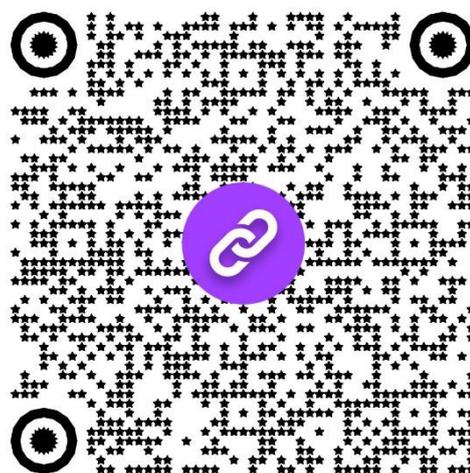
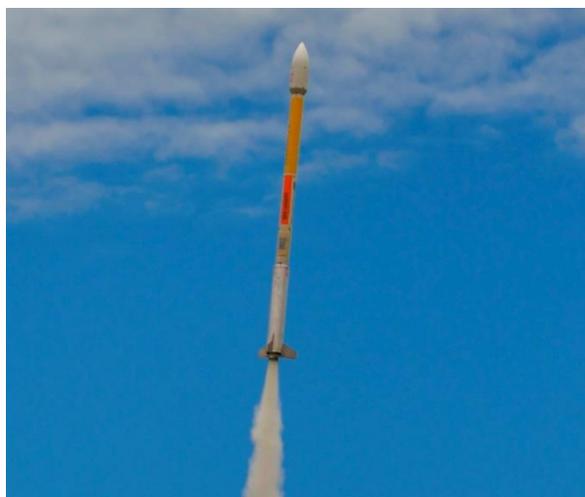


AEROESPACONÁUTICA

volume 2024 / número 1 / p. 1 a 23 / dezembro-2024



Título do trabalho:

Determinação das soluções analíticas das equações do movimento balístico vertical de corpos sob arrasto quadrático e campo gravitacional uniforme

Autor: Enzo Lebelem Gevard (enzogevard@gmail.com)

Grupo de Foguetemodelismo Carl Sagan, Universidade Federal do Paraná, Curitiba, PR, Brasil

Histórico do trabalho: recebido 10 Jun 2024; revisado 8 Set 2024; publicado 20 Dez 2024

Periódico mantido pelo



Editor:

Carlos Henrique Marchi

minifoguete@gmail.com

Universidade Federal do Paraná (UFPR)
Curitiba, PR, Brasil

Aeroespçonáutica é a parte da ciência que estuda os minifoguetes.

Determinação das soluções analíticas das equações do movimento balístico vertical de corpos sob arrasto quadrático e campo gravitacional uniforme

Dezembro de 2024

1 Introdução

O presente trabalho tem o objetivo de apresentar as soluções analíticas para as funções horárias de movimento balístico vertical (unidimensional) de corpos sob um campo gravitacional uniforme e arrasto do tipo quadrático. As deduções de cada equação são minuciosamente demonstradas e explicadas. Apesar de um movimento unidimensional vertical ser quase "utópico" na prática, os resultados previstos podem servir de estimativas para diversas aplicações, em especial a previsão de trajetórias no foguetemodelismo, cenário o qual motivou esse trabalho. É apresentado um exemplo, no qual são comparados dados reais de um voo de um foguetemodelo (relativamente estável e reto) com as previsões dadas pelas equações, a fim de mostrar a efetividade destas.

2 Introdução às situações físicas

Considere um corpo extenso de massa m , com um coeficiente de arrasto constante C_D , área transversal (em relação a direção de movimento) A , que descreve uma trajetória retilínea perpendicular à superfície, com velocidade descrita pelo vetor \vec{v} , onde age um campo gravitacional uniforme de aceleração g . Além disso, considere que esse corpo está imerso em um fluido estacionário de massa específica ρ , no caso o ar, que gera uma força de arrasto definida por

$$\vec{F}_D = -\frac{1}{2}\rho AC_D |\vec{v}|^2 \hat{v}$$

Nota-se que o vetor da força tem sentido contrário à velocidade. Ademais, a força peso que atua no corpo é descrita por

$$\vec{F}_g = -mg\hat{j}$$

Em que \hat{j} simboliza o vetor unitário perpendicular a superfície, enquanto a notação \hat{i} se refere a componente paralela.

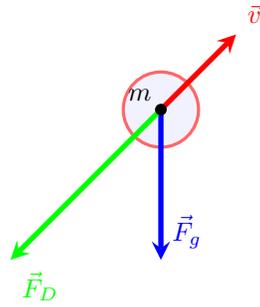


Figura 1: representação de um corpo com uma velocidade qualquer sob as condições impostas

Como o vetor velocidade está sempre na perpendicular, apenas a componente \hat{j} é relevante para a análise das situações.

Há, portanto, duas possibilidades de fases balísticas: velocidade apontando para cima ($+\hat{j}$); e velocidade apontando para baixo ($-\hat{j}$)

Caso 1: velocidade para cima Caso 2: velocidade para baixo

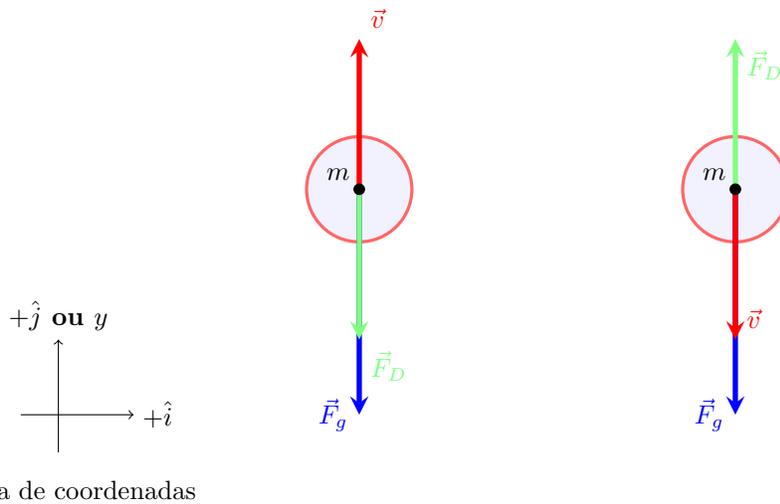


Figura 2: representação dos casos

Dessa forma, escreve-se, pela segunda lei de Newton, sendo \vec{F}_R e \vec{a} a força e aceleração resultantes:

$$\vec{F}_R = \sum \vec{F}_i = \vec{F}_D + \vec{F}_g$$

$$\Rightarrow \vec{a} = \vec{g} - \kappa |\vec{v}|^2 \hat{v}$$

em que

$$\kappa = \frac{\rho A C_D}{2m}$$

é uma constante definida por conveniência.

Já que o movimento ocorre em uma dimensão, é conveniente utilizar uma notação escalar com os sinais indicando o tipo de movimento (acelerado/retardado, progressivo/regressivo, etc). Assim sendo, convencionou-se que a posição, representada aqui por y , seja maior ou igual a zero, e o subíndice 0 e 1

indicando uma grandeza num momento inicial e final, respectivamente. Então, tem-se, em forma escalar, as equações 1 e 2:

$$\boxed{a = -g + \kappa v^2} \quad [\text{eq. 1}] \quad [\text{Fase Balística Descendente}]$$

$$\boxed{a = -g - \kappa v^2} \quad [\text{eq. 2}] \quad [\text{Fase Balística Ascendente}]$$

nas quais tem-se que

$$a = \frac{dv}{dt}$$

em que t representa a variável do tempo.

3 Fase balística ascendente

Neste caso, trabalha-se com a equação 2, na qual a força peso e a força de arrasto trabalham negativamente para o deslocamento do corpo.

A equação diferencial que resulta desse cenário é

$$\frac{dv}{dt} = -g - \kappa v^2$$

3.1 Função horária da velocidade

Rearranjando para separar as variáveis, tem-se

$$\frac{dv}{g + \kappa v^2} = -dt$$

Integrando ambos os lados, tem-se

$$\frac{1}{g} \int_{v_0}^{v_1} \frac{dv}{1 + \frac{\kappa}{g}v^2} = - \int_{t_0}^{t_1} dt$$

Realizando a substituição a seguir

$$u^2 = \frac{\kappa}{g}v^2 \Rightarrow du = dv\sqrt{\frac{\kappa}{g}}$$

pode ser escrito que

$$\frac{1}{g} \sqrt{\frac{g}{\kappa}} \int_{u_0}^{u_1} \frac{du}{1 + u^2} = -\Delta t$$

$$\frac{1}{\sqrt{\kappa g}} \int_{u_0}^{u_1} \frac{du}{1 + u^2} = -\Delta t$$

Agora, concentrando na integral indefinida da equação anterior,

$$\int \frac{du}{1 + u^2}$$

Realiza-se uma substituição trigonométrica

$$\tan x = u \Rightarrow \sec^2(x)dx = du$$

$$\int \frac{\sec^2(x)dx}{1 + \tan^2(x)}$$

Pela identidade $\tan^2 x + 1 = \sec^2 x$, conclui-se que

$$= \int dx = x + C$$

Retornando de x para a variável inicial u

$$= \arctan(u) + C$$

Aplicando essa integral indefinida na equação anterior, obtém-se

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{\kappa g}} \arctan(u) \Big|_{u_0}^{u_1} &= -\Delta t \\ \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{\kappa g}} \arctan \left(v \sqrt{\frac{\kappa}{g}} \right) \Big|_{v_0}^{v_1} &= -\Delta t \\ \Rightarrow \Delta t &= \frac{1}{\sqrt{\kappa g}} \left[\arctan \left(v_0 \sqrt{\frac{\kappa}{g}} \right) - \arctan \left(v_1 \sqrt{\frac{\kappa}{g}} \right) \right] \end{aligned}$$

A fim de definir uma função $v(t)$, são impostas as condições $t_0 = 0$ e $v_1 = v = v(t)$

$$\begin{aligned} t &= \frac{1}{\sqrt{\kappa g}} \left[\arctan \left(v_0 \sqrt{\frac{\kappa}{g}} \right) - \arctan \left(v \sqrt{\frac{\kappa}{g}} \right) \right] \\ \Rightarrow \arctan \left(v_0 \sqrt{\frac{\kappa}{g}} \right) - t \sqrt{\kappa g} &= \arctan \left(v \sqrt{\frac{\kappa}{g}} \right) \end{aligned}$$

$$\boxed{\therefore v(t) = \sqrt{\frac{g}{\kappa}} \tan \left[\arctan \left(v_0 \sqrt{\frac{\kappa}{g}} \right) - t \sqrt{\kappa g} \right]}$$

3.2 Função horária da posição

Parte-se do princípio de que a posição, em um intervalo de tempo, é determinada a partir da integração dos infinitesimais de y em tal intervalo. Assim, escrevendo na forma de equação diferencial, tem-se

$$\frac{dy}{dt} = v$$

Separando os diferenciais,

$$dy = v(t) dt$$

Pela equação,

$$dy = \sqrt{\frac{g}{\kappa}} \tan \left[\arctan \left(v_0 \sqrt{\frac{\kappa}{g}} \right) - t \sqrt{\kappa g} \right] dt$$

Integrando ambos os membros das equações no intervalo de posição e tempo, escreve-se

$$\begin{aligned} \int_{y_0}^{y_1} dy &= \sqrt{\frac{g}{\kappa}} \int_{t_0}^{t_1} \tan \left[\arctan \left(v_0 \sqrt{\frac{\kappa}{g}} \right) - t \sqrt{\kappa g} \right] dt \\ \Rightarrow \Delta y &= -\sqrt{\frac{g}{\kappa}} \frac{1}{\sqrt{\kappa g}} \ln \left[\sec \left(\arctan \left(v_0 \sqrt{\frac{\kappa}{g}} \right) - t \sqrt{\kappa g} \right) \right] \Big|_{t_0}^{t_1} \end{aligned}$$

Uma vez que,

$$\int \tan(x) dx = \int \frac{\sin(x)}{\cos(x)} dx = - \int \frac{du}{u} = \ln[\sec(x)], \quad u = \cos(x)$$

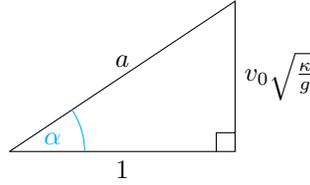
Manipulando algebricamente,

$$\begin{aligned} \Delta y &= \kappa^{-1} \ln \left[\sec \left(\arctan \left(v_0 \sqrt{\frac{\kappa}{g}} \right) - t_0 \sqrt{\kappa g} \right) \right] - \kappa^{-1} \ln \left[\sec \left(\arctan \left(v_0 \sqrt{\frac{\kappa}{g}} \right) - t_1 \sqrt{\kappa g} \right) \right] \\ \Delta y &= \kappa^{-1} \ln \left[\frac{\sec \left(\arctan \left(v_0 \sqrt{\frac{\kappa}{g}} \right) - t_0 \sqrt{\kappa g} \right)}{\sec \left(\arctan \left(v_0 \sqrt{\frac{\kappa}{g}} \right) - t_1 \sqrt{\kappa g} \right)} \right] \end{aligned}$$

Setando $y_1 = y = y(t)$, $t_0 = 0$ e $t_1 = t$, tem-se

$$y(t) = y_0 + \kappa^{-1} \ln \left[\frac{\sec \left(\arctan \left(v_0 \sqrt{\frac{\kappa}{g}} \right) \right)}{\sec \left(\arctan \left(v_0 \sqrt{\frac{\kappa}{g}} \right) - t \sqrt{\kappa g} \right)} \right]$$

Para determinar o valor de $\sec \left(\arctan \left(v_0 \sqrt{\frac{\kappa}{g}} \right) \right)$, considere o triângulo a seguir:



Toma-se então um ângulo α cuja tangente seja $v_0 \sqrt{\frac{\kappa}{g}}$, de tal forma que $\sec \alpha = \sec \arctan \left(v_0 \sqrt{\frac{\kappa}{g}} \right)$. Assim, pode-se, arbitrariamente, escolher os dois catetos de forma a satisfazer tal condição.

Pelo Teorema de Pitágoras, a hipotenusa a é $\sqrt{1 + \frac{v_0^2 \kappa}{g}}$. Assim sendo, fica evidente que o valor da secante de α deve ser $\sqrt{1 + \frac{v_0^2 \kappa}{g}}$.

Logo, com a expressão encontrada,

$$y(t) = y_0 + \kappa^{-1} \ln \left[\frac{\sqrt{1 + \frac{v_0^2 \kappa}{g}}}{\sec \left(\arctan \left(v_0 \sqrt{\frac{\kappa}{g}} \right) - t \sqrt{\kappa g} \right)} \right]$$

$$\therefore y(t) = y_0 + \kappa^{-1} \ln \left[\left(\cos \left(\arctan \left(v_0 \sqrt{\frac{\kappa}{g}} \right) \right) - t \sqrt{\kappa g} \right) \sqrt{1 + \frac{v_0^2 \kappa}{g}} \right]$$

3.3 Função horária da aceleração

Em relação à determinação da aceleração, basta recordar que a aceleração é a taxa de variação instantânea da velocidade. Assim, escreve-se que

$$\frac{dv}{dt} = a$$

Derivando v , utilizando a definição da equação, tem-se

$$a(t) = \frac{d}{dt} \left[\sqrt{\frac{g}{\kappa}} \tan \left[\arctan \left(v_0 \sqrt{\frac{\kappa}{g}} \right) - t \sqrt{\kappa g} \right] \right]$$

$$\Rightarrow a(t) = -\sqrt{\frac{g}{\kappa}} \sqrt{\kappa g} \sec^2 \left[\arctan \left(v_0 \sqrt{\frac{\kappa}{g}} \right) - t \sqrt{\kappa g} \right]$$

$$\therefore a(t) = -g \sec^2 \left[\arctan \left(v_0 \sqrt{\frac{\kappa}{g}} \right) - t \sqrt{\kappa g} \right]$$

3.4 Presença de uma força de empuxo constante em um determinado intervalo de tempo

No foguetemodelismo, é de grande interesse entender a dinâmica de um corpo propulsado pela expulsão de massa em altas velocidades, utilizando o princípio da conservação de momento linear. No entanto, como a vazão mássica não é constante, além da própria massa do corpo estar variando, é muito trabalhoso encontrar uma solução. A equação que rege esse cenário é dado por

$$m(t) \frac{dv}{dt} = -m(t)g + \frac{dm}{dt}c - \frac{1}{2}\rho AC_D v^2$$

em que c é a velocidade de exaustão dos gases provenientes da combustão de propelente (em módulo). Utilizando-se de boas aproximações empíricas, como vazão mássica constante ($\dot{m} = \text{const}$), tem-se

$$(m_0 - \dot{m}t) \frac{dv}{dt} = -(m_0 - \dot{m}t)g + \dot{m}c - \frac{1}{2}\rho AC_D v^2$$

Percebe-se que agora as derivadas da solução possuem coeficientes variáveis. Como brevemente discutido em Lee (2014) [1], essa equação só terá uma solução analítica (aparentemente) quando um fator q , definido como

$$q = \sqrt{\frac{\dot{m}c - mg}{\left(\frac{1}{2}A\rho C_D\right)}}$$

for constante. É possível reescrever essa relação como

$$\frac{Kq^2}{c} = \dot{m} - \frac{g}{c}m$$

com K representando o denominador dentro da raiz. Essa EDO é um caso clássico em que a solução é uma função exponencial (há diversas formas de demonstrar tal fato!). Assim, a solução é

$$m(t) = e^{\frac{q}{c}t} - \frac{Kq^2}{g}$$

Portanto, ao resolver para a função de m em respeito ao tempo, dado que q é uma constante, obtém-se uma função exponencial com comportamento visivelmente em desacordo com observações do comportamento da massa em foguetemodelos.

Como o escopo desse trabalho é mais amplo, não serão apresentadas tentativas de resolver a equação mais completa. No entanto, uma solução analítico, escrita utilizando a Função de Bessel e a Função Gamma, **pode** ser encontrada a partir dos seguintes métodos: transformação em uma EDO de segunda ordem pela Equação de Riccati; normalização (eliminação da derivada de primeira ordem); transformação de Möbius [2] com equivalência da invariante da função hipergeométrica confluenta ${}_0F_1$; transformação da forma ${}_0F_1$ para a função de Bessel e Gamma; e substituição desta última solução na Equação de Riccati. Essa dedução é extremamente trabalhosa e a solução final é extensa, reduzindo drasticamente a praticidade dessa forma da solução. Uma solução utilizando um método parecido foi apresentada por Alves et al. (2021) [3].

Alternativamente, a fim de simplificar a EDO e resolvê-la com facilidade, é possível assumir duas condições: empuxo constante (independente de massa ou tempo) e massa constante. A massa utilizada terá o valor numérico da média aritmética simples entre a massa seca (sem propelente) e massa total (com propelente). Já para o empuxo, o seu valor numérico será a média do empuxo no intervalo do tempo de queima. Assim, seja \bar{m} a massa média e \bar{E} o empuxo médio, então

$$\bar{m} = \frac{m_{seca} + m_{total}}{2}$$

e

$$\bar{E} = \frac{1}{t_{queima}} \int_0^{t_{queima}} E(t) dt$$

Reescrevendo a equação do movimento, temos

$$\bar{m} \frac{dv}{dt} = -\bar{m}g + \bar{E} - \frac{1}{2}\rho AC_D v^2$$

$$\Rightarrow \frac{dv}{dt} = -g + \frac{\bar{E}}{m} - \kappa v^2$$

Adotando

$$K = \frac{\rho A C_D}{2m}$$

para diferenciar o parâmetro κ das fases não propulsadas. Além disso, é conveniente definir um fator de gravidade efetiva, ou aparente, como

$$G = -g + \frac{\bar{E}}{m}$$

tal que

$$\frac{dv}{dt} = G - K v^2$$

Essa equação diferencial pode ser solucionada usando os métodos da fase balística descendente. Por isso, haverá uma subseção (4.4) da fase balística que resolverá essa equação em detalhes.

4 Fase balística descendente

Neste caso, usa-se a equação 1, na qual a força peso se opõe ao arrasto. É também neste cenário em que surge o conceito de velocidade terminal.

A equação diferencial que representa essa situação é

$$\frac{dv}{dt} = \kappa v^2 - g$$

4.1 Função horária da velocidade

Pela separação de variáveis, tem-se

$$\begin{aligned} \frac{dv}{\kappa v^2 - g} &= dt \\ \Leftrightarrow \frac{1}{g} \frac{dv}{\frac{\kappa}{g} v^2 - 1} &= dt \end{aligned}$$

Integrando ambos os membros e usando $v(t_0) = v_0$ para indicar a velocidade no instante inicial e $v(t_1) = v_1$ para a velocidade no instante final, escreve-se

$$\begin{aligned} \frac{1}{g} \int_{v_0}^{v_1} \frac{dv}{\frac{\kappa}{g} v^2 - 1} &= \int_{t_0}^{t_1} dt \\ \Rightarrow \frac{1}{g} \int_{v_0}^{v_1} \frac{dv}{\frac{\kappa}{g} v^2 - 1} &= \Delta t \end{aligned}$$

Realizando a substituição $u = v \sqrt{\frac{\kappa}{g}}$, tem-se

$$du = dv \sqrt{\frac{\kappa}{g}}$$

Assim,

$$\frac{1}{g} \sqrt{\frac{g}{\kappa}} \int_{u_0}^{u_1} \frac{du}{u^2 - 1} = \Delta t$$

lembrando que $u_i = v_i \sqrt{\frac{\kappa}{g}}$

$$\Rightarrow \frac{1}{\sqrt{g\kappa}} \int_{u_0}^{u_1} \frac{du}{u^2 - 1} = \Delta t \quad [\text{eq. 3}]$$

Paralelamente, considere a seguinte integral indefinida I :

$$I = \int \frac{du}{u^2 - 1}$$

Pode-se escrever que

$$\Rightarrow I = \int \frac{du}{(u-1)(u+1)}$$

Então, separa-se por frações parciais

$$\Rightarrow I = \int \frac{A}{(u-1)} du + \int \frac{B}{(u+1)} du$$

Tal que A, B são reais e constantes independentes de u . Isso gera a seguinte equação, para que a soma dessas frações seja $\frac{1}{u^2-1}$:

$$\begin{aligned} A(u+1) + B(u-1) &= 1 \\ \Rightarrow u(A+B) + (A-B) &= 1 \end{aligned}$$

Implicando que

$$A + B = 0$$

e

$$A - B = 1$$

Resolvendo o sistema, tem-se $A = \frac{1}{2}$ e $B = -\frac{1}{2}$. Dessa forma, escreve-se I como

$$I = \frac{1}{2} \int \frac{du}{(u-1)} - \frac{1}{2} \int \frac{du}{(u+1)}$$

Sabendo que

$$\int \frac{dx}{x} = \ln(x) + C$$

em que C é uma constante qualquer, então

$$\begin{aligned} I &= \frac{1}{2} \ln(u-1) - \frac{1}{2} \ln(u+1) \\ \Rightarrow I &= \frac{1}{2} \ln\left(\frac{u-1}{u+1}\right) + C \\ \Rightarrow I &= -\frac{1}{2} \ln\left(\frac{u+1}{u-1}\right) + C \end{aligned}$$

Note que $|u| \leq 1$. A razão por trás desse fato pode ser explicada pela velocidade terminal de um corpo em queda. É claro que, em nenhum momento, é possível que um corpo desenvolva uma força de arrasto maior que seu peso. Isso se deve à própria natureza do arrasto: uma força dissipativa (trabalho negativo) que sempre deve se opor ao movimento, o que não seria o caso se ela fosse maior que o peso. De fato, existe um caso limite (em tempo infinito), que será demonstrado posteriormente, em que a velocidade se aproxima de uma assintota horizontal. Esse caso ocorrerá quando a velocidade será tanta que o arrasto se iguala ao peso, impedindo que o sistema acelere mais para aumentar o arrasto. Assim, pode-se escrever, sendo v_t a velocidade terminal,

$$\begin{aligned} g &= \kappa v_t^2 \\ \Rightarrow |v_t| &= \sqrt{\frac{g}{\kappa}} \end{aligned}$$

Como foi definido $u = v\sqrt{\frac{\kappa}{g}}$, o maior valor será $u = v_t\sqrt{\frac{\kappa}{g}} = 1$. O motivo de se analisar esse caso limite é a substituição que será feita agora. Sabe-se pela geometria hiperbólica que

$$\operatorname{artanh}(x) = \frac{1}{2} \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) \text{ se } |x| \leq 1$$

Assim,

$$I = -\operatorname{artanh}(u) + C$$

Usando I na eq. 3, tem-se

$$\begin{aligned} -\frac{1}{\sqrt{g\kappa}} \operatorname{artanh}(u) \Big|_{u_0}^{u_1} &= \Delta t \\ \Rightarrow -\frac{1}{\sqrt{g\kappa}} \operatorname{artanh} \left(v \sqrt{\frac{\kappa}{g}} \right) \Big|_{v_0}^{v_1} &= \Delta t \\ \therefore \Delta t &= \frac{1}{\sqrt{g\kappa}} \left[\operatorname{artanh} \left(v_0 \sqrt{\frac{\kappa}{g}} \right) - \operatorname{artanh} \left(v_1 \sqrt{\frac{\kappa}{g}} \right) \right] \end{aligned}$$

Escolhendo o $t_0 = 0$, $t_1 = t$ e $v_0 = 0$, pode-se escrever a função inversa da velocidade de queda a partir do repouso

$$t = -\frac{1}{\sqrt{g\kappa}} \operatorname{artanh} \left(v \sqrt{\frac{\kappa}{g}} \right)$$

Resolvendo para a explícita $v(t)$,

$$\boxed{v(t) = -\sqrt{\frac{g}{\kappa}} \tanh(t\sqrt{\kappa g})} \quad [\text{eq. 4}]$$

Para demonstrar que a velocidade terminal é um caso limite (no infinito apenas), considere o valor desse limite quanto t tende ao infinito:

$$\begin{aligned} v_t &= \lim_{t \rightarrow \infty} v(t) \\ &= -\sqrt{\frac{g}{\kappa}} \lim_{t \rightarrow \infty} \tanh(t\sqrt{\kappa g}) \\ &= -\sqrt{\frac{g}{\kappa}} \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{e^{2t\sqrt{\kappa g}} - 1}{e^{2t\sqrt{\kappa g}} + 1} \\ &= -\sqrt{\frac{g}{\kappa}} \lim_{t \rightarrow \infty} 1 \\ &= \boxed{-\sqrt{\frac{g}{\kappa}}} \end{aligned}$$

Como o limite de convergência é o valor da função (que representa as ordenadas), o gráfico possui uma assintota horizontal de valor $\sqrt{\frac{g}{\kappa}}$

Uma maneira de obter uma intuição do quão rápido o corpo se aproxima da velocidade terminal é determinar o tempo até $v = 0.99v_t$. Igualando a eq. 4 a $0.99v_t$, tem-se que

$$\begin{aligned} 0.99v_t &= -\sqrt{\frac{g}{\kappa}} \tanh(t\sqrt{\kappa g}) \\ \Rightarrow -0.99\sqrt{\frac{g}{\kappa}} &= -\sqrt{\frac{g}{\kappa}} \tanh(t\sqrt{\kappa g}) \\ \Rightarrow 0.99 &= \tanh(t\sqrt{\kappa g}) \\ \therefore t &= \frac{1}{\sqrt{\kappa g}} \operatorname{artanh}(0.99) \end{aligned}$$

4.2 Função horária da posição

A fim de determinar a função da posição, basta integrar a função velocidade em relação ao tempo, já que $v = \frac{dy}{dt}$. Assim, tem-se, pela eq. 4,

$$\begin{aligned}v(t)dt &= -\sqrt{\frac{g}{\kappa}} \tanh(t\sqrt{\kappa g}) dt \\ \Rightarrow \int_{y_0}^{y_1} dy &= -\sqrt{\frac{g}{\kappa}} \int_{t_0}^{t_1} \tanh(t\sqrt{\kappa g}) dt \\ \Rightarrow \Delta y &= -\sqrt{\frac{g}{\kappa}} \int_{t_0}^{t_1} \tanh(t\sqrt{\kappa g}) dt\end{aligned}$$

Uma vez que $\int \tanh(x)dx = \ln(\cosh(x)) + C$, com C sendo uma constante qualquer, então

$$\begin{aligned}\Delta y &= -\sqrt{\frac{g}{\kappa}} \ln(\cosh(t\sqrt{\kappa g})) \Big|_{t_0}^{t_1} \\ \Rightarrow \Delta y &= \sqrt{\frac{g}{\kappa}} \ln(\cosh(t_0\sqrt{\kappa g})) - \sqrt{\frac{g}{\kappa}} \ln(\cosh(t_1\sqrt{\kappa g}))\end{aligned}$$

Tomando $t_0 = 0$, $y_1 = y$ e $t_1 = t$, pode-se achar a função explícita $y(t)$

$$y(t) = y_0 - \sqrt{\frac{g}{\kappa}} \ln(\cosh(t\sqrt{\kappa g})) \frac{1}{\sqrt{\kappa g}}$$

$$\therefore y(t) = y_0 - \kappa^{-1} \ln(\cosh(t\sqrt{\kappa g}))$$

4.3 Função horária da aceleração

Para determinar a aceleração a em função do tempo, basta derivar em respeito a t a função $v(t)$. Assim, a partir da eq. 4, tem-se

$$a(t) = \frac{dv}{dt} = -\sqrt{\frac{g}{\kappa}} \operatorname{sech}^2(t\sqrt{\kappa g}) \sqrt{\kappa g}$$

$$\therefore a(t) = -g \operatorname{sech}^2(t\sqrt{\kappa g})$$

4.4 Solução da fase propulsada

Inicialmente, tem-se

$$\frac{dv}{dt} = G - Kv^2$$

A estrutura da equação diferencial é (quase) idêntica à vista acima, sendo que esta apenas possui um membro com sinal oposto. Dessa maneira, esse sinal irá ser carregado através da resolução análoga, resultando nas mesmas equações do movimentos (de descida) com o sinal trocado, uma vez que a constante multiplicativa -1 "sai" das integrais e derivadas. Portanto, as equações de movimento para a fase propulsada, com empuxo constante, são as seguintes:

Aceleração:

$$a(t) = G \operatorname{sech}^2(t\sqrt{KG})$$

Velocidade:

$$v(t) = \sqrt{\frac{G}{\kappa}} \tanh(t\sqrt{KG})$$

Posição (altura):

$$y(t) = y_0 + K^{-1} \ln(\cosh(t\sqrt{KG}))$$

É evidente que o domínio das três funções é o intervalo $[0, t_{queima}]$

5 Resumo das equações

5.1 Fase ascendente

- **Equação diferencial inicial:** $a = -g - \kappa v^2 \Rightarrow \ddot{y} = -g - \kappa (\dot{y})^2$
- **Função horária da aceleração:** $a(t) = -g \sec^2 \left[\arctan \left(v_0 \sqrt{\frac{\kappa}{g}} \right) - t\sqrt{\kappa g} \right]$
- **Função horária da velocidade:** $v(t) = \sqrt{\frac{g}{\kappa}} \tan \left[\arctan \left(v_0 \sqrt{\frac{\kappa}{g}} \right) - t\sqrt{\kappa g} \right]$
- **Função horária da posição:** $y(t) = y_0 + \kappa^{-1} \ln \left[\left(\cos \left(\arctan \left(v_0 \sqrt{\frac{\kappa}{g}} \right) - t\sqrt{\kappa g} \right) \right) \sqrt{1 + \frac{v_0^2 \kappa}{g}} \right]$

5.2 Fase descendente

- **Equação diferencial inicial:** $a = -g + \kappa v^2 \Rightarrow \ddot{y} = -g + \kappa (\dot{y})^2$
- **Função horária da aceleração:** $a(t) = -g \operatorname{sech}^2(t\sqrt{\kappa g})$
- **Função horária da velocidade:** $v(t) = -\sqrt{\frac{g}{\kappa}} \tanh(t\sqrt{\kappa g})$
- **Função horária da posição:** $y(t) = y_0 - \kappa^{-1} \ln(\cosh(t\sqrt{\kappa g}))$

5.3 Alguns comentários para o estudo desses cenários

Existem várias situações em que estas equações podem ser úteis, especialmente se o objetivo se trata de previsões de trajetórias (ou estimativas). Porém, é necessário ter muito cuidado com as funções trigonométricas presentes nas equações, já que, no momento de resolução das equações, múltiplas res-postas podem ser descobertas.

Em geral, é interessante traçar os gráficos para visualizar. Algebricamente, diante de uma equação trigonométrica, ou a solução que interessa é a trivial ou é a primeira determinação. Testar valores para encontrar absurdos é essencial.

Nos estudos desse tipo de movimento, é crítico que o instante de tempo em que há a troca entre fase ascendente e descendente seja imediatamente determinado. Isso restringirá os domínios das funções.

6 Exemplo: Caso LAE-140/v2 (16/6/2024)

Para exemplificar, será utilizado os dados do lançamento do minifoguete denominado LAE-140/v2, com motor classe B4-0, estágio único, equipado com um altímetro MicroPeak (MP-81), sem carga de ejeção e projetado para voar por 10 segundos.

Como existe uma certa incerteza em relação às características do motor, foram utilizados dados coletados experimentalmente de um teste estático de motores de mesmo modelo. As médias de empuxo, tempo de queima e massa de propelente foram escolhidas para os cálculos da fase propulsada.

O coeficiente de arrasto foi obtido a partir do software CD 2.1 do GFCS (UFPR) e dos dados de dimensões do minifoguete. Já a massa específica do ar foi calculada usando a Lei Ideal dos Gases, pressão de 914.8 hPa, temperatura de 24 °C e constante ideal de gás do ar igual a 286.9 J/kgK. Os demais parâmetros foram extraídos diretamente do relatório da sessão de lançamento do LAE-140/v2.

6.1 Parâmetros usados

1. Aceleração gravitacional (em Curitiba): $g = 9.7876 \text{ms}^{-1}$
2. Coeficiente de arrasto: $C_D = 0.91$
3. Massa específica do ar $\rho = 1.07305 \text{kg m}^{-3}$

4. Massa seca (sem propelente, medida pós-voos): $m_{seca} = 4.4675 \cdot 10^{-2}$ kg
5. Massa de propelente (expelido, medida pós-voos): $m_{propelente} = 4.752 \cdot 10^{-3}$ kg
6. Área da secção transversal de referência: $A = \frac{\pi}{4} \cdot (20.06 \cdot 10^{-3})^2 \approx 3.15102 \cdot 10^{-4}$ m²

6.2 Fase ascendente

6.2.1 Fase propulsada prevista

Como, a priori, é impossível conhecer exatamente os dados de empuxo, tempo de queima e massa de propelente, parte-se para uma estimativa.

A massa do foguete com o motor (massa total) era $m_{total} = 49.427$ g, enquanto a massa do motor total era 16.961 g. A massa de propelente esperada (com base em testes de outros motores do mesmo modelo pelo GFCS) era de 4.57g a 5.29g. A média dessa massa de propelente é $m_{propelente} = 4.864$ g. Logo, a massa média, durante a fase propulsada, é

$$\bar{m} = \frac{2m_{seca} + m_{propelente}}{2} = 4.7051 \cdot 10^{-2} \text{kg}$$

Em seguida, define-se o parâmetro K ,

$$K = \frac{\rho A C_D}{2\bar{m}} \approx 3.15102 \cdot 10^{-4} \text{m}^{-1}$$

De acordo com testes estáticos de motores de mesmo modelo previamente executados, a média do tempo de queima, t_{queima} , é 0.786s e a média de empuxo, \bar{E} , é 4.49 N

Assim, calcula-se que a gravidade efetiva é

$$G = -g + \frac{\bar{E}}{\bar{m}} \approx 8.56408 \cdot 10^1 \text{m s}^{-2}$$

Utilizando as equações previamente deduzidas, a velocidade no fim da queima deve ser

$$v_{queima} = v(t_{queima}) = \sqrt{\frac{G}{K}} \tanh\left(t_{queima} \sqrt{KG}\right)$$

$$\therefore v_{queima} \approx 63.6830 \text{m/s}$$

Já a altura no fim da queima deve ser, dado que a altura inicial era 0 metro,

$$y_{queima} = y(t_{queima}) = K^{-1} \ln\left(\cosh\left(t_{queima} \sqrt{KG}\right)\right)$$

$$\therefore y_{queima} = 25.7249 \text{m}$$

6.2.2 Gráficos (I)

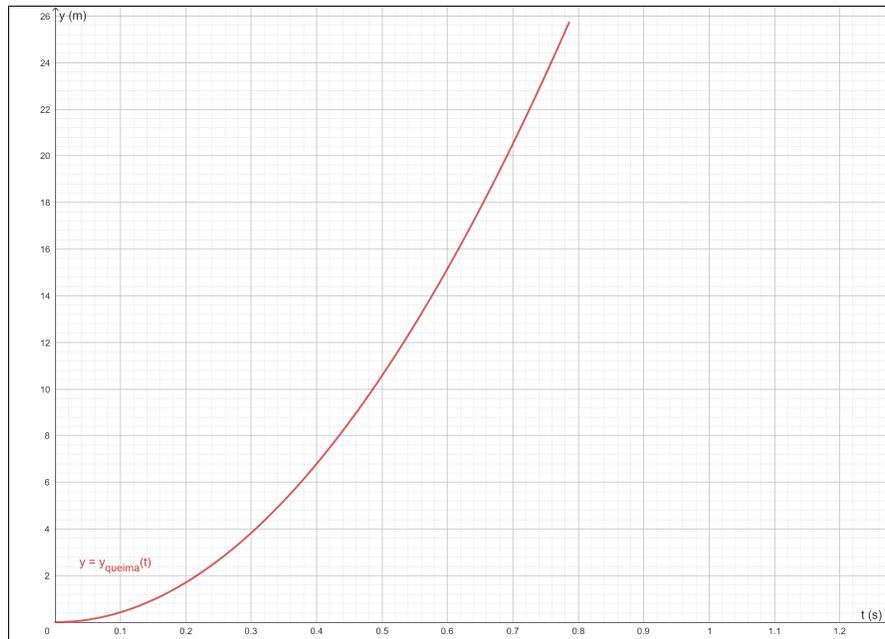


Figura 3: Gráfico Altura X Tempo na fase propulsada ($t_{queima} \geq t \geq 0$)

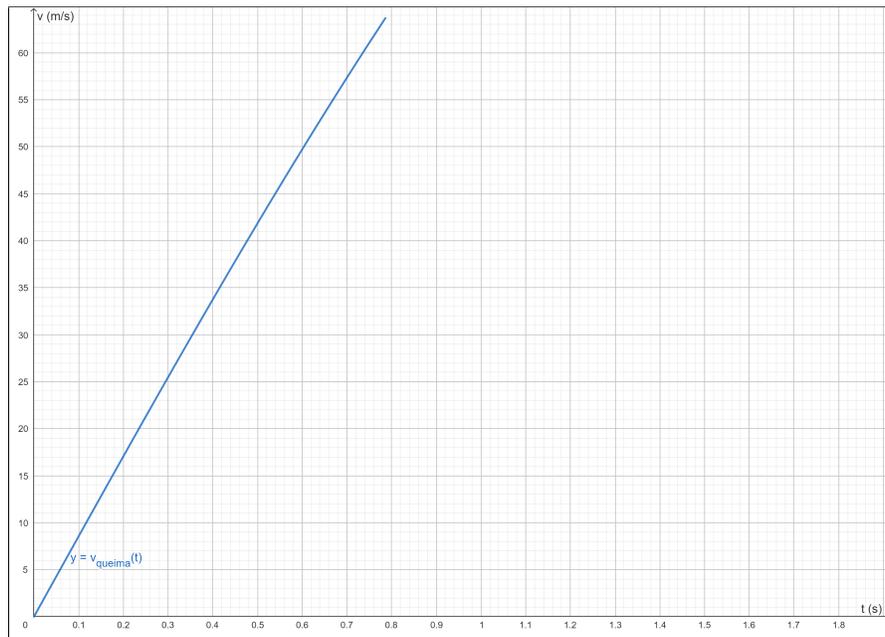


Figura 4: Gráfico Velocidade X Tempo na fase propulsada ($t_{queima} \geq t \geq 0$)



Figura 5: Gráfico Aceleração X Tempo na fase propulsada ($t_{queima} \geq t \geq 0$)

6.2.3 Definindo κ

Como a massa após a queima é a massa seca, então o parâmetro κ será usado. Agora, será adotada a letra kappa propriamente dita na notação. Dado que

$$m = m_{seca} = 44.675g$$

Então,

$$\kappa = \frac{\rho A C_D}{2m} \therefore \kappa = 3.44364 \cdot 10^{-4} m^{-1}$$

6.2.4 Tempo até o apogeu

Como o apogeu se caracteriza por ser o instante de mudança de sentido da trajetória, a velocidade nesse ponto é zero. Matematicamente, escreve-se

$$\begin{aligned} v(t') &= \sqrt{\frac{g}{\kappa}} \tan \left[\arctan \left(v_0 \sqrt{\frac{\kappa}{g}} \right) - t' \sqrt{\kappa g} \right] = 0 \\ \Rightarrow \tan \left[\arctan \left(v_0 \sqrt{\frac{\kappa}{g}} \right) - t' \sqrt{\kappa g} \right] &= 0 \end{aligned}$$

É evidente que a primeira solução com $k = 0$ do conjunto de soluções $\pi \cdot k$; $k \in \mathbb{Z}$ corresponde ao valor procurado, uma vez que é a primeira vez que a função (velocidade) se iguala a zero partindo da origem em direção aos reais positivos.

$$\begin{aligned} \Rightarrow \arctan \left(v_0 \sqrt{\frac{\kappa}{g}} \right) - t' \sqrt{\kappa g} &= 0 \\ \Rightarrow t' &= \frac{1}{\sqrt{\kappa g}} \arctan \left(v_0 \sqrt{\frac{\kappa}{g}} \right) \\ \therefore t' &= 4.75958s \end{aligned}$$

Sendo que $v_0 = v_{queima}$. O tempo até o apogeu é $t_{apogeu} = t' + t_{queima}$, já que t' representa o tempo entre o fim da queima e o apogeu. Logo,

$$t_{apogeu} = 5.54558s$$

6.2.5 Altura do apogeu

Para encontrar a altura do apogeu, basta inserir o tempo do apogeu (previsto) na equação da posição, considerando a altura inicial como àquela do fim da queima (prevista). Assim,

$$y(t_{apogeu}) = y_0 + \kappa^{-1} \ln \left[\left(\cos \left(\arctan \left(v_0 \sqrt{\frac{\kappa}{g}} \right) - t_{apogeu} \sqrt{\kappa g} \right) \right) \sqrt{1 + \frac{v_0^2 \kappa}{g}} \right]$$
$$\Rightarrow y_{apogeu} = y(t_{apogeu}) = 25.72495 + 128.73115$$
$$\therefore y_{apogeu} = 154.45610m$$

6.2.6 Gráficos (II)

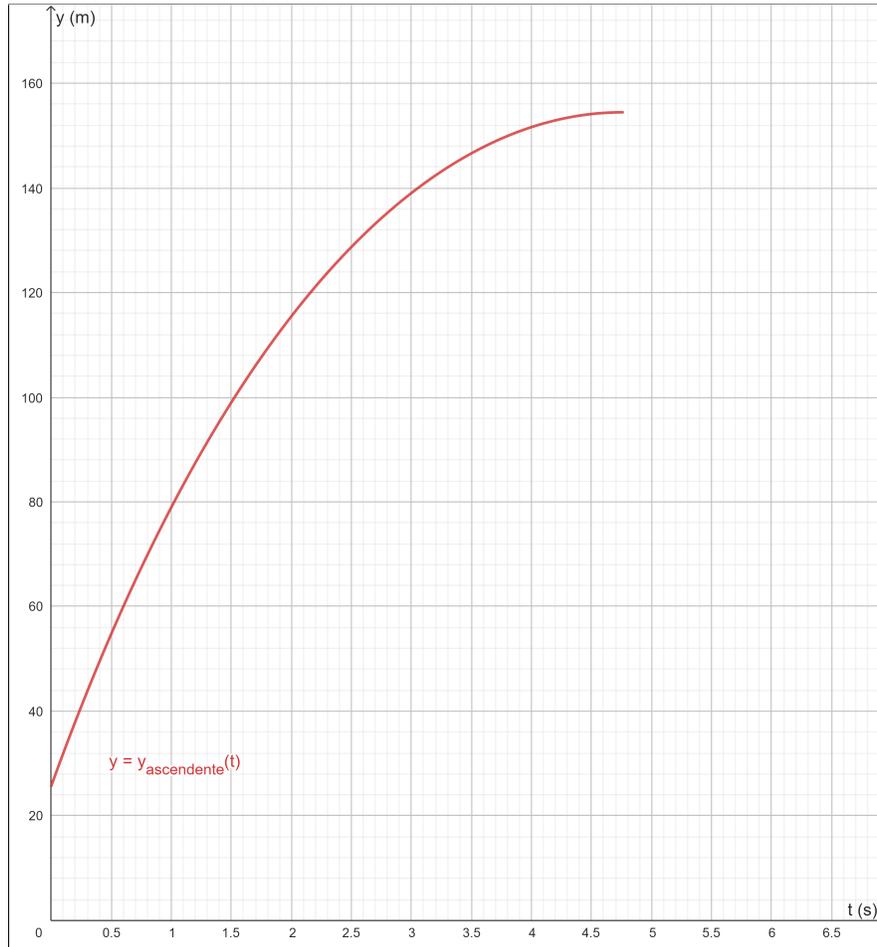


Figura 6: Gráfico Altura X Tempo na fase ascendente ($t' \geq t \geq 0$)

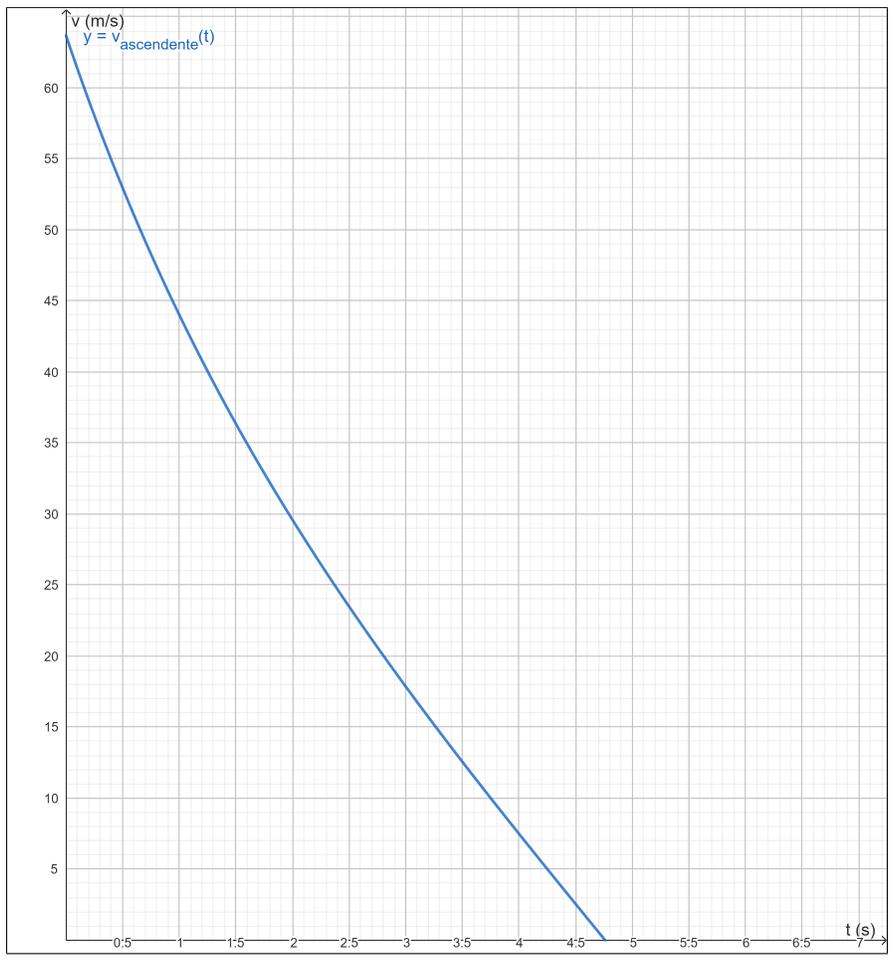


Figura 7: Gráfico Velocidade X Tempo na fase ascendente ($t' \geq t \geq 0$)



Figura 8: Gráfico Aceleração X Tempo na fase ascendente ($t' \geq t \geq 0$)

6.3 Fase descendente

6.3.1 Tempo de queda

O tempo de queda é determinado pela raiz da função de posição na fase descendente. Assim,

$$y(t_{queda}) = y_{apogeu} - \kappa^{-1} \ln(\cosh(t_{queda}\sqrt{\kappa g})) = 0$$

Isolando t_{queda} , tem-se que

$$t_{queda} = \frac{1}{\sqrt{\kappa g}} \cosh^{-1}(e^{\kappa y_{apogeu}})$$

Substituindo os valores, obtém-se

$$\therefore t_{queda} = 6.12668s$$

Portanto, o tempo total de voo é

$$t_{total} = t_{apogeu} + t_{queda} = 11.67226s$$

6.3.2 Velocidade de impacto

A velocidade de impacto é obtida pelo valor da função velocidade quando o tempo é igual a t_{queda} . Dessa maneira, tem-se

$$v_{impacto} = v(t_{queda}) = -\sqrt{\frac{g}{\kappa}} \tanh(t_{queda}\sqrt{\kappa g})$$

$$\therefore |v_{impacto}| = 43.14205 \text{ m s}^{-1}$$

6.3.3 Aceleração de impacto

A aceleração no momento de impacto é calculada pela função horária da aceleração quando o tempo é igual a t_{queda} . Então,

$$a_{impacto} = a(t_{queda}) = -g \operatorname{sech}^2(t_{queda}\sqrt{\kappa g})$$

$$\therefore |a_{impacto}| = 3.37817 \text{ m s}^{-2}$$

6.3.4 Gráficos (III)

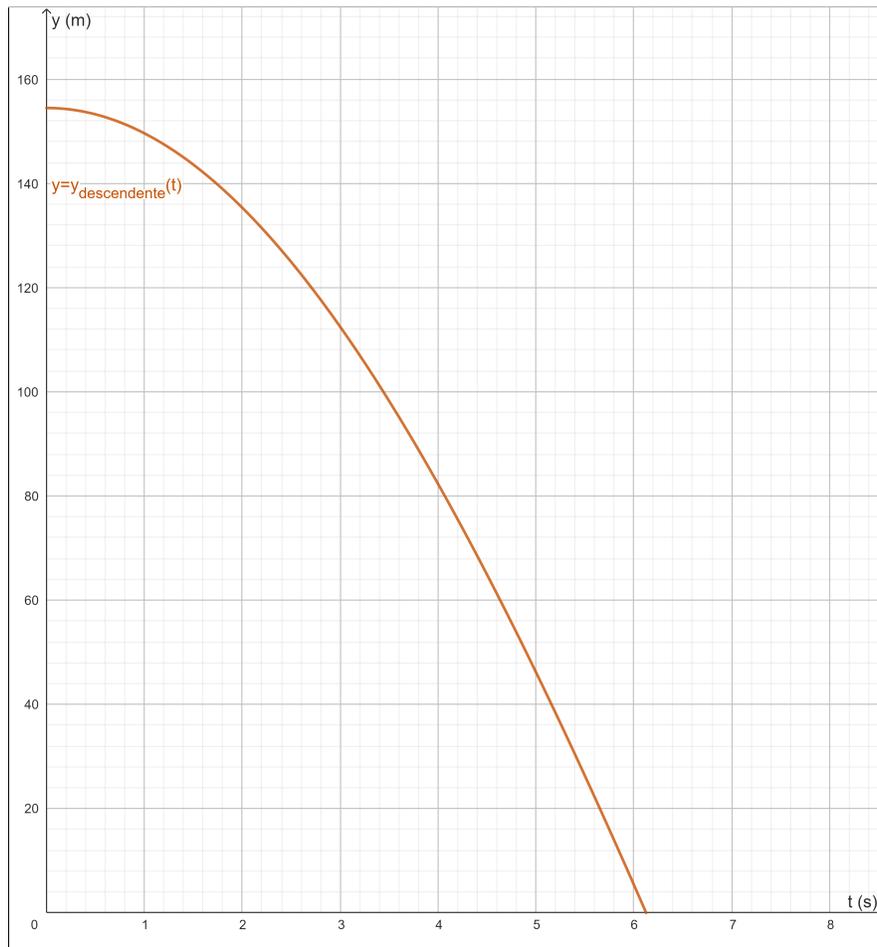


Figura 9: Gráfico Altura X Tempo na fase descendente ($t_{queda} \geq t \geq 0$)

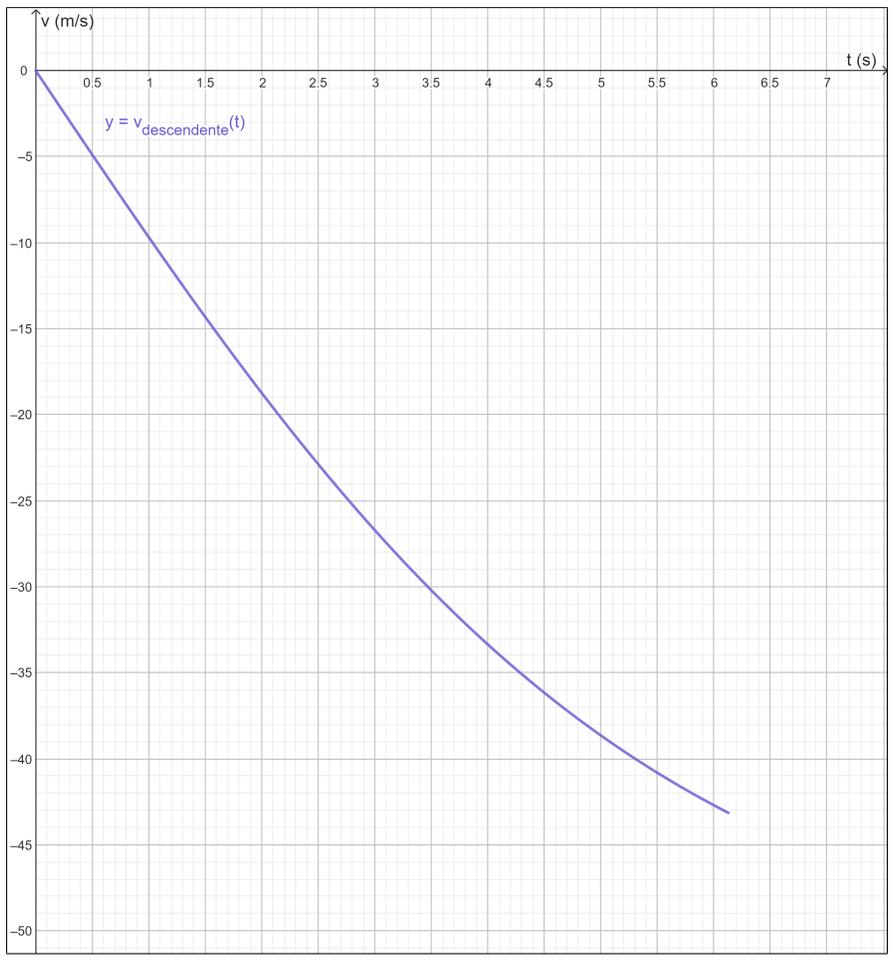


Figura 10: Gráfico Velocidade X Tempo na fase descendente ($t_{queda} \geq t \geq 0$)

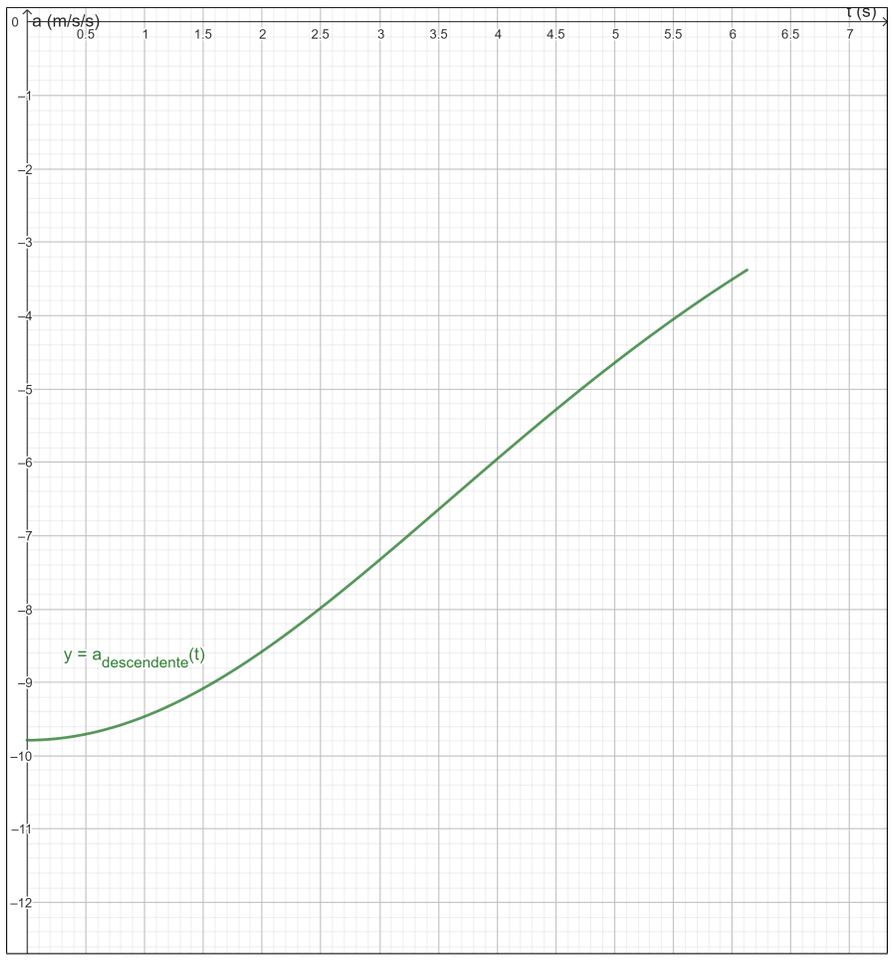


Figura 11: Gráfico Aceleração X Tempo na fase descendente ($t_{queda} \geq t \geq 0$)

Juntando os gráficos de altura de cada fase, ajustando seus domínios e translacionando-os devidamente, é possível plotar um gráfico único de altura para todo o voo:

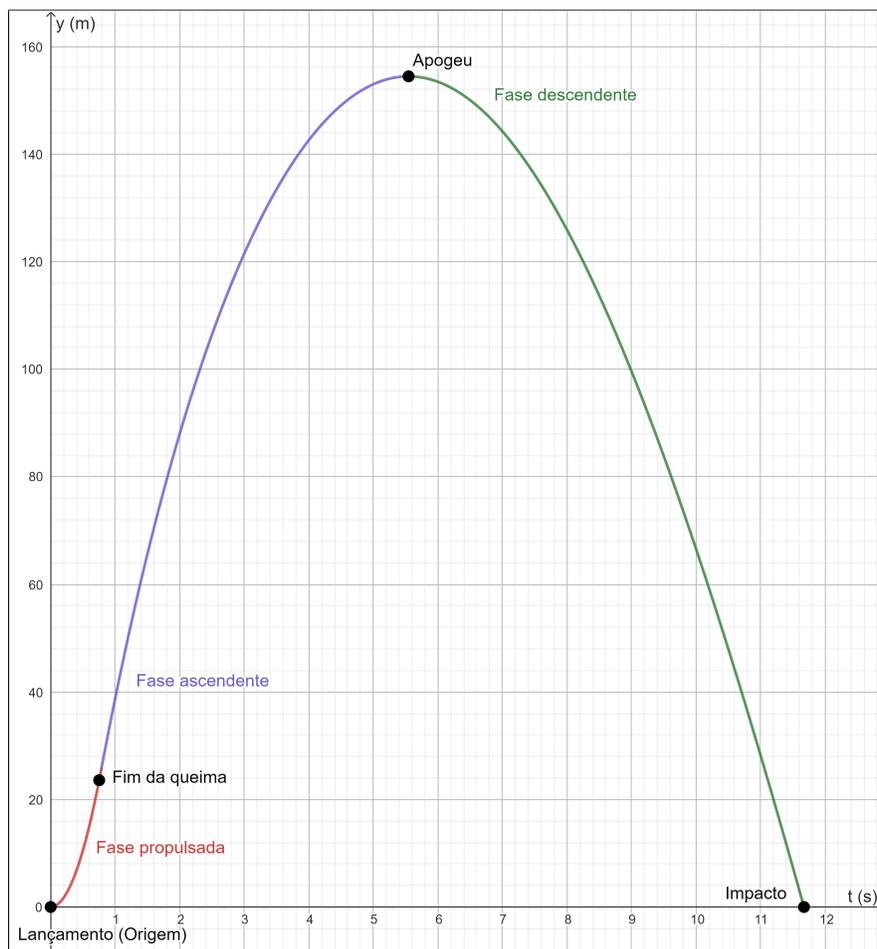


Figura 12: Gráfico Altura X Tempo do LAE-140-v2 ($t_{total} \geq t \geq 0$)

6.4 Comparação com dados de voo

Alguns dados e gráficos foram extraídos de altímetro ou medidos por participantes do lançamento. Uma tabela comparando os principais dados medidos e previstos (neste trabalho) foi construído.

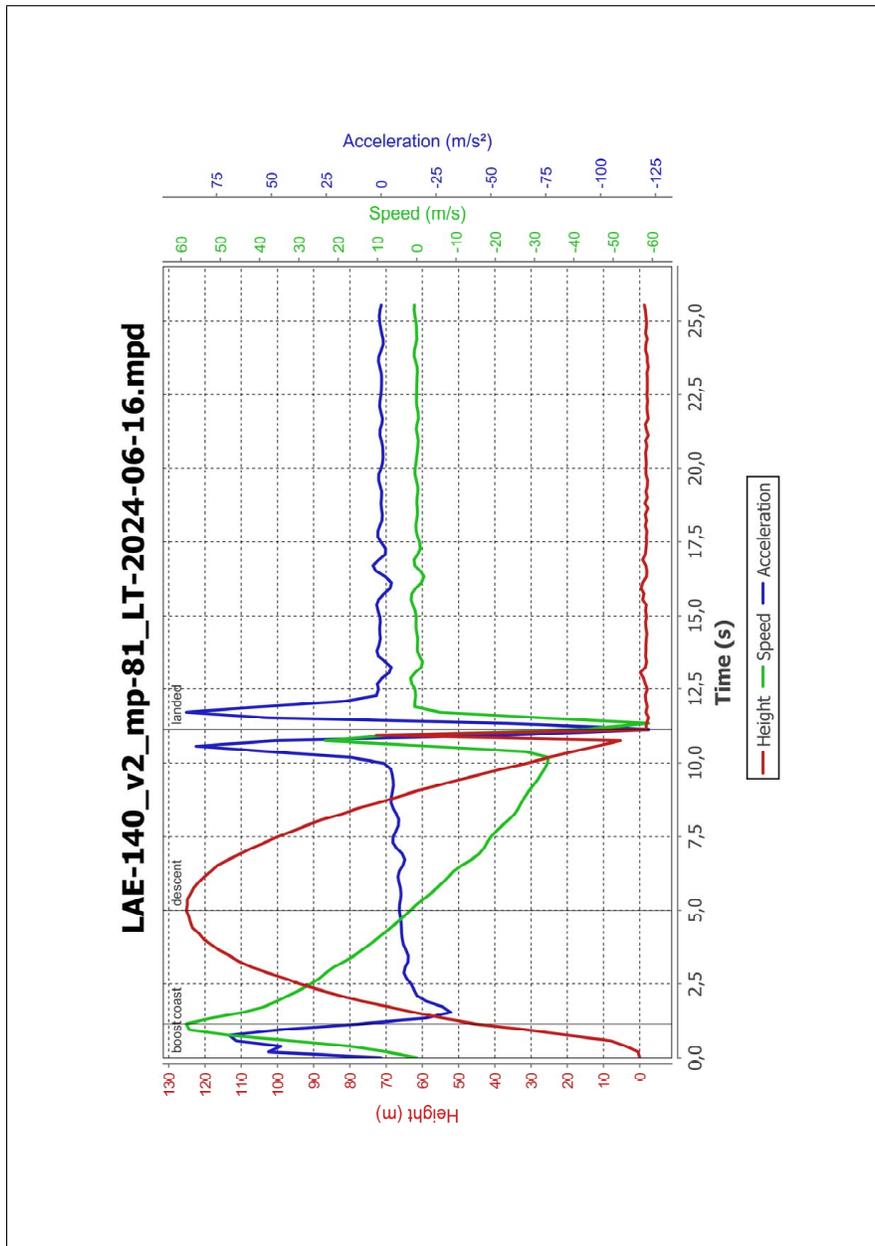


Figura 13: Gráfico com altura, velocidade e aceleração versus tempo

| Dado | Previsto | Medido | Diferença Absoluta | Diferença Relativa |
|---------------|--------------|-----------|--------------------|--------------------|
| t_{queima} | 0.786 s | 1.15 s | 0.36 s | 31% |
| v_{queima} | 63.6830 m/s | 58.67 m/s | 5.01 m/s | 8.5% |
| h_{queima} | 25.7249 m | 45.6 m | 19.9 m | 44% |
| t_{apogeu} | 5.54558 s | 4.99 s | 0.56 s | 11% |
| y_{apogeu} | 154.45610 m | 125.2 m | 29.3 m | 23% |
| t_{queda} | 6.12668 s | 5.95 s | 0.18 s | 3% |
| $v_{impacto}$ | 43.14205 m/s | 21.0 m/s | 22.1 m/s | 105% |
| t_{total} | 11.67226 s | 10.94 s | 0.73 s | 6.7% |

É importante destacar que a discrepância no tempo de queima pode ter ocorrido pela curva de empuxo (i.e. não constante), que contribui gradativamente menos no impulso perto do final do tempo de

queima. Além disso, percebe-se que a aproximação assumida na fase propulsada possuiu uma variação relativamente grande, demonstrando a importância de o cálculo da fase propulsada ser preciso. Além disso, existe uma incerteza nos dados no momento do pouso devido ao efeitos do impacto mecânico.

7 Conclusão

Em suma, a partir da formulação e resolução de equações diferenciais que representam as fases balísticas ascendentes e descendentes, unidimensionais e com arrasto, pôde-se determinar, por meio do Cálculo Diferencial e Integral, as seguintes equações de movimento (posição, velocidade e aceleração) em função do tempo. As funções inversas destas também foram deduzidas e estão nas seções anteriores. Além disso, foram estabelecidas comparações entre o modelo teórico e dados de altitude, velocidade e aceleração de um altímetro instalado em um foguetemodelo. Houve poucas diferenças nos parâmetros referentes a trajetória balística, como os tempos de voo e altura do apogeu. No entanto, dados que estavam atrelados diretamente à fase propulsada tiveram um desvio significativo, provavelmente devido às suposições tomadas para se obter o modelo aproximado para esta fase.

Referências

- [1] LEE, S.-H.; ALDREDGE, R. C. Analytic approach to determine optimal conditions for maximizing altitude of sounding rocket: Flight in standard atmosphere. v. 46, p. 374–385, 1 out. 2015.
- [2] CHAN, L.; E.S. CHEB-TERRAB. Non-Liouvillian solutions for second order linear ODEs. arXiv (Cornell University), 1 jan. 2004.
- [3] ALVES, A. L.; BENTO, S. S.; MARCHI, C. H. Movimento Vertical de Minifoguetes: Equações de Trajetórias e Análises Gráficas. Revista Brasileira de Ensino de Física, v. 43, p. e20200479, 15 fev. 2021.