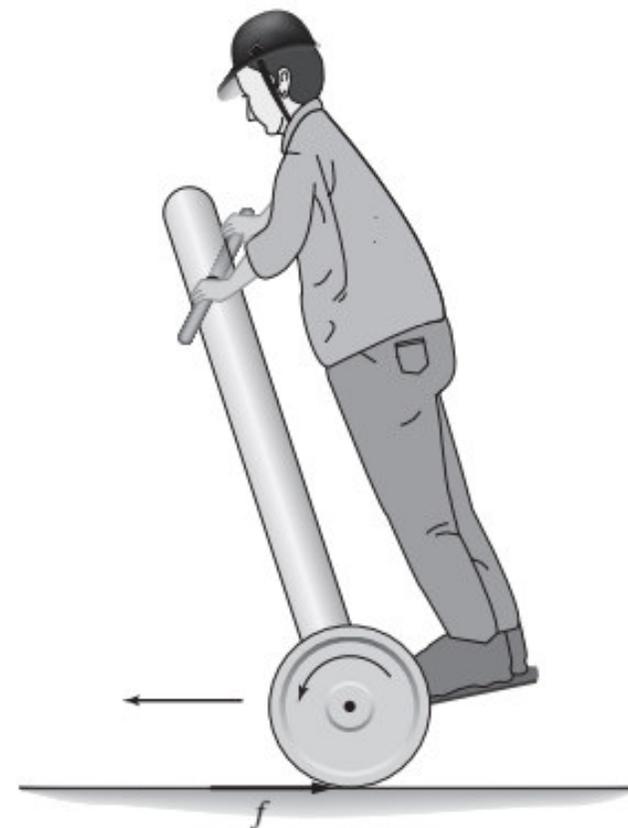


TMEC083 – DINÂMICA DE MÁQUINAS – 2022/2 – 3º. TRABALHO

Fonte: System Dynamics (4th edition), W. J. Palm III, McGraw-Hill, 2021.

1) Contextualização

Transportadores pessoais são pequenos veículos projetados para carregar, via de regra, apenas uma pessoa. Eles têm se tornado mais disponíveis pelo advento de sensores de menor preço e sistemas de controle via microprocessador mais poderosos, de modo a lidar com os cálculos complexos requeridos para equilibrar os veículos. Na figura ao lado, ilustra-se uma versão com duas rodas. Os motores do transportador acionam as rodas para equilibrar o veículo com a ajuda de um sistema de controle computadorizado, que é continuamente alimentado por sensores (por exemplo, giroscópios e tacômetros).



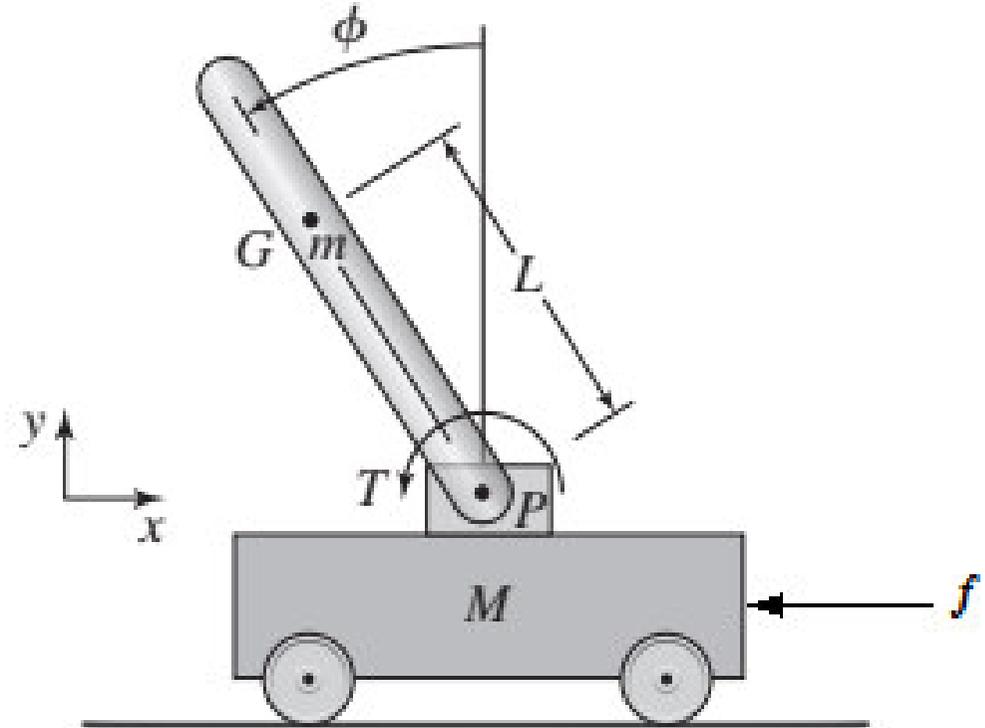
Introdução (cont.)

O transportador estará equilibrado (ou seja, mantido aproximadamente na vertical) contanto que as rodas permaneçam sob o centro de gravidade. Assim o transportador pode ser equilibrado acionando-se as rodas no sentido da inclinação. Isso significa que, para acelerar para frente, a pessoal deve se inclinar para frente, como indicado na figura ao lado (repetida por conveniência). Os motores de acionamento aplicam torques ao subsistema rodas e eixo. A força tangencial resultante entre as rodas e o solo é f . Essa força age na direção oposta ao corpo do veículo e propulsiona o transportador para frente (que, na figura, é para a esquerda). A dinâmica de um transportador pessoal é similar a um problema clássico de controle conhecido como pêndulo invertido, como se verá na sequência.



2) Modelagem Dinâmica

O transportador pode ser representado por um modelo composto por um carrinho de massa M (que inclui a massa equivalente do subsistema rodas e eixo) e um pêndulo invertido conectado ao carrinho por um pivô no ponto P , como mostrado na figura ao lado. A massa do pêndulo é m e seu centro de massa G está à distância L do ponto P . O momento de inércia de massa do pêndulo em torno de G é I_G . Por generalidade, inclui-se um torque T em torno do pivô, o que corresponde, em algumas aplicações, a um motor no pivô. As equações de movimento podem ser encontradas usando os esforços f e T como entradas e as coordenadas x e ϕ como saídas.



Modelagem Dinâmica (cont.)

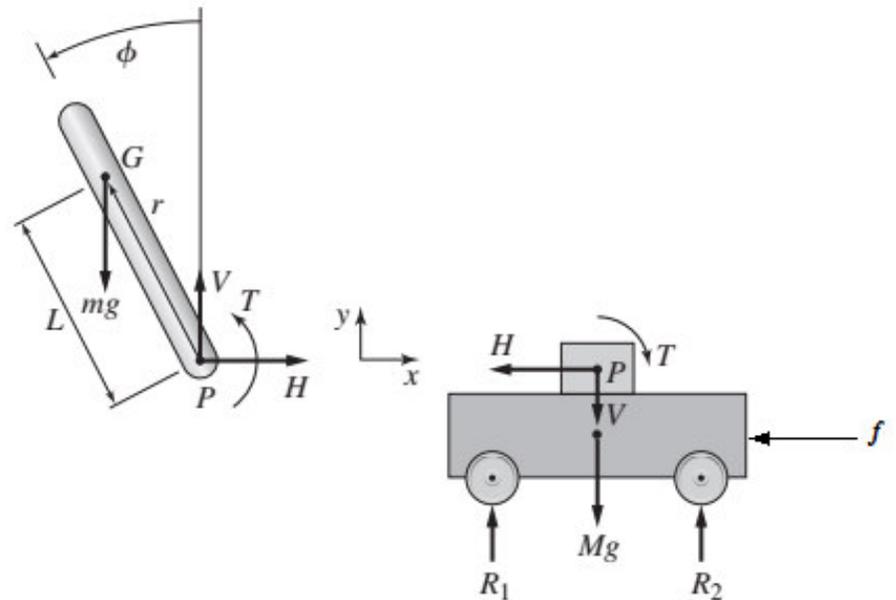
Os diagramas de corpo livre do modelo são mostrados na figura abaixo. Analise-se inicialmente o pêndulo. Os componentes horizontal e vertical da posição do centro de massa do pêndulo são $x - L\sin\phi$ e $L\cos\phi$, respectivamente. Pela aplicação da 2ª. lei de Newton na direção horizontal, tem-se que

$$\sum F_x = m(a_G)_x \rightarrow H = m \frac{d^2}{dt^2}(x - L\sin\phi) \quad (1)$$

onde H é a componente horizontal da força de reação no pivô. Já a equação do momento em torno do pivô P conduz a

$$\sum \mathbf{M}_P = I_G \boldsymbol{\alpha} + \mathbf{r}_{G/P} \times m \mathbf{a}_G \rightarrow T + mgL\sin\phi = (I_G + mL^2) \ddot{\phi} - mL\ddot{x} \cos\phi \quad (2)$$

onde $|\boldsymbol{\alpha}| = \ddot{\phi}$ e $I_G + mL^2$ é o momento de inércia do pêndulo em torno do pivô.

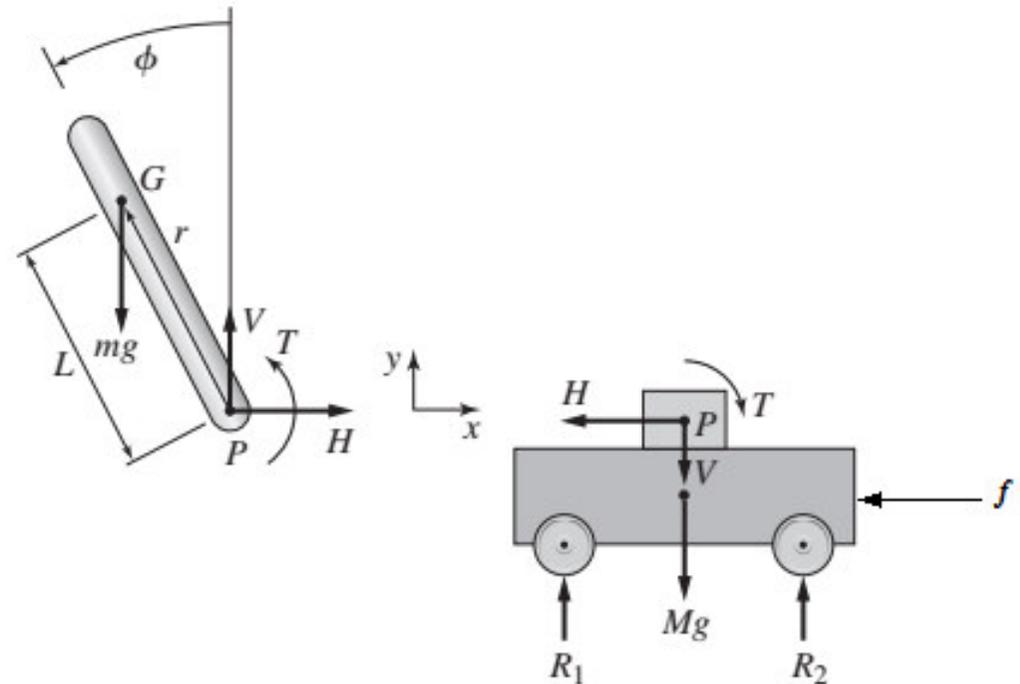


Modelagem Dinâmica (cont.)

Considere-se agora o carrinho (base). Pela 2ª. lei de Newton na direção horizontal, tem-se que

$$\sum F_x = -f - H = M\ddot{x} \quad (3)$$

Como se assume que o carrinho não se move verticalmente e nem gira, não há necessidade de se escrever as equações relativas às forças verticais e aos momentos, a menos que se deseje calcular as forças de reação V , R_1 e R_2 , também indicadas na figura acima.



Realizando progressivamente a derivada da Eq. (1), obtém-se

$$H = m\ddot{x} - mL \frac{d}{dt} [\cos(\phi)\dot{\phi}] = m\ddot{x} - mL [-\text{sen}(\phi)\dot{\phi}^2 + \cos(\phi)\ddot{\phi}] \quad (4)$$

Modelagem Dinâmica (cont.)

Da Eq. (3), tem-se que $H = -M\ddot{x} - f$. Substituindo isso na Eq. (4), decorre que

$$-M\ddot{x} - f = m\ddot{x} - mL \left[-\text{sen}(\phi)\dot{\phi}^2 + \text{cos}(\phi)\ddot{\phi} \right] \quad (5)$$

Os termos das Eqs. (2) e (5) podem ser rearranjados, de modo que dessas equações sejam obtidas, em ordem invertida, as seguintes equações:

$$(m + M)\ddot{x} - mL \left[\text{cos}(\phi)\ddot{\phi} - \text{sen}(\phi)\dot{\phi}^2 \right] = -f \quad (6)$$

$$\left(I_G + mL^2 \right) \ddot{\phi} - mL\ddot{x} \text{cos} \phi - mgL \text{sen} \phi = T \quad (7)$$

As Eqs. (6) e (7) são as **equações de movimento** do modelo.

Pode-se considerar que, ao invés da força f , tenha-se como entrada o torque total T_W aplicado por motores ao conjunto rodas e eixo, sendo R o raio das rodas. Decorre, então, que a força f pode ser substituída na Eq. (6) pela força f_T . A força f_T é tal que $f_T = T_W/R$, pois $R \cdot f_T = T_W$. No transportador pessoal, tem-se, assim, $T = -T_W$.

3) Atividade

Simular numericamente, via Compose ou alternativa computacional pertinente, o comportamento dinâmico do modelo desenvolvido acima, tendo como **entradas** os esforços f_T e T_W e como **saídas** as coordenadas x e ϕ . O modelo deve considerar a representação de um transportador pessoal com um único conjunto de rodas.

Informações sobre características dimensionais e inerciais de tipos de transportadores pessoais podem ser levantadas em <https://www.segway.com/>. Outras fontes também podem ser consultadas. Sugerem-se os seguintes parâmetros:

$$m = (\text{massa da pessoa} + 35) \text{ kg}; L = (0,6 \times \text{altura da pessoa}) \text{ m}; M = 9 \text{ kg};$$

$$I_G = 0,083 \times \text{massa da pessoa} \times (\text{altura da pessoa})^2 \text{ kg.m}^2; R = 0,2 \text{ m}.$$

Partindo do repouso, com um ângulo inicial de inclinação de 10° , o veículo deve ser equilibrado e alcançar a velocidade de 1 m/s ($3,6 \text{ km/h}$). Para tanto, aplica-se a força de controle realimentado $f_T = k_1 x + k_2 \phi + k_3 \dot{x} + k_4 \dot{\phi}$, com constantes de ganho

$$k_1 = -30 \text{ N/m}; k_2 = 1500 \text{ N/rad}; k_3 = -100 \text{ Ns/m}; k_4 = 450 \text{ Ns/rad}.$$

4) Conteúdo

O trabalho deverá conter: (a) a formulação matricial empregada na simulação numérica; (b) os gráficos de posições e velocidades no intervalo de tempo de 0 a 14 s; (c) uma discussão sobre os resultados obtidos; (d) o código computacional utilizado.

5) Envio

O trabalho deverá ser enviado em um único arquivo pdf, individualmente, **via ambiente UFPR Virtual**, até às 9:30 horas do dia 31/01/23.

Observação complementar:

Para obtenção final da Eq. (2), observar que

$$\mathbf{r}_{G/P} = (-L\sin\phi)\mathbf{i} + (L\cos\phi)\mathbf{j} \text{ e } \mathbf{a}_G = \frac{d^2}{dt^2} [(x - L\sin\phi)\mathbf{i} + (L\cos\phi)\mathbf{j}].$$