cm, enquanto no sistema descarregado este pico fica em torno de 3.5 cm. O sistema descarregado estabiliza-se mais rapidamente.

Com relação às acelerações, figuras 6.4 e 6.5 as diferenças são maiores quando as rodas traseiras passam pela rampa. No sistema carregado as duas curvas são bem semelhantes e a aceleração máxima fica em torno de  $3 \text{ m/s}^2$  e no sistema descarregado em torno de  $6 \text{ m/s}^2$ . A aceleração se estabiliza mais rapidamente para o sistema descarregado.

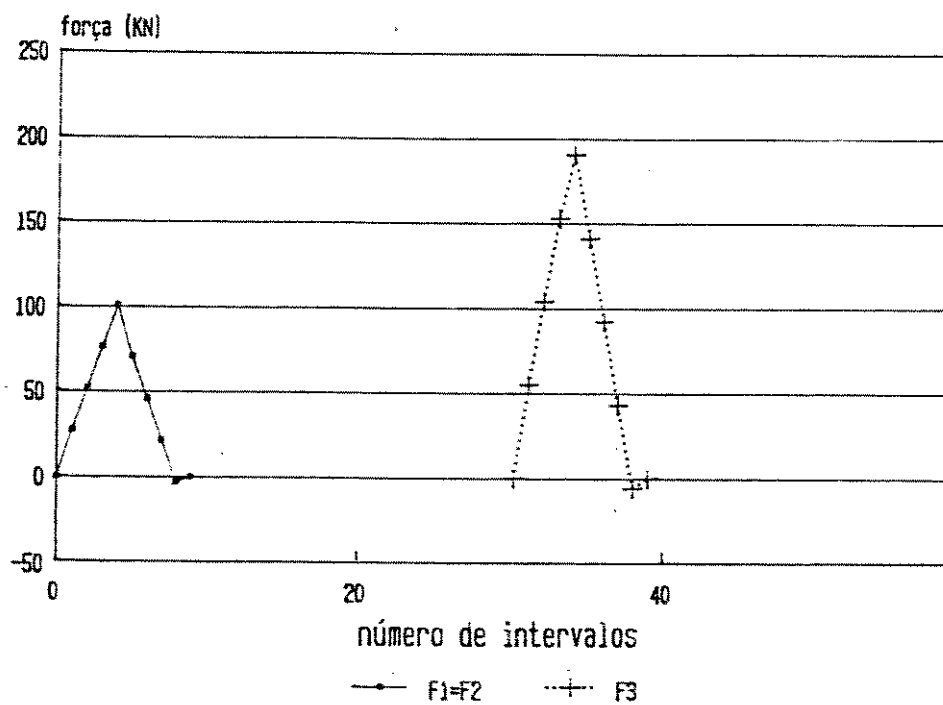


Figura 6.1: Variações das forças devido as irregularidades da via para um veículo trafegando por uma via com perfil do tipo rampa

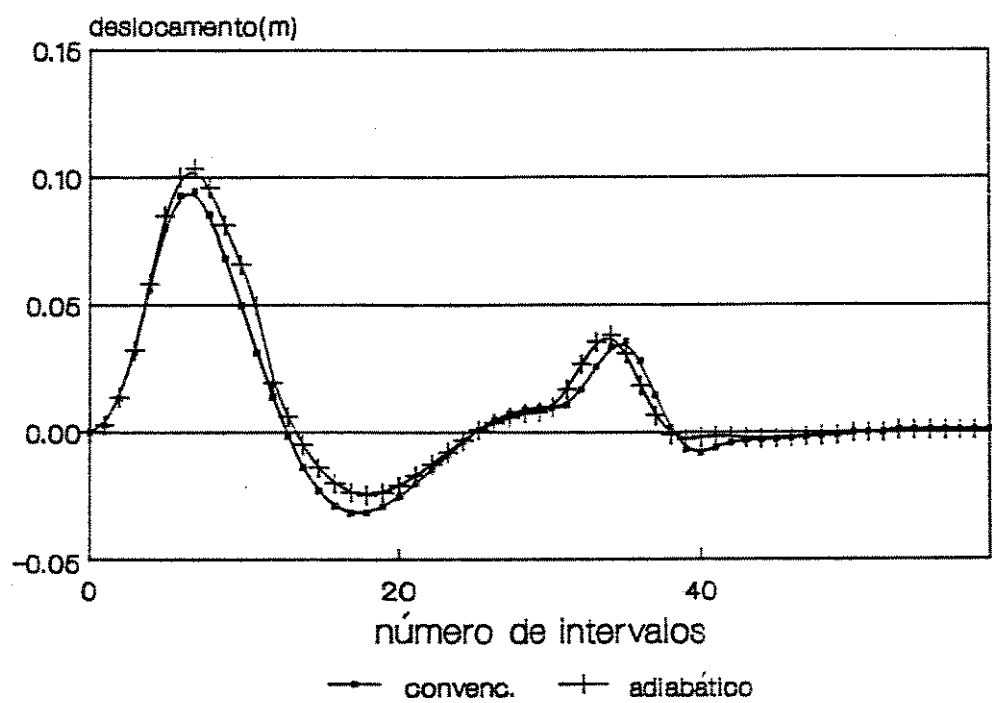


Figura 6.2: Variações dos deslocamentos do centro de gravidade do veículo passando por uma rampa para dois tipos de sistemas de suspensões. (Veículo descarregado)



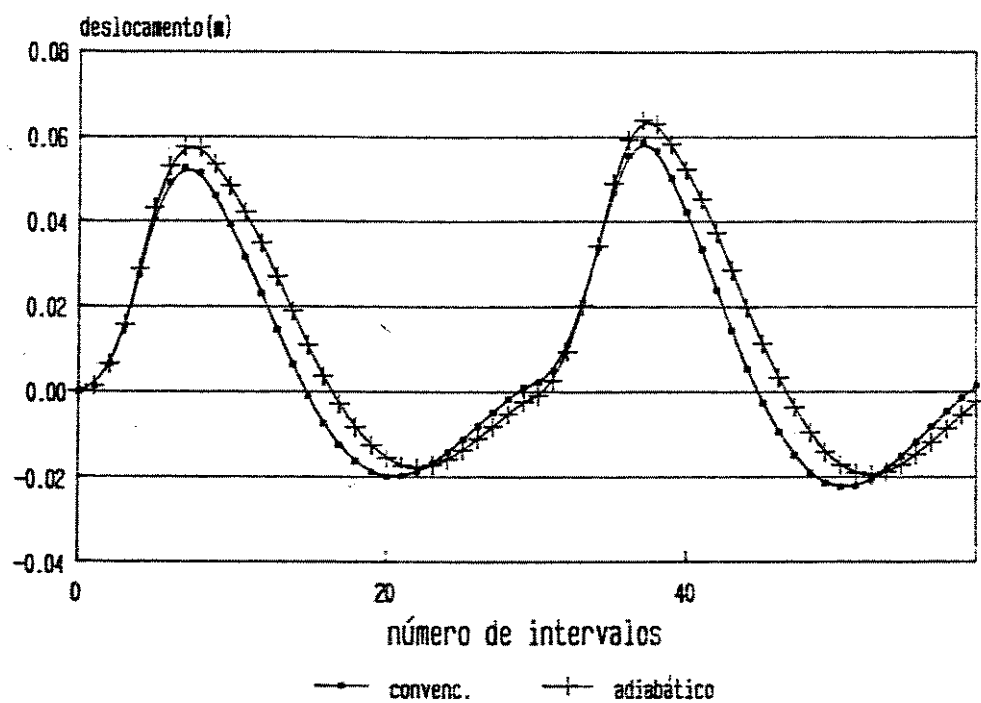


Figura 6.3: Variações dos deslocamentos do centro de gravidade do veículo passando por uma rampa para dois tipos de sistemas de suspensões .(Veículo carregado)

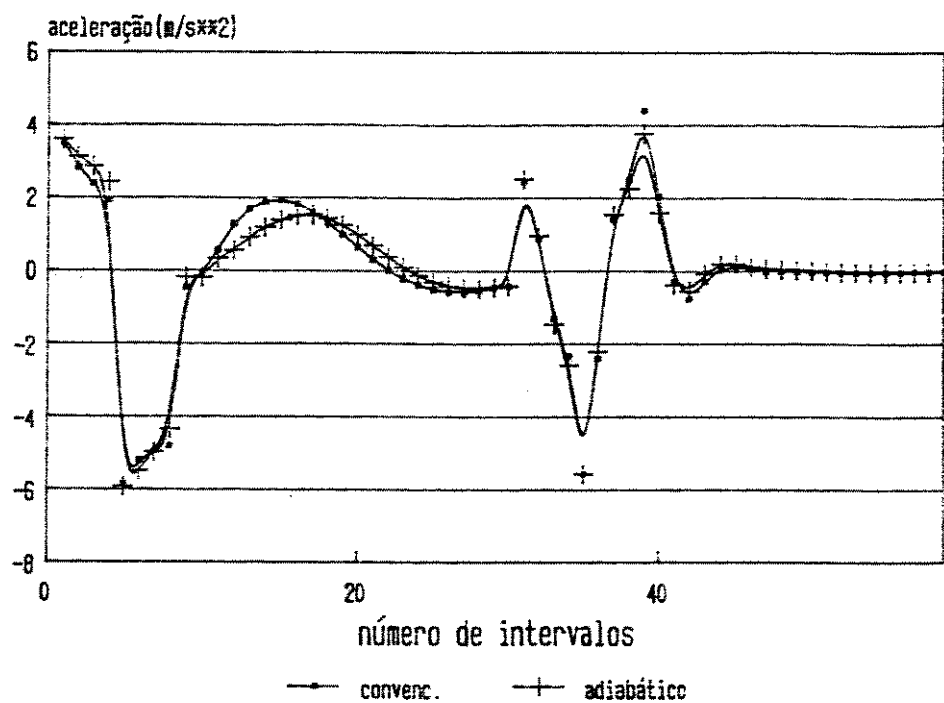


Figura 6.4: Variações das acelerações do centro de gravidade do veículo passando por uma rampa para dois tipos de sistemas de suspensões .(Veículo descarregado)

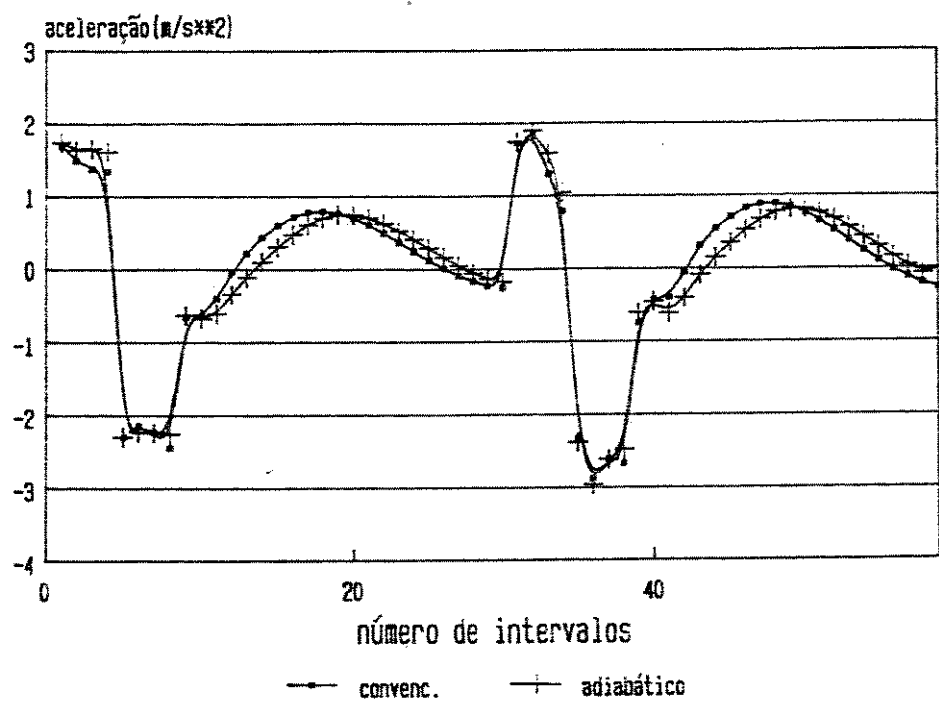


Figura 6.5: Variações das acelerações do centro de gravidade do veículo passando por uma rampa para dois tipos de sistemas de suspensões .(Veículo carregado)

### 6.2.2 Sistemas de molas a gás passivo e com controle

As figuras 6.6 a 6.9, mostram os resultados obtidos para diferentes valores das constantes dos pêndulos de controle, onde  $a=1$  é a situação para o qual as constantes do pêndulo foram ajustadas por valores médios conforme as equações 5.22 e 5.23. Os valores adotados para estas constantes são:

- $a = 1 : C_p = 1.5Ns/m$  e  $K_p = 15N/m$
- $a = \frac{1}{2} : C_p = 0.75Ns/m$  e  $K_p = 7.5N/m$
- $a = 2 : C_p = 3.0Ns/m$  e  $K_p = 30N/m$

Nota-se pelas curvas das figuras 6.6 e 6.7 que apesar de se variar as constantes do pêndulo de controle, aparentemente, o sistema sem controle apresenta melhores resultados. Nota-se também que diminuindo-se os valores das constantes de controle conseguiu-se alguma melhoria no sistema, embora elas não sejam significativas.

Com relação às acelerações, figuras 6.8 e 6.9, notamos que os resultados novamente são inferiores aos do sistema sem controle. Uma discussão sobre tais resultados será apresentada no próximo capítulo.

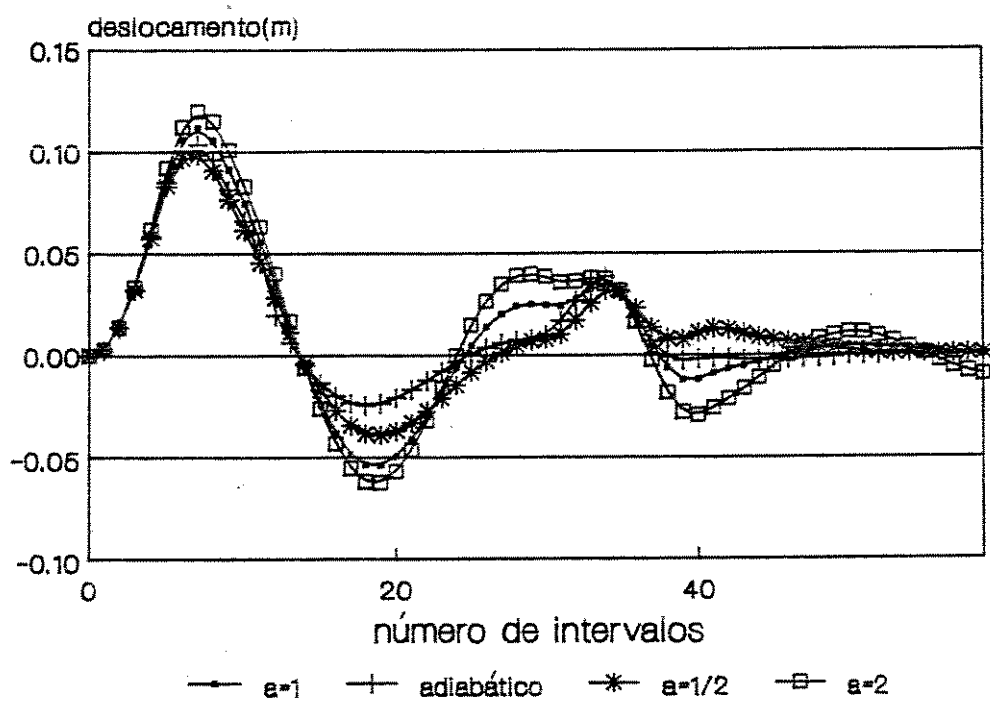


Figura 6.6: Variações dos deslocamentos do centro de gravidade do veículo passando por uma rampa para dois sistemas de suspensões com molas a gás. (Veículo descarregado)

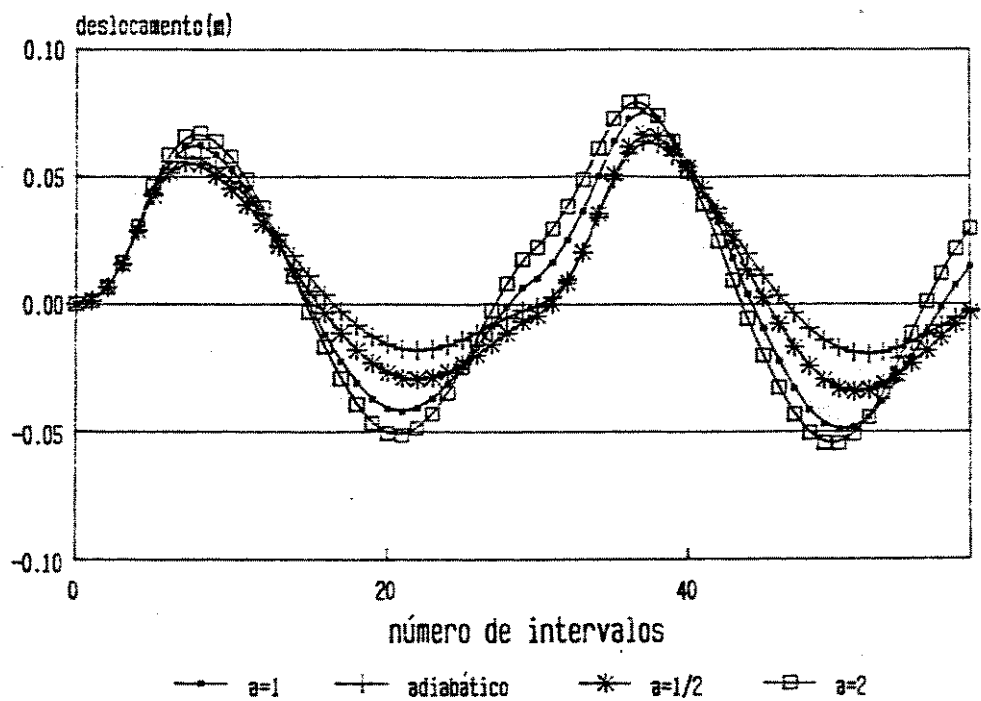


Figura 6.7: Variações dos deslocamentos do centro de gravidade do veículo passando por uma rampa para dois sistemas de suspensões com molas a gás. (Veículo carregado)

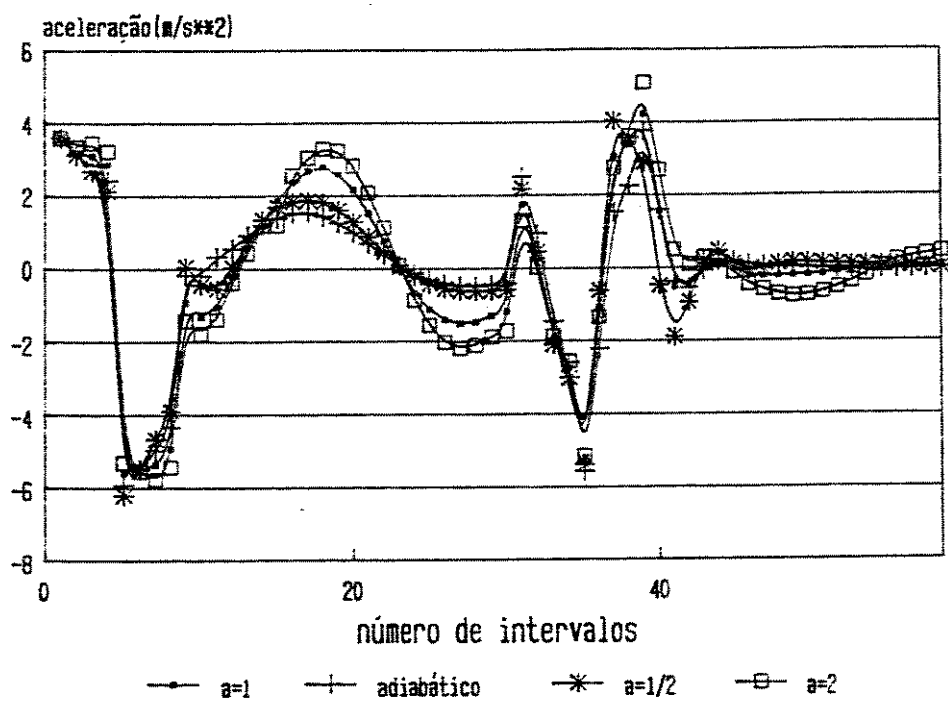


Figura 6.8: Variações das acelerações do centro de gravidade do veículo passando por uma rampa para dois sistemas de suspensões com molas a gás. (Veículo descarregado)

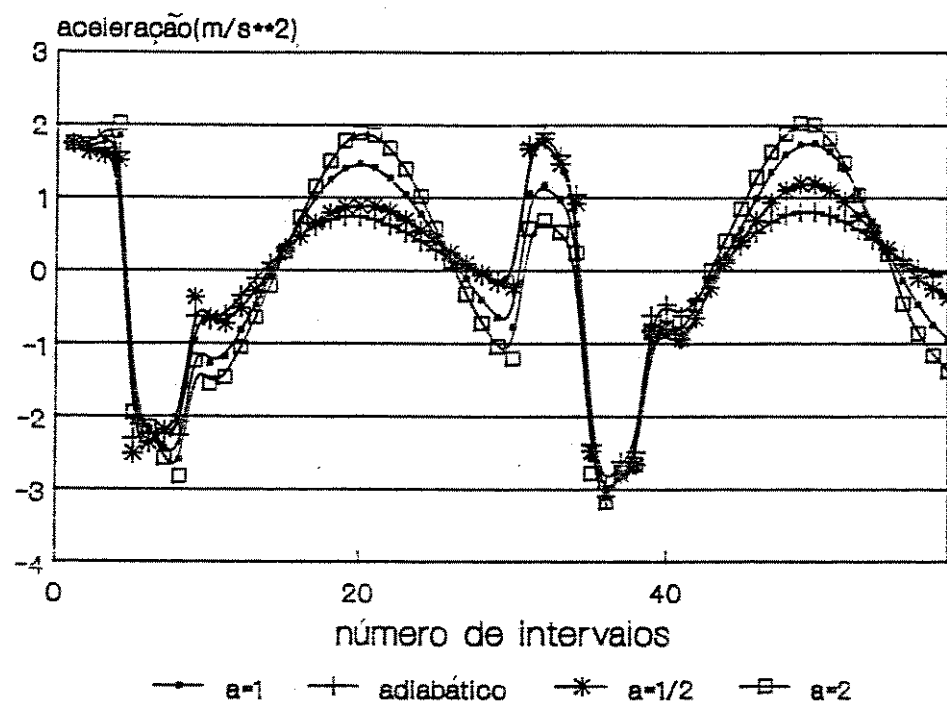


Figura 6.9: Variações das acelerações do centro de gravidade do veículo passando por uma rampa para dois sistemas de suspensões com molas a gás. (Veículo carregado)



## Capítulo 7

# Conclusões e Propostas

### 7.1 Conclusões

Pelas análises do comportamento próprio do sistema notou-se que o modo dominante pelo critério utilizado é o deslocamento vertical da massa principal, ou seja, o seu grau de estabilidade sempre é conferido por esta componente em ambas as condições de carga: veículo carregado e veículo descarregado. A estabilidade do sistema devido a este modo de vibrar, é verificada para toda a faixa de variação da rigidez das molas e para uma grande faixa de variação das constantes de amortecimento dos amortecedores.

Outra comprovação interessante obtida, quando se analisa o comportamento excitado do veículo, é que o deslocamento do centro de gravidade do corpo principal atinge seu pico para frequências de excitação próxima da frequência amortecida do deslocamento vertical da massa principal. Ao variarmos o período de excitação notamos que os picos de deslocamento e aceleração do centro de gravidade do veículo são praticamente os mesmos, embora para diferentes velocidades. As forças de excitação variam pouco variando-se a velocidade do veículo, isto devido à pouca influência da constante de amortecimento das rodas.

Os resultados comparativos entre os sistemas passivo convencional, passivo com molas a gás e com controle, são de difícil interpretação, já que para os exemplos adotados discutiu-se somente a resposta de ambos os sistemas sem incluir qualquer análise relativa ao espaço de trabalho de ambas as suspensões (passiva e ativa). Tal comparação não reflete as condições práticas uma vez que enquanto para a suspensão ativa o espaço de trabalho é o mesmo para as condições carregado e descarregado, na suspensão passiva necessitar-se-ia um espaço de trabalho muito maior para possibilitar a deflexão estática para ambas as condições citadas anteriormente. Uma comparação mais realística é aquela em que o espaço de trabalho efetivo é considerado o mesmo para ambas as suspensões. Resultados encontrados na literatura demonstram que se pode necessitar de uma rigidez do sistema passivo de até cinco vezes maior que o sistema ativo quando o critério acima é empregado.

## 7.2 Propostas

Para que se possa dar continuidade ao trabalho desenvolvido, é interessante citar várias sugestões para trabalhos complementares, como;

- Análise de um modelo matemático mais completo, trabalhando com equações matemáticas mais complexas (não linearização)
- Análise do comportamento de um veículo trafegando por vias curvas e com perfis aleatórios das irregularidades.
- Montagem de um protótipo ou utilização de um modelo real para obtenção de resultados experimentais.
- Análise de um sistema de suspensões a gás com interações entre as suspensões dianteiras e traseiras.
- Análise de um veículo com uma suspensão totalmente ativa

# Bibliografia

- [1] SHARP, R.S. & CROLLA, D.A. *Road Vehicles Suspensions System Design - a review*. Vehicle System Dynamics, 16(1987), p.p. 167-192
- [2] HARRIS, J. & STEVENSON, A. *On the Role of Non-Linearity in the Dynamic Behaviour of Rubber Components*. Int. Journal of Vehicle Design, 8 (1987), p.p. 553-577
- [3] HORTON, D.N.L. & CROLLA, D.A. *Theoretical Analysis of a Semi-Active Suspension Fitted to an off-Road Vehicle*. Vehicle System Dynamics, 15(1986), p.p. 351-374
- [4] SHARP, R.S. & HASSAN, S.A. *An Evaluation of Passive Automotive Suspension Systems with Variable Stiffness and Damping Parameters*. Vehicle System Dynamics, 15(1986), p.p. 335-350
- [5] WILSON, D.A.; SHARP, R.S. & HASSAN, S.A. *The Application of Linear Optimal Control Theory to the Design of Active Automotive Suspensions*. Vehicle System Dynamics, 15(1986), p.p. 103-118
- [6] KARNOPP, D. *Theoretical Limitations in Active Vehicle Suspensions*. Vehicle System Dynamics, 15(1986), p.p. 41-54
- [7] KARNOPP, D. & MARGOLIS, D. *Adaptive Suspension Concepts for Road Vehicles*. Vehicle System Dynamics, 13(1984), p.p. 145-160
- [8] TOMPSON, A.G. *Optimal and Suboptimal Linear Active Suspensions for Road Vehicles*. Vehicle System Dynamics, 13(1984), p.p. 61-72
- [9] MARGOLIS, D.L. *Semi-Active Control of Wheel Hop in Ground Vehicles*. Vehicle System Dynamics, 12(1983), p.p. 317-330
- [10] KARNOPP, D. *Active Damping in Road Vehicle Suspension Systems*. Vehicle System Dynamics, 12(1983), p.p. 291-316
- [11] MARGOLIS, D.L. *The Response of Active and Semi-Active Suspensions to Realistic Feedback Signals*. Vehicle System Dynamics, 11(1982), p.p. 267-282
- [12] MARGOLIS, D.L. *Semi-Active Heave and Pitch Control for Ground Vehicles*. Vehicle System Dynamics, 11(1982), p.p. 31-42
- [13] COTTERELL, M. *Theoretical Analysis of an Active Suspension Fitted to a London Transport Bus*. Cap. 14 de "Stress, Vibration and Noise Analysis in Vehicles". Applied Science Publications, London, 1975

- [14] MEIROVITCH, L. *Introduction to Dynamics and Control*. John Wiley and Sons, New York, 1985
- [15] D'AZZO, H. *Análise e Projeto de Sistemas de Controle Lineares*. Guanabara Dois, Rio de Janeiro, 1978
- [16] AIZERMANN, M.A. *Pneumatic and Hydraulic Control Systems*. Pergmon Press, Oxford, 1968
- [17] MERIAN, J.L. *Dinâmica*. Livros Técnicos e Científicos Editora S.A., Rio de Janeiro, 1981
- [18] ZAMPIERI, D.E. *Estudo Analítico de um Veículo Sobre Trilhos*. Unicamp-FEC, Tese de Mestrado, Campinas, 1975
- [19] SHAMPINE, L.F. & GORDON, M.K. *Computer Solution of Ordinary Differential Equations - the initial value problem*. W.H. Freeman and Company, New York, 1975
- [20] VIERCK, R. *Vibration Analysis*. Thomas Y. Crowell Co., New York, 1979
- [21] FOELLINGER, O. *Regelungstechnik - Einführung in die Methoden und ihre Anwendung*. Elitera-Verlag, Berlin, 1978
- [22] LOPES JUNIOR, V. *Estudo da Resposta Dinâmica de uma Locomotiva a Excitações Devidas a Irregularidades da Via*. Unicamp-FEC, Tese de Mestrado, Campinas, 1987
- [23] RODRIGUES FILHO, F. *Estudo da Estabilidade Dinâmica de Veículos Ferroviários Através da Simulação do Comportamento de uma Locomotiva*. Unicamp-FEC, Tese de Doutorado, Campinas, 1984

## Apêndice A

# Derivação da característica de uma mola a gás

Assume-se que a mola a gás consiste de "m" frascos de gás em paralelo. Os frascos tem volumes  $V_c(i)$  e pressões iniciais de carga  $P_c(i); i = 1, m$ , e são ordenadas de tal forma que  $P_c(i+1) \geq P_c(i)$ .

A pressão estática da mola,  $P_{gm}$ , é igual aquela da pressão estática do braço dada por:

$$P_{gm} = \frac{M_c g}{A e_s} \quad (A.1)$$

Define  $i_0$ , tal que  $P_c(i_0 + 1) > P_{gm} \geq P_c(i_0)$ . Desta forma,  $i_0$  é o número de frascos em uso na condição estática. As pressões estáticas e volumes a gás em cada frasco são dadas por:

$$P_s(i) = \begin{cases} P_{gm}; i = 1, i_0 \\ P_c(i); i = i_0 + 1, m \end{cases} \quad (A.2)$$

e usando a lei isotérmica dos gases,  $PV = \text{constante}$ ,

$$V_s(i) = \frac{V_c(i) P_c(i)}{P_s(i)}; i = 1, m \quad (A.3)$$

Considerando-se agora um volume  $V$  de fluido entrando adiabaticamente na mola, a nova pressão  $P_g$  e volume  $V_g(i)$  são estabelecidos nos frascos 1 a  $i_g$  com  $P_c(i)$  e  $V_c(i)$  nos frascos  $i_g + 1$  a  $m$ . O número de frascos,  $i_g$ , agora em uso é como já foi determinado. Usando a lei adiabática dos gases,  $PV^\gamma = \text{cte}$ ,

$$P_g V_g(i)^\gamma = P_s(i) V_s(i)^\gamma; i = 1, i_g \quad (A.4)$$

e para  $i = i_g$ , temos:

$$P_g^{\frac{1}{\gamma}} \sum_{i=1}^{i_g} V_g(i) = \sum_{i=1}^{i_g} (P_s(i)^{\frac{1}{\gamma}} V_s(i)) = K(i_g) \quad (A.5)$$

Mas:

$$V = \sum_{i=1}^m V_s(i) - \sum_{i=1}^m V_g(i) \quad (\text{A.6})$$

$$\sum_{i=1}^m V_g(i) = \sum_{i=1}^{i_g} V_g(i) + \sum_{i=i_g+1}^m V_c(i) \quad (\text{A.7})$$

Combinando as equações A.5, A.6 e A.7, temos:

$$P_g = \left[ \frac{K(i_g)}{V_{g,c}(i_g) - V} \right]^\gamma \quad (\text{A.8})$$

onde;

$$V_{g,c}(i_g) = \sum_{i=1}^m V_s(i) - \sum_{i=i_g+1}^m V_c(i) \quad (\text{A.9})$$

O número de frascos de gás,  $i_g$ , em uso pode ser avaliado como:

- $i_g$  é assumido ser o menor valor no qual faz  $V_{g,c}(i_g) - V$  positivo
- $P_g$  é avaliado com este valor de  $i_g$
- Se  $i_g < m$  e  $P_g > P_c(i_g + 1)$ , então  $i_g$  é aumentado de uma unidade e  $P_g$  é reavaliado.

Derivando a equação A.8 em relação a  $V$ , temos:

$$\frac{dP_g}{dV} = \frac{\gamma P_g}{V_{g,c}(i_g) - V} \quad (\text{A.10})$$

e para o valor estático é:

$$\frac{dP_g}{dV} = \frac{\gamma P_{g,c}}{V_{g,c}(i_g)} \quad (\text{A.11})$$

O coeficiente de rigidez da mola,  $K_s$  é a razão de mudança da força  $F_r$  na roda com deslocamento  $Z_r$ . Estes são relacionados com a força do braço  $F$  e deslocamento  $Z$  pela razão de alavanca  $e_s$ , e são relacionados com a pressão da mola e volume de fluido através da área da estrutura  $A$ . Desta forma:

$$K_s = \frac{dF_r}{dZ_r} \quad (\text{A.12})$$

$$K_s = \frac{dF_r}{dF} \frac{dF}{dP_g} \frac{dP_g}{dV} \frac{dV}{dZ} \frac{dZ}{dZ_r}$$

$$K_s = e_s A \frac{dP_g}{dV} A e_s$$

$$K_s = (A e_s)^2 \frac{dP_g}{dV} \quad (\text{A.13})$$

O valor estático é:

$$K_{st} = \frac{(Ae_s)^2 \gamma P_{gr}}{V_{gr}} \quad (\text{A.14})$$

## Apêndice B

### Dados

Os parâmetros descrevendo o corpo do veículo são dados na tabela B.1 e os parâmetros descrevendo as suspensões na tabela B.2 [3].

	Descarregado	Carregado
$M_c [Kg]$	5260	11260
$M_1 [Kg]$	280	280
$M_3 [Kg]$	280	280
$M_r [Kg]$	860	860
$I_y [Kg m^2]$	10520	22520
$I_x [Kg m^2]$	5260	11260
$I_{xx} [Kg m^2]$	860	860
$X_f [m]$	0.77	1.85
$X_r [m]$	2.93	1.85
$t [m]$	1.25	1.25

Tabela B.1: Parâmetros do veículo para as duas condições de carga.

Cada uma das quatro molas a gás consiste de três frascos iguais, cada um carregado com a mesma pressão inicial. Assim cada mola a gás atua como um simples frasco de volume  $3V_g$ . Os parâmetros das suspensões são escolhidos para dar coeficientes estáticos de rigidez iguais para a frente e a traseira de  $10^5 N/m$ . Os coeficientes dos pêndulos  $K_p$  e  $C_p$  são calculados através das equações 5.22 e 5.23 usando massas correspondentes, pegando-se então valores médios entre as partes dianteira e traseira.



Suspensão		Componente Ativo	
$K_r$ [N/m]	700000	$M_p$ [Kg]	1.50
$C_r$ [Ns/m]	3500	$I_p$ [Kg m <sup>2</sup> ]	0.015
$P_r(1)$ [MPa]	4.15	$a$ [m]	0.10
$P_r(2)$ [MPa]	4.15	$K_p$ [Nm/rad]	15
$P_r(3)$ [MPa]	4.15	$C_p$ [Nm/rad]	1.50
$V_c$ [m <sup>3</sup> ]	0.0005	$e_{pf}$ [rad/m]	0.87
$A_f$ [m <sup>2</sup> ]	0.00636	$e_{pr}$ [rad/m]	0.80
$A_r$ [m <sup>2</sup> ]	0.00503	$P_1$ [MPa]	18
$A_{r1}$ [m <sup>2</sup> ]	0.00344	$C_u$	0.000006
$e_{rf}$	0.53	$\alpha_{..}$ [rad]	0.003
$e_{rr}$	0.78	$x_1, y_1$ *	0.665/0.71
$C_{rr}$ [Ns/m]	12000	$x_2, y_2$ *	0.665/0.75
$C_{rf}$ [Ns/m]	12000	$x_3, y_3$ *	2.610/0.37

\* Coordenadas dos Pêndulos relativos ao centro do eixo dianteiro

Tabela B.2: Parâmetros das suspensões

## Apêndice C

# Solução de equações diferenciais

Dentre os vários integradores existentes, existe um grupo cujo procedimento é normalmente chamado de preditor-corretor, que se caracteriza por avaliar pelo menos duas vezes por passo de integração o valor da função:  $f(x(t), t)$ , presente na equação

$$\dot{x} = f(x(t), t) \quad (C.1)$$

Na primeira fase é utilizado um integrador preditor do tipo explícito e na segunda fase um integrador corretor do tipo implícito. Apesar de ter um custo computacional de duas estimativas por passo, o seu emprego é justificado por apresentar características como alta precisão e baixa propagação de erros, o que permite a utilização de passos de integração até duas vezes maiores que os usados por outras técnicas.

Utiliza-se aqui o integrador desenvolvido por Shampine/Gordon e apresentado em [19], chamado método PECE (Predict-Evaluate-Correct-Evaluate), e subrotinas DE baseada nas equações de Adams-Moulton para predição e Adams/Bashforth para correção.

Uma característica importante deste integrador é que ele utiliza passo variável, a fim de limitar os erros da solução de C.1 dentro de limites previamente estipulados pelo usuário.

Este integrador é dividido em quatro partes principais:

A primeira subrotina, chamada de diretor de integração, verifica a existência de erros na entrada de dados e organiza a chamada dos demais sub-programas.

Em seguida tem-se a rotina de integração propriamente dita que, a cada chamada, avança um passo em direção do instante onde se deseja a resposta.

Como o programa permite que a integração ultrapasse o ponto de saída, torna-se necessário a utilização de uma rotina de interpolação para obtenção dos valores da resposta no instante de interesse. Mostra que este procedimento é tão preciso quanto se escolher um passo de integração tal que o valor calculado corresponda ao instante de saída desejado.

Finalmente, há uma subrotina que calcula o erro unitário de truncamento do computador utilizado, com o objetivo de estipular um limite inferior para o passo de integração.

O programa fonte contendo as equações diferenciais de primeira ordem foi denominado de "KENIA", contendo a subrotina Força, para calcular as forças instantâneas devido as irregularidades das vias.

## Apêndice D

# Método QR

Uma matriz  $A$  com colunas linearmente independentes pode ser fatorada em  $A = QR$ . As colunas de  $Q$  são ortonormais e  $R$  é matriz triangular superior e pode ser invertida. Se a matriz original é quadrada, então  $Q$  e  $R$  também são e  $Q$  torna-se uma matriz ortogonal (ortogonalização de Gram-Schmidt).

O algoritmo QR começa com a matriz  $A_{..}$ , fatorada por Gram-Schmidt em  $Q_{..}R_{..}$  ou via transformação unitária de Householder, então inverte os fatores:  $A_1 = R_{..}Q_{..}$ . Esta nova matriz é similar à matriz original e,

$$A_{..} = Q_{..}R_{..}$$

$$Q_{..}^{-1}A_{..}Q_{..} = Q_{..}^{-1}(Q_{..}R_{..})Q_{..} = A_1$$

O processo continua sem nenhuma variação nos autovalores.

Desta forma,

$$A_k = Q_k R_k \text{ e então } A_{k+1} = R_k Q_k$$

Estas equações descrevem a base do algoritmo QR.

O objetivo de se utilizar a transformação preparatória de Householder de modo a colocar a matriz  $A_{..}$  na forma de Hessemberg, é fazer com que cada passo de QR seja muito rápido e cada novo  $A_k$  estará novamente na forma de Hessemberg.

A fatoração para produzir  $Q_{..}$  e  $R_{..}$  da matriz original  $A_{..}$ :

$$R_{..} = P_{n,n-1} \dots P_{2,1} A_{..}$$

com  $P$  sendo as transformações de similaridade.

### D.1 Matriz de Hessemberg

Faz-se uma série de transformações para reduzir a matriz  $A$  em uma nova matriz  $B$  com os mesmos autovalores, porém bem mais fáceis de serem calculados. A transposta  $B^T$  dessa matriz transformada é a matriz de Hessemberg superior, isto é,  $a_{ij} = 0$  para  $i > j + 1$ .

Este processo é extremamente estável com respeito a erros de arredondamento, usando-se o posicionamento por tamanho.

Modo de se obter uma matriz de Hessemberg inferior:

Considera-se a linha  $K$ , faz-se:

- Selecionar o maior elemento  $a_{K,L}$  em magnitude entre  $a_{K,K+1}, \dots, a_{K,N}$  e permutar as linhas  $K+1$  e  $L$

- Calcular  $m_{K,J} = -(a_{K,J}/a_{K,K+1})$ ,  $J = K + 2, \dots, N$
- Somar  $m_{K,J}$  vezes a coluna  $K+1$  à coluna  $J$ ;  $J=K+2, \dots, N$

Realizando-se este algoritmo para  $K=1, \dots, N-2$ ; resulta a matriz  $B = [b_{i,j}]$  na forma de Hessemberg.